

# EIN KOMMENTAR ZUM KETTENBRUCH, MIT WELCHEM DER BEDEUTENDE LAGRANGE DIE BINOMIALPOTENZEN AUSGEDRÜCKT HAT

Leonhard Euler

§1 Dieser bedeutende Mann hat diese Binomialpotenz  $(1 + x)^n$  durch eine völlig einzigartige Methode aus seinem logarithmischen Differential in diesen Kettenbruch verwandelt:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1 + \frac{(1-n)x}{2 + \frac{(1+n)x}{3 + \frac{(2-n)x}{2 + \frac{(2+n)x}{5 + \frac{(3-n)x}{2 + \frac{(3+n)x}{7 + \text{etc}}}}}}}}}$$

welcher Ausdruck sich der hervorstechenden Eigenschaft erfreut, dass er, sooft der Exponent  $n$  eine ganze Zahl war, ob positiv oder negativ, abbricht und auf endliche Form zurückgeht.

§2 Weil ja dieser Kettenbruch nicht nach einem gleichmäßigen Gesetz, sondern nach einem unterbrochenen, voranschreitet, wollen wir ihn auf ein gleichmäßiges Bildungsgesetz zurückführen; das kann am angenehmsten

gemacht werden, wenn wir ihn auf die folgende Weise durch Teile darstellen:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{A}$$

$$A = 1 + \frac{(1-n)x}{2 + \frac{(1+n)x}{B}}$$

$$B = 1 + \frac{(2-n)x}{2 + \frac{(2+n)x}{C}}$$

$$C = 1 + \frac{(3-n)x}{2 + \frac{(3+n)x}{D}}$$

$$D = 1 + \frac{(4-n)x}{2 + \frac{(4+n)x}{E}}$$

etc.

Daher werden wir also durch Reduktion haben:

$$A = 1 + \frac{(1-n)Bx}{2B + (1+n)x} = 1 + \frac{(1-n)x}{2} - \frac{(1-nn)xx : 2}{2B + (1+n)x}$$

$$= 1 + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(nn-1)xx : 4}{B + \left(\frac{1+n}{2}\right)x}$$

Auf ähnliche Weise wird

$$B = 3 + \frac{(2-n)Cx}{2C + (2+n)x} = 3 + \frac{(2-n)x}{2} - \frac{(4-nn)xx : 2}{2C + (2+n)x}$$

$$= 3 + \frac{(2-n)x}{2} + \frac{(nn-4)xx : 4}{C + \left(\frac{2+n}{2}\right)x}$$

sein. Auf dieselbe Weise werden wir

$$C = 5 + \frac{(3-n)Dx}{2D + (3+n)x} = 5 + \frac{(3-n)x}{2} - \frac{(9-nn)xx : 2}{2D + (3+n)x}$$

$$= 5 + \frac{(3-n)x}{2} + \frac{(nn-9)xx : 4}{D + \left(\frac{3+n}{2}\right)x}$$

haben und so weiter.

§3 Wenn wir also diese Werte der Reihe nach anstelle von  $A, B, C$  einsetzen, wird der Kettenbruch die folgende Form annehmen:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1 + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(nn-1)xx:4}{3(1+\frac{1}{2}x) + \frac{(nn-4)xx:4}{5(1+\frac{1}{2}x) + \frac{(nn-9)xx:4}{7(1+\frac{1}{2}x) + \frac{(nn-16)xx:4}{etc}}}}$$

§4 Damit wir hier die Partialbrüche loswerden, wollen wir  $x = 2y$  setzen, dass wir diesen Ausdruck erhalten:

$$(1+2y)^n = 1 + \frac{2ny}{1 + (1-n)y + \frac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \frac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \frac{(nn-9)yy}{7(1+y) + etc}}}}$$

welche leicht in diesen verwandelt wird:

$$\frac{2ny}{(1+2y)^n - 1} = 1 + (1-n)y + \frac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \frac{(nn-4)yy}{5(1+y) + etc}}$$

Man addiere auf beiden Seiten  $ny$ , dass er

$$\frac{ny(1 + (1+2y)^n)}{(1+2y)^n - 1} = 1 + y + \frac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \frac{(nn-4)yy}{5(1+y) + etc}}$$

welcher Ausdruck schon nach einer hinreichend regelmäßigen Struktur voranschreitet.

§5 Wir wollen gleich auf beiden Seiten durch  $1+y$  teilen, und die linke Seite wird

$$\frac{ny}{1+y} \cdot \frac{(1+2y)^n + 1}{(1+2y)^n - 1}$$

werden. Auf der rechten Seite aber teile man die einzelnen Brüche oben und unten durch  $1 + y$  und es wird diese Form hervorgehen

$$1 + \frac{(nn - 1)yy : (1 + y)^2}{3 + \frac{(nn - 4)yy : (1 + y)^2}{5 + \frac{(nn - 9)yy : (1 + y)^2}{7 + \frac{(nn - 16)yy : (1 + y)^2}{9 + \frac{(nn - 25)yy : (1 + y)^2}{11 + \text{etc}}}}}$$

§6 Diesen Ausdruck wollen wir also erneut vereinfachen, indem wir  $\frac{y}{1+y} = z$  setzen, sodass  $y = \frac{z}{1-z}$  ist. Auf diese Weise aber wird diese linke Seite wegen

$$1 + 2y = \frac{1 + z}{1 - z}$$

diese Form annehmen:

$$\frac{nz[(1 + z)^n + (1 - z)^n]}{(1 + z)^n - (1 - z)^n},$$

was also diesem Kettenbruch gleich werden wird:

$$1 + \frac{(nn - 1)zz}{3 + \frac{(nn - 4)zz}{5 + \frac{(nn - 9)zz}{7 + \frac{(nn - 16)zz}{9 + \text{etc}}}}}$$

welcher, wegen seiner Eleganz, die höchste Aufmerksamkeit verdient.

§7 Nun ist also per se klar, dass dieser Ausdruck immer irgendwann abbricht, sooft  $n$  eine ganze Zahl war, ob positiv oder negativ. Es ist aber evident, dass auch die linke Seite denselben Wert beibehält, auch wenn  $-n$  für  $n$  geschrieben wird. Nachdem das nämlich gemacht worden ist, wird

$$\frac{-nz[(1 + z)^{-n} + (1 - z)^{-n}]}{(1 + z)^{-n} - (1 - z)^{-n}}$$

werden, welcher Bruch, wenn er mit  $(1 - zz)^n$  erweitert wird, diese Form annehmen wird:

$$\frac{-nz[(1 - z)^n + (1 + z)^n]}{(1 - z)^n - (1 + z)^n} = \frac{nz[(1 + z)^n + (1 - z)^n]}{(1 + z)^n - (1 - z)^n},$$

was der vorhergehende Ausdruck selbst ist. Und genauso ist es, ob nun dem Buchstaben  $n$  ein positiver oder negativer Wert zugeteilt wird.

§8 Wenn wir so  $n = \pm 1$  nehmen, wird die linke Seite gleich 1, welcher auch der Wert der rechten ist. Weiter wird für  $n = \pm 2$  gesetzt die linke Seite gleich  $1 + zz$ , die rechte Seite wird in der Tat auch gleich  $1 + zz$ . Auf ähnliche Weise wird für  $n = \pm 3$  genommen die linke Seite, wie auch die rechte,  $\frac{3(1+3zz)}{3+zz}$ .

§9 Daher lassen sich hoffentlich aber einige Schlussfolgerungen von größter Bedeutung ableiten, je nachdem ob dem Exponenten  $n$  entweder ein verschwindender oder ein unendlicher Wert zugeteilt wird; besonders aber der Fall, in dem dem Buchstaben  $z$  ein imaginärer Wert gegeben wird, führt zu einer außerordentlichen Schlussfolgerung, weil ja dieser Kettenbruch selbst nichtsdestoweniger reell bleibt, von welcher Schlussfolgerung aus wir also anfangen wollen.

### SCHLUSSFOLGERUNG 1, BEI DER $z = t\sqrt{-1}$ IST

§10 In diesem Fall wird also dieser Kettenbruch diese Form haben:

$$1 - \frac{(nn - 1)tt}{3 - \frac{(nn - 4)tt}{5 - \frac{(nn - 9)tt}{7 - \frac{(nn - 16)tt}{9 - \text{etc}}}}}$$

aber die linke Seite wird nun in der Tat

$$\frac{nt\sqrt{-1}[(1 + t\sqrt{-1})^n + (1 - t\sqrt{-1})^n]}{(1 + t\sqrt{-1})^n - (1 - t\sqrt{-1})^n}$$

sein, welche, weil die Imaginärteile nicht dagegen sprechen, gewiss einen reellen Wert haben muss, welchen wir also hier untersuchen finden wollen. Zu diesem Ziel wollen wir  $t = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  setzen, sodass  $t = \tan \varphi$  ist; dann wird also

$$(1 + t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n}{(\cos \varphi)^n} = \frac{\cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi}{(\cos \varphi)^n}$$

sein und auf ähnliche Weise

$$(1 - t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n}{(\cos \varphi)^n} = \frac{\cos n\varphi - \sqrt{-1} \sin n\varphi}{(\cos \varphi)^n};$$

Nachdem also diese Werte eingesetzt werden, wird die linke Seite

$$\frac{2n\sqrt{-1} \tan \varphi \cos n\varphi}{2\sqrt{-1} \sin \varphi} = \frac{n \tan \varphi \cos n\varphi}{\sin n\varphi} = \frac{n \tan \varphi}{\tan n\varphi}.$$

§11 Für  $\tan \varphi = t$  gesetzt werden wir also den folgenden höchst bemerkenswerten Kettenbruch haben:

$$\frac{nt}{\tan n\varphi} = 1 - \frac{(nn - 1)tt}{3 - \frac{(nn - 4)tt}{5 - \frac{(nn - 9)tt}{7 - \text{etc}}}}$$

welcher also auf folgende Weise ausgedrückt werden können wird:

$$\tan n\varphi = \frac{nt}{1 - \frac{(nn - 1)tt}{3 - \frac{(nn - 4)tt}{5 - \frac{(nn - 9)tt}{7 - \text{etc}}}}}$$

welcher Ausdruck also sehr schön genutzt werden kann um die Tangenten vielfacher Winkel durch den Tangens des einfachen Winkels  $t$  auszudrücken. Wenn so  $n = 2$  war, werden wir

$$\tan 2\varphi = \frac{2t}{1 - tt}$$

haben. Wenn auf dieselbe Weise  $n = 3$  ist, wird

$$\tan 3\varphi = \frac{3t}{1 - \frac{8tt}{3 - tt}} = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}$$

sein. Hier offenbart sich ein höchst bemerkenswerter Fall, wann immer der Exponent  $n$  unendlich klein angenommen wird; dann wird nämlich  $\tan n\varphi = n\varphi$  sein; es wird also, indem man auf beiden Seiten durch  $n$  teilt, diese Form entstehen

$$\varphi = \frac{t}{1 + \frac{tt}{3 + \frac{4tt}{5 + \frac{9tt}{7 + \text{etc}}}}}$$

durch welchen Kettenbruch der Winkel selbst durch den Tangens  $t$  ausgedrückt wird.

**§12** Wir wollen nun den Fall betrachten, in dem der Exponent  $n$  unendlich groß angenommen wird, aber der Winkel  $\varphi$  in der Tat unendlich klein und daher auch sein Tangens  $t$  unendlich klein ist, dennoch so, das  $n\varphi = \theta$  ist und daher auch  $nt = \theta$ ; dann werden wird also diesen Kettenbruch haben

$$\tan \theta = \frac{\theta}{1 - \frac{\theta\theta}{3 - \frac{\theta\theta}{5 - \frac{\theta\theta}{7 - \text{etc}}}}}$$

durch welche Formel aus einem gegebenen Winkel sein Tangens bestimmt werden können wird, welcher Ausdruck also als der reziproke des Vorhergehenden betrachtet werden kann.

## SCHLUSSFOLGERUNG 2,

IN DEM EIN VERSCHWINDENDER WINKEL ANGENOMMEN  
WIRD

§13 In diesem Fall wird der Kettenbruch

$$1 - \frac{zz}{3 - \frac{4zz}{5 - \frac{9zz}{7 - \frac{16zz}{9 - \text{etc}}}}}$$

sein. Für den linken Teil ist aber zu bemerken, dass

$$\frac{(1+z)^n - 1}{n} = \log(1+z)$$

ist und daher

$$(1+z)^n = 1 + n \log(1+z);$$

auf ähnliche Weise wird

$$(1-z)^n = 1 + n \log(1-z)$$

sein, woher die linke Seite

$$\frac{nz[2 + n \log(1+z) + n \log(1-z)]}{n \log(1+z) - n \log(1-z)} = \frac{2z}{\log \frac{1+z}{1-z}}$$

werden wird; daher werden wir also diese Form haben:

$$\frac{2z}{\log \frac{1+z}{1-z}} = 1 - \frac{zz}{3 - \frac{4zz}{5 - \frac{9zz}{7 - \frac{16zz}{9 - \text{etc}}}}}$$

und daher wird der Logarithmus selbst auf die folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\log \frac{1+z}{1-z} = \frac{2z}{1 - \frac{zz}{3 - \frac{4zz}{5 - \text{etc}}}}$$



SCHLUSSFOLGERUNG 3,  
IN WELCHER DER EXPONENT  $n$  UNENDLICH GROSS  
GENOMMEN WIRD

§14 Hier setze man also, damit der Kettenbruch einen endlichen Wert bekommt, was nur passieren kann, wenn die Größe  $z$  unendlich klein gesetzt wird,  $nz = v$ , dass  $z = \frac{v}{n}$  ist, und unser Kettenbruch wird

$$1 + \frac{vv}{3 + \frac{vv}{5 + \frac{vv}{7 + \frac{vv}{9 + \text{etc}}}}}$$

sein. Für die linke Seite ist aber bekannt, dass

$$\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n = e^v$$

ist und auf die gleiche Art

$$\left(1 - \frac{v}{n}\right)^n = e^{-v},$$

die linke Seite wird also diese Form haben:

$$\frac{v(e^v + e^{-v})}{e^v - e^{-v}} = \frac{v(e^{2v} + 1)}{e^{2v} - 1};$$

deswegen werden wir diesen bemerkenswerten Kettenbruch haben:

$$\frac{v(e^{2v} + 1)}{(e^{2v} - 1)} = 1 + \frac{vv}{3 + \frac{vv}{5 + \frac{vv}{7 + \frac{vv}{9 + \text{etc}}}}}$$

dessen transzendenten Wert auch auf diese Weise durch gewohnte Reihen beschafft werden kann:

$$\frac{1 + \frac{vv}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \text{etc}}{1 + \frac{vv}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} + \text{etc}}.$$