Bemerkungen über die in dieser Form enthaltenen Kettenbrüche

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

*

Leonhard Euler

*Originaltitel: "Observationens circa fractiones continuas in hac forma contentas

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

", erstmals publiziert in „*Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* 4 1813, pp. 52-74", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16,2, pp. 139 - 161 ", Eneström-Nummer E742, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§1 Obgleich bis jetzt mehrere Methoden gefunden worden sind, zu Kettenbrüchen zu gelangen und umgekehrt deren Werte anzugeben, ist dennoch keine derer so beschaffen, dass mit deren Hilfe die Werte der Kettenbrüche, die in dieser Form enthalten sind, ausfindig gemacht werden können, mit Ausnahme des Falles, in welchem $n = 1$ ist. Ich erinnere mich nämlich, dass von mir schon einst der Wert dieser Form

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc.}}}}}$$

als $= \frac{1}{e-1}$ gefunden worden ist, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist, was mir freilich umso wundersamer erscheint, weil in allen übrigen Fällen, in denen n eine ganze positive Zahl ist, die Summe sogar durch rationale Zahlen ausgedrückt werden kann. Deswegen scheint meine Untersuchung über diesen Gegenstand, in welcher ich diese Summen gefunden habe, sehr viel an Erkenntnis zu verschaffen, um diese Lehre von größter Bedeutung weiter auszubauen.

§2 Damit sich die natürliche Beschaffenheit dieser Form genauer untersuchen lässt, habe ich sie in den folgenden Formeln erfasst:

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{1+A}, \\ A &= \frac{n+1}{2+B}, \\ B &= \frac{n+2}{3+B}, \\ B &= \frac{n+3}{4+D} \end{aligned}$$

etc.,

aus welchen die folgenden deriviert werden:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{n}{S} - 1,\\
B &= \frac{n+1}{A} - 2,\\
C &= \frac{n+2}{B} - 3,\\
D &= \frac{n+3}{C} - 4
\end{aligned}
$$

etc.

§3 Daher tritt es schon leicht klar zu tage, dass immer gilt

$$S < \frac{n}{1}, \quad A < \frac{n+1}{2}, \quad B < \frac{n+2}{3}, \quad C < \frac{n+3}{4} \quad \text{etc.}$$

Wenn daher nun in der ersten Formel anstelle von A der Wert $\frac{n+1}{2}$ geschrieben wird, welcher sehr groß ist, dann wird der Bruch $\dfrac{n}{1+A}$ zu klein sein und daher wird sein

$$S > \frac{n}{1+\frac{n+1}{2}} \quad \text{oder es wird sein} \quad S > \frac{2n}{n+3}.$$

Indem auf die gleiche Weise bezüglich der anderen begründet wird, wird werden:

$$A > \frac{n+1}{2+\frac{n+2}{3}} \quad \text{oder} \quad A > \frac{3(n+1)}{n+8},$$

$$B > \frac{n+2}{3+\frac{n+3}{4}} \quad \text{oder} \quad B > \frac{4(n+2)}{n+15},$$

$$C > \frac{n+3}{4+\frac{n+4}{5}} \quad \text{oder} \quad C > \frac{5(n+3)}{n+24},$$

$$D > \frac{n+4}{5+\frac{n+5}{6}} \quad \text{oder} \quad D > \frac{6(n+4)}{n+35}$$

etc.

Es wird also passend sein, diese Formeln noch einmal übersichtlicher aufzulisten.

Tabelle I		Tabelle II	
$S = \dfrac{n}{1+A}$	$A = \dfrac{n}{S} - 1$	$S < \dfrac{n}{1}$	$S > \dfrac{2n}{n+3}$
$A = \dfrac{n+1}{2+B}$	$B = \dfrac{n+1}{A} - 2$	$A < \dfrac{n+1}{2}$	$A > \dfrac{3(n+1)}{n+8}$
$B = \dfrac{n+2}{3+C}$	$C = \dfrac{n+2}{B} - 3$	$B < \dfrac{n+2}{3}$	$B > \dfrac{4(n+2)}{n+15}$
$C = \dfrac{n+3}{4+D}$	$D = \dfrac{n+3}{C} - 4$	$C < \dfrac{n+3}{4}$	$C > \dfrac{5(n+3)}{n+24}$
$D = \dfrac{n+4}{5+E}$	$E = \dfrac{n+4}{D} - 5$	$D < \dfrac{n+4}{5}$	$D > \dfrac{6(n+4)}{n+35}$
$E = \dfrac{n+5}{6+F}$	$F = \dfrac{n+5}{E} - 6$	$E < \dfrac{n+5}{6}$	$E > \dfrac{7(n+5)}{n+48}$
$F = \dfrac{n+6}{7+G}$	$G = \dfrac{n+6}{F} - 7$	$F < \dfrac{n+6}{7}$	$F > \dfrac{8(n+6)}{n+61}$

§4 Mit Hilfe dieser Tabelle wird es leicht sein, nachdem für S irgendein Wert angenommen worden ist, zu erkennen, ob er mit der Wahrheit verträglich ist oder nicht. Wenn nämlich daher aus der zweiten Spalte der ersten Tabelle die Werte A, B, C etc. gesucht werden, wird es, sofort wie irgendeiner derer außerhalb der in der zweiten Tabelle angegebenen Grenzen liegt, ein sicheres Zeichen sein, dass der angenommene Wert falsch ist und daher entweder zu groß oder zu klein ist; und indem auf diese Weise für S mehrere Werte angenommen werden, wird es möglich sein, immer näher an den wahren Wert heranzukommen. Diese Beobachtungen wollen wir also gebrauchen, um gewisse einfachere Fälle zu entwickeln.

ENTWICKLUNG DES FALLES, IN DEM $n = 2$ IST UND DAHER

$$S = \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{6}{5 + \text{ETC.}}}}}}$$

§5 Für diesen Fall werden also die Grenzen sein

$$\begin{aligned}
S &< \frac{2}{1} \quad \text{und} \quad S > \frac{4}{5},\\
A &< \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad A > \frac{9}{10},\\
B &< \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad B > \frac{16}{17},\\
C &< \frac{5}{4} \quad \text{und} \quad C > \frac{25}{26},\\
D &< \frac{6}{5} \quad \text{und} \quad D > \frac{36}{37}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Wir wollen also $S = 1$ nehmen und, wenn daher die Werte der folgenden Buchstaben abgeleitet werden, werden wir auffinden

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1 \quad \text{etc.}$$

weil welche Werte aller innerhalb der angegeben Grenzen liegen, ist es ein gewisses Zeichen, dass der angegebene Wert $S = 1$ mit der Wahrheit verträglich ist, was sich freilich aus der Form selbst hätte erkennen lassen.

ENTWICKLUNG DES FALLES, IN DEM $n = 3$ IST UND AUCH

$$S = \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{7}{5 + \text{ETC.}}}}}}$$

§6 In diesem Fall werden also unsere Grenzen sein

$$\begin{array}{lcl}
S < \frac{3}{1} & \text{und} & S > 1, \\
A < 2 & \text{und} & A > \frac{12}{11}, \\
B < \frac{5}{3} & \text{und} & B > \frac{20}{18}, \\
C < \frac{6}{4} & \text{und} & C > \frac{30}{27}, \\
D < \frac{7}{5} & \text{und} & D > \frac{42}{38} \\
 & \text{etc.} &
\end{array}$$

Daher tritt es schon klar zu tage, dass nicht $S = 2$ ist; es wäre nämlich $A = \frac{1}{2}$, was ausgeschlossen wird. Nach Nehmen von $S = \frac{3}{2}$ wird $A = 1$, welcher Wert auch außerhalb der Grenzen liegt. Es werde also $S = \frac{4}{3}$ genommen und es wird $A = \frac{5}{4}$ hervorgehen, welcher Wert nun innerhalb der Grenzen liegt; daher wird also werden $B = \frac{6}{5}$, $C = \frac{7}{6}$, $D = \frac{8}{7}$, $E = \frac{9}{8}$, $F = \frac{10}{9}$ etc., weil welche Werte alle innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen liegen, ist dies ein gewisses Zeichen, dass der wahre Wert dieses Kettenbruches $S = \frac{4}{3}$ ist.

§7 Hier passiert es zum Vorteil, dass alle Werte der Buchstaben S, A, B, C, D etc. in offenbarer Struktur aufeinander folgen, natürlich $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$ etc., wann immer freilich die Terme dieser Brüche eine arithmetische Progression festlegen. Aber die Natur der Sache erfordert hingegen, dass diese Buchstaben S, A, B, C, D etc. nach einem gewissen gleichmäßigen Gesetz fortschreiten, so wie in diesem Fall eine arithmetische Progression hervorgegangen ist, deren erste Differenzen konstant sind; daher lässt sich schließen, dass auch für die übrigen Fälle Werte solcher Art für die Buchstaben S, A, B, C, D etc. hervorgehen müssen, die, indem ununterbrochen die Differenzen genommen werden, schließlich zu verschwindenden Differenzen führen. Nachdem dies bemerkt worden ist, wollen wir S seinen unbestimmten Wert lassen und daher die Werte der folgenden Buchstaben berechnen:

$$A = \frac{3-S}{S}, \quad B = \frac{6S-6}{3-S}, \quad C = \frac{33-23S}{6S-6}, \quad D = \frac{128S-168}{33-23S} \quad \text{etc.}$$

Nun schreiten die Terme dieser Brüche, natürlich die Nenner, in dieser Reihe fort:

$$1, \quad S, \quad 3-S, \quad 6S-6, \quad 33-23S, \quad 128-168 \quad \text{etc.}$$

Daher wird sein

Erste Differenzen	$S-1$,	$3-2S$,	$7S-\ 9$,	$39-29S$,	$151S-201$	etc.
Zweite Differenzen		$4-3S$,	$9S-12$,	$48-36S$,	$180S-240$	etc.
Dritte Differenzen			$12S-16$,	$60-45S$,	$216S-288$	etc.

Hier tritt es sofort klar zutage, dass die ersten Differenzen nicht verschwinden, weil aus ihnen gleich Null gesetzt verschiedene folgende Werte für S hervorgingen, nämlich 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{39}{29}$ etc. Aber wenn hingegen die zweiten Differenzen gleich Null gesetzt werden, liefern alle $S = \frac{4}{3}$, welchen selben Wert die dritten und folgenden Differenzen gleich Null gesetzt hervorbringen, und so können wir gewiss sein, dass in der Tat $S = \frac{4}{3}$ sein wird.

Entwicklung des Falles, in dem $n = 4$ ist und auch

$$S = \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{6}{3 + \cfrac{7}{4 + \cfrac{8}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

§8 Hier wollen wir sofort die zuvor dargestellte Methode verwenden und aus dem unbestimmten Wert S die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc. erschließen, welche sein werden

$$A = \frac{4-S}{S}, \quad B = \frac{7S-8}{4-S}, \quad C = \frac{48-27S}{7S-8}, \quad D = \frac{157S-248}{48-27S}$$
$$E = \frac{1624-1001S}{157S-248} \quad \text{etc.}$$

Nun werden die Nenner dieser Brüche zu einer Reihe angeordnet und ununterbrochen die Differenzen genommen wie folgt:

	$1,$	$S,$	$4-S,$	$7S-8,$	$48-27S,$	$157S-248$	etc.,
D. I.	$S-1,$	$4-2S,$	$8S-12,$	$56-34S,$	$184S-296$	etc.,	
D. II.		$5-3S,$	$10S-16,$	$68-42S,$	$218S-352$	etc.,	
D. III.			$13S-21,$	$84-52S,$	$260S-420$	etc.,	
D. IV.				$105-65S,$	$312S-504$	etc.	

etc.

Hier ist es sofort klar, dass weder die ersten noch die zweiten Differenzen das Ziel erreichen, weil aus ihnen gleich Null gesetzt verschiedene Werte für S hervorgingen; aber alle dritten Differenzen geben hingegen $S = \frac{21}{13}$, welcher also für den Wert des Kettenbruches zu halten ist.

§9 Um aber darüber noch sicherer zu sein, wollen wir diesen Wert $\frac{21}{13}$ durch die zuerst angegebene Methode ermitteln und aus ihm alle folgenden Werte mit Hilfe der zweiten Spalte der ersten Tabelle durch Nehmen von $n = 4$ berechnen; es verhält sich dann wie folgt:

$$A = \frac{31}{21}, \quad B = \frac{43}{31}, \quad C = \frac{57}{43}, \quad A = \frac{73}{57}, \quad A = \frac{91}{73} \quad \text{etc.},$$

welche Werte alle innerhalb der in der zweiten Tabelle angegebenen Grenzen zu liegen entdeckt werden. Außerdem haben sie eine außerordentliche Struktur, weil deren Nenner nach den Differenzen 8, 10, 12, 14, 16 etc. wachsen, die natürlich immer um zwei wachsen; wohingegen andernfalls jede beliebigen anderen für S angenommenen Werte zu absurden Werten führen würden, die bald über die vorgeschriebenen Grenzen hinaus bewegt werden würden.

Entwicklung des Falles, in dem $n = 5$ ist und auch

$$S = \cfrac{5}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \cfrac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

§10 Wir wollen auch hier die zuvor gebrauchte Methode verwenden und es werden die folgenden Werte aufgefunden werden:

$$A = \frac{5 - S}{S}, \quad B = \frac{8S - 10}{5 - S}, \quad C = \frac{65 - 31}{8S - 10}, \quad D = \frac{188S - 340}{65 - 31S},$$
$$E = \frac{2285S - 1219}{188S - 340} \quad \text{etc.}$$

Nun werden die Nenner dieser Brüche zu einer Reihe angeordnet und auf diese Weise die ununterbrochenen Differenzen genommen:

	1,	S,	$5-S$,	$8S-10$,	$65-31S$,	$188S-340$,	$2285-1219S$ etc.,
D. I.	$1-S$,		$5-2S$,	$9S-15$,	$75-39S$,	$219S-405$,	$2625-1407S$ etc.,
D. II.			$6-3S$,	$11S-20$,	$90-48S$,	$258S-480$,	$3030-1626S$ etc.,
D. III.				$14S-26$,	$110-59S$,	$306S-570$,	$3510-1884S$ etc.,
D. IV.					$136-73S$,	$365S-680$,	$4080-2190S$ etc.

etc.

§11 Daher erledigen die dritten Differenzen die Aufgabe noch nicht, weil daher verschiedene Werte für S entsprängen; aber aus allen vierten Differenzen wird der Wert $S=\frac{136}{73}$ gefunden, welches also der wahre Wert des Kettenbruches ist, wenn wir welchen nach der ersten Methode ermitteln wollen, wird er entdeckt werden, überaus mit den vorgeschriebenen Grenzen übereinzustimmen. Die schon entwickelten Fälle werden sorgfältig angeordnet diese sein:

$$\begin{array}{cccc} n=2 & n=3 & n=4 & n=5 \\ S=1 & A=\dfrac{4}{3} & S=\dfrac{21}{13} & S=\dfrac{136}{73}. \end{array}$$

§12 Weil aber in diesen Werten keine Struktur beobachtet wird und die Methode, welche wir gebraucht haben, für die folgenden Fälle allzu aufwändige Rechenoperationen verlangte, werde ich andere Methoden gebrauchen, die mit größerem Erfolg zum gewüschten Ziel, auch für größere anstelle von n angenommene Zahlen, führen.

Zweite Methode die Summen dieser Kettenbrüche ausfindig zu machen

§13 Weil wir ja gesehen haben, dass die Werte dieser Buchstaben S, A, B, C, D etc. immer nach einem gewissen gleichmäßigen Gesetz fortschreiten, während die Buchstaben A, B, C, D etc. die Werte ähnlicher Kettenbrüche, die entweder um ein oder zwei oder drei etc. Glieder beschnitten worden sind, ausdrücken, besteht, weil gilt

$$A = \cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}} \quad B = \cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\cfrac{n+4}{5+\text{etc.}}}} \quad C = \cfrac{n+3}{4+\cfrac{n+4}{5+\cfrac{n+5}{6+\text{etc.}}}} \quad \text{etc.}$$

kein Zweifel, dass unsere vorgelegte Formel rückwärts fortgesetzt auch einem ähnlichen gleichmäßigen Gesetz folgen wird. Wenn aber unsere Form um einen Schritt rückwärts fortgesetzt wird, wird $\frac{n-1}{0+S}$ hervorgehen, welche wir $= \alpha$ nennen wollen, so dass gilt

$$\alpha = \frac{n-1}{S}.$$

Aber wenn wir sie um zwei Schritte rückwärts fortsetzen, wird gelten

$$\frac{n-2}{-1+\alpha} = \beta.$$

Wenn wir auf die gleiche Weise weiter zurückgehen, werden wir diese Formeln erlangen:

$$\frac{n-3}{-2+\beta} = \gamma, \quad \frac{n-4}{-3+\gamma} = \delta, \quad \frac{n-5}{-4+\delta} = \varepsilon, \quad \frac{n-6}{-5+\varepsilon} = \zeta \quad \text{etc.}$$

und daher lässt sich sicher bestätigen, dass zwischen diesen neuen Buchstaben

$$\ldots, \quad \zeta, \quad \varepsilon, \quad \delta, \quad \gamma, \quad \beta, \quad \alpha, \quad S, \quad A, \quad B \quad \text{etc.}$$

ein ähliches ununterbrochenes Gesetz von Gleichmäßigkeit entdeckt werden muss. Diese Formeln werden also rückwärts fortgesetzt, bis schließlich zu einem Zähler $= 0$ gelangt wird, in welchem Fall man eine solche Form haben wird:

$$\cfrac{0}{-\lambda + \cfrac{1}{-\lambda + 1 + \cfrac{2}{-\lambda + 2 + \cfrac{3}{-\lambda + 3\text{etc.}}}}}$$

welcher Ausdruck aber, auch wenn der Zähler $= 0$ ist, daher noch nicht anzusehen ist zu verschwinden, weil es passieren kann, dass auch der Nenner verschwindet. Und dies passiert tatsächlich in unseren Formeln, welche wir untersuchen werden; für sie wird also sein

$$0 = -\lambda + \cfrac{1}{-\lambda + 1 + \cfrac{2}{-\lambda + 2 + \cfrac{3}{-\lambda + 3\text{etc.}}}}$$

wenn also welcher Kettenbruch bis hin zur vorgelegten Form S selbst fortgesetzt wird, wird daher der Wert von S gefunden werden können, was wir für die einzelnen Fälle zeigen werden.

§14 Es sei also $n = 2$, und die Form unseres rückwärts fortgesetzten Kettenbruches wird sein

$$-1 + \frac{1}{0 - S'},$$

welche also Null gleich gesetzt $S = 1$ geben wird, wie wir zuvor gefunden haben. Für den Fall $n = 3$ wird diese Gleichung entspringen:

$$= -2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{2}{0 + S}}$$

woher wird

$$2 = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{2}{S}}$$

und daher $S = \frac{4}{3}$ wie zuvor. Für den Fall $n = 4$ werden wir haben

$$0 = -3 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{2}{-1 + \cfrac{3}{0 + S}}}$$

woher $S = \frac{21}{13}$ wird. Aber diese Rechnung wird bequemer durchgeführt werden, wenn wir die zuvor eingeführten Buchstaben α, β, γ gebrauchen; dann wird nämlich $0 = -3 + \gamma$ sein. Es war aber

$$\alpha = \frac{3}{S}, \quad \beta = \frac{2}{-1 + \alpha}, \quad \gamma = \frac{1}{-2 + \beta}.$$

Hier wird also sein

$$\gamma = 3 \quad \text{und daher} \quad 3 = \frac{1}{-2 + \beta},$$

woher wird

$$\beta = \frac{7}{3} = \frac{2}{-1+\alpha}$$

und daher wird erschlossen

$$\alpha = \frac{13}{7} = \frac{3}{S},$$

und so wird schließlich $S = \frac{21}{13}$ sein. Diesen Kunstgriff wollen wir auch im Folgenden gebrauchen.

§15 Um diese Operationen für größere Zahlen n zu erleichtern, wollen wir aus den für die Buchstaben α, β, γ, δ etc. zuvor angenommenen Formeln die reziproken derivieren, mit welchen jeder beliebige Buchstabe durch den vorhergehenden definiert wird, welche je zwei Formeln wir in der folgenden Tabelle darbieten wollen:

Weil gilt,	wird sein
$\alpha = \frac{n-1}{S}$	$S = 0 + \frac{n-1}{\alpha}$
$\beta = \frac{n-2}{-1+\alpha}$	$\alpha = 1 + \frac{n-2}{\beta}$
$\gamma = \frac{n-3}{-2+\beta}$	$\beta = 2 + \frac{n-3}{\gamma}$
$\delta = \frac{n-4}{-3+\gamma}$	$\gamma = 3 + \frac{n-4}{\delta}$
$\varepsilon = \frac{n-5}{-4+\delta}$	$\delta = 4 + \frac{n-5}{\varepsilon}$

$$\zeta = \frac{n-6}{-5+\varepsilon} \qquad \varepsilon = 4 + \frac{n-6}{\zeta}$$

$$\zeta = 4 + \frac{n-7}{\eta}$$

§16 Nun wird es mit Hilfe dieser Tabelle leicht sein, alle Fälle zu entwickeln.

Und zuerst scheint freilich nach Nehmen von $n = 1$, in welchem Fall wird

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

$S = 0$ zu werden, obwohl wir dennoch oben angedeutet haben, dass $= \frac{1}{e-1}$ ist. Aber es sei sittsam angemerkt, dass diese Schlussfolgerung nicht gilt, wenn auch $\alpha = 0$ war, weil dann $S = 0 + \frac{0}{0}$ sein wird. Aber nichts spricht dagegen, dass $\frac{0}{0}$ ist, welche Ausnahme allein in diesem Fall Geltung hat.

Wir wollen also zu den übrigen Fällen voranschreiten; und nach Nehmen von $n = 2$, wo ist

$$S = \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \text{etc.}}}$$

weil hier β nicht $= 0$ ist, wird offenbar $\alpha = 1$ und daher $S = 1$ sein, wie wir schon zuvor gefunden haben.

Es sei nun $n = 3$ und daher

$$S = \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \text{etc.}}}}$$

es wird $\beta = 2$ sein, weil hier nicht $\gamma = 0$; indem also von da aus rückwärts gegangen wird, wird sein

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad S = \frac{4}{3}.$$

Nachdem weiter $n = 4$ genommen worden ist, in welchem Fall gelten wird

$$S = \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{6}{3 + \text{etc.}}}}$$

wird $\gamma = 3$ sein, woher die folgenden Werte entspringen:

$$\begin{aligned} \beta &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \\ \gamma &= 1 + \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{13}{7} \end{aligned}$$

und

$$S = \frac{21}{13}.$$

Es sei $n = 5$, in welchem Fall wird

$$S = \cfrac{5}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \cfrac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

dann wird $\delta = 4$ sein, woher die folgenden Werte entspringen:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}, \\
\beta &= 2 + \frac{2 \cdot 4}{13} = \frac{34}{13}, \\
\alpha &= 1 + \frac{3 \cdot 13}{34} = \frac{73}{34}
\end{aligned}$$

und

$$S = 0 + \frac{4 \cdot 34}{73} = \frac{136}{73}.$$

§17 Nun wollen wir weiter fortschreiten und $n = 6$ setzen, in welchem Fall sein wird

$$S = \cfrac{6}{1 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

und es wird $\varepsilon = 5$ sein, woher die folgenden Werte entspringen:

$$\begin{aligned}
\delta &= 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5},\\
\gamma &= 3 + \frac{2 \cdot 5}{21} = \frac{73}{21},\\
\beta &= 2 + \frac{3 \cdot 21}{73} = \frac{209}{73},\\
\alpha &= 1 + \frac{4 \cdot 73}{209} = \frac{501}{209},\\
S &= 0 + \frac{5 \cdot 209}{501} = \frac{1045}{501}.
\end{aligned}$$

§18 Es sei nun $n = 7$ und

$$S = \cfrac{7}{1 + \cfrac{8}{2 + \cfrac{9}{3 + \cfrac{10}{4 + \text{etc.}}}}}$$

es wird wird $\zeta = 6$ sein, woher die folgenden Werte entspringen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6},\\
\delta &= 4 + \frac{2 \cdot 6}{31} = \frac{136}{31},\\
\gamma &= 3 + \frac{3 \cdot 31}{136} = \frac{501}{136},\\
\beta &= 2 + \frac{4 \cdot 136}{501} = \frac{1546}{501},
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1 + \frac{5 \cdot 501}{1546} = \frac{4051}{1546},$$
$$S = 0 + \frac{6 \cdot 1546}{4051} = \frac{9276}{4051}.$$

§19 Es sei nun $n = 8$ und

$$S = \cfrac{8}{1 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{10}{3 + \text{etc.}}}}$$

dann wird $\eta = 7$ sein, woher die folgenden Werte entspringen:

$$\zeta = 6 + \frac{1}{7} = \frac{43}{7},$$
$$\eta = 5 + \frac{2 \cdot 7}{43} = \frac{229}{43},$$
$$\delta = 4 + \frac{3 \cdot 43}{229} = \frac{1045}{229},$$
$$\gamma = 3 + \frac{4 \cdot 229}{1045} = \frac{4051}{1045},$$
$$\beta = 2 + \frac{5 \cdot 1045}{4051} = \frac{13327}{4051},$$
$$\alpha = 1 + \frac{6 \cdot 4051}{13327} = \frac{37633}{13327},$$
$$S = 0 + \frac{7 \cdot 13327}{37633} = \frac{93289}{37633}.$$

§20 Wir wollen nun diese für den Buchstaben S gefundenen Werte strukturiert anordnen, damit deren Progression leichter betrachtet werden kann, welche wir also auf die folgende Weise darstellen wollen:

$$\begin{array}{ccccccccc} n & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \text{etc.} \\ S & 1 & \frac{4}{3} & \frac{21}{13} & \frac{136}{73} & \frac{1045}{501} & \frac{9276}{4051} & \frac{93289}{37633} & \text{etc.} \end{array}$$

Zwischen diesen Brüchen scheint aber auf den ersten Blick kein bestimmtes Gesetz zu herrschen; aber nachdem die Sache aufmerksamer betrachtet worden ist, lässt sich ohne Mühe ein Fortschreitungsgesetz beobachten. Wenn wir nämlich jeden beliebigen Zähler mit der Summe Zählers und des Nenners des vorhergehenden Bruches vergleichen, werden wir eine höchst bemerkenswerte Struktur entdecken, weil gilt

$$\begin{aligned} 4 &= 2\,(1+1) = 2\cdot 2, \\ 21 &= 3\,(4+3) = 3\cdot 7, \\ 136 &= 4\,(21+13) = 4\cdot 34, \\ 1045 &= 5\,(136+73) = 5\cdot 209, \\ 9276 &= 6(1045+501) = 6\cdot 1546, \\ 93289 &= 7(9276+4051) = 7\cdot 13327 \end{aligned}$$

etc.

Für die Nenner wird aber eine nicht unähnliche Relation beobachtet, weil jede beliebige Summe des vorhergehenden Zählers um ein gewisses Vielfaches des Nenners vermehrt ist, welche Struktur auf die folgende Weise ins Auge fallen wird:

$$\begin{aligned}
3 &= \quad 1+2\cdot \quad 1= \quad 1+ \quad 2,\\
13 &= \quad 4+3\cdot \quad 3= \quad 4+ \quad 9,\\
73 &= \quad 21+4\cdot \quad 13= \quad 21+ \quad 52,\\
501 &= \quad 136+5\cdot \quad 73= \quad 136+ \quad 365,\\
4051 &= 1045+6\cdot \quad 501=1045+ \quad 3006,\\
37633 &= 9276+7\cdot 4050=9276+28357
\end{aligned}$$

etc.

§21 Daher wird also, wenn für eine beliebige beliebige Zahl n dieser Bruch gefunden worden war

$$S = \frac{p}{q},$$

für die folgende Zahl, $n+1$, werden

$$S = \frac{n(p+q)}{p+nq},$$

mit Hilfe welcher Formel aus jedem beliebigen Fall der folgende um Vieles leichter aufgefunden werden können wird als mit der vorhergehenden Methode. So, weil für den Fall $n = 8$ dieser Wert gefunden worden ist

$$S = \frac{93289}{37633},$$

wir für den folgenden Fall $n = 9$ sein

$$S = \frac{8(93289 + 37633)}{93289 + 8 \cdot 37633} = \frac{1047376}{394353}.$$

Aber weil diese außergewöhnliche Regel bisher allein auf Induktion gestützt ist, werden wir einen Beweis von ihr im folgenden Abschnitt angeben. Bevor wir aber diesen Abschnitt verlassen, wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass die erste Spalte der gegebenen Tabelle (§ 15) uns eine neue vorzügliche Eigenschaft an die Hand gibt. Wenn wir nämlich anstelle der Buchstaben α, β, γ etc. nacheinander deren Werte einsetzen, werden wir für S einen neuen Kettenbruch erlangen, der sich so verhält:

$$S = \cfrac{n-1}{1+\cfrac{n-2}{2+\cfrac{n-3}{3+\cfrac{n-4}{4+\cfrac{n-5}{5+\text{etc.}}}}}}$$

welche Form immer abbricht, woher es der Mühe wert sein wird, diese Transformation im folgenden Lehrsatz noch einmal vor Augen geführt zu haben.

Lehrsatz

§22 Wenn galt

$$S = \cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}}}$$

wird auch immer gelten

$$S = \cfrac{n-1}{1+\cfrac{n-2}{2+\cfrac{n-3}{3+\cfrac{n-4}{4+\cfrac{n-5}{5+\text{etc.}}}}}}$$

wenn freilich n eine ganze positive positive Zahl war, nachdem die Einheit wegen des oben erwähnten Grundes ausgenommen worden ist.

Dritte Methode nach den Summen dieser Kettenbrüche zu suchen

§23 Wenn wir die Entwicklungen der zuvor behandelten Fälle betrachten, werden wir bemerken, dass in den für die Buchstaben α, β, γ etc. gegebenen Brüchen in umgekehrter Reihenfolge der Zähler jedes beliebigen den Nenner des folgenden gibt; deswegen wollen wir alle Terme der Reihe nach anordnen und so die ersten wie die zweiten und alle folgenden Differenzen darunter hinzufügen. So werden für den Fall $n = 3$ die Terme dieser Brüche, indem von der Einheit aus begonnen wird, die folgenden sein:

$$\begin{array}{lccccccc} & 1, & & 2, & & 3, & & 4, \\ \text{D.I} & & 1, & & 1, & & 1. & \end{array}$$

Auf die gleiche Weise werden wir für $n = 4$ diese Terme haben:

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1, & & 3, & & 7, & & 13, & & 21, \\ \text{D. I.} & & 2, & & 4, & & 6, & & 8, & \\ \text{D. II.} & & & 2, & & 2, & & 2, & & \end{array}$$

Der Fall $n = 5$ liefert hingegen das folgende Schema:

	1,	4,	13,	34,	73,	136,		
D. I	3,	9,	21,	29,	63,			
D. II	6,	12,	18,	24,				
D. III	6,	6,	6.					

Der Fall $n = 6$ gibt weiter das folgende Schema:

	1,	5,	21,	73,	209	501,	1045,
D. I.	4,	16,	52,	136,	292,	544,	
D. II.	12,	36,	84,	156,	252,		
D. III.	24,	48,	72,	96,			
D. IV.	24,	24,	24.				

Für den Fall $n = 7$ werden wir haben:

	1,	6,	31,	136,	501,	1546,	4051,	9176,
D. I.	5,	25,	105,	365,	1045,	2505,	5225,	
D. II.	20,	80,	260,	680,	1460,	2720,		
D. III.	60,	180,	420,	780,	1260,			
D. IV.	120,	240,	360,	480,				
D. V.	120,	120,	120,					

Schließlich gibt der Fall $n = 8$ das folgende Schema:

	1,	7,	43,	229,	1045,	4051,	13327,	37633,	93289,		
D. I	6,	36,	186,	816,	3006,	9276,	24306,	55656,			
D. II	30,	150,	630,	2190,	6270,	15030	31350,				
D. III	120,	480,	1560,	4080,	8760,	16320,					
D. IV	360,	1080,	2520,	4680,	7560,						
D. V	720,	1440,	2160,	2880,							
D. VI	720,	720,	720.								

§24 Die Betrachtung dieser Fälle gibt uns die folgenden Schlussfolgerungen an die Hand:

1°. Weil all diese Fälle schließlich zu konstanten Differenzen führen, lernen wir, dass all diese Reihen algebraisch sind, natürlich weil deren allgemeiner Term algebraisch dargeboten werden kann.

2°. Weiter sehen wir auch, dass die konstanten Differenzen eine hypergeometrische Progression festlegen, natürlich

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720 \quad \text{etc.}$$

3°. Es ist bekannt, dass sie allgemeinen Terme einer jeden Progression aus den ersten Termen der einzelnen Differenzen gebildet werden, welche sich also verhalten, wie die folgende Tabelle anzeigt:

$$
\begin{array}{llllllll}
n=2 & 1, & & & & & & \\
n=3 & 1, & 1, & & & & & \\
n=4 & 1, & 2, & 2, & & & & \\
n=5 & 1, & 3, & 6, & 6, & & & \\
n=6 & 1, & 4, & 12, & 24, & 24, & & \\
n=7 & 1, & 5, & 10, & 60, & 120, & 120, & \\
n=8 & 1, & 6, & 30, & 120, & 360, & 720, & 720.
\end{array}
$$

Es ist aber ersichtlich, dass diese letzte Reihe auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$1, \quad 6, \quad 6\cdot 5, \quad 6\cdot 5\cdot 4, \quad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3, \quad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2, \quad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

4°. Weil sich diese Progression auf den Fall $n = 8$ bezieht, lässt sich daher sicher folgern, dass Im Allgemeinen die ersten Terme so dieser Reihe selbst wie der Differenzen selbst diese Progression festlegen werden:

$$1, \quad n-2, \quad (n-2)(n-3), \quad (n-2)(n-3)(n-4) \quad \text{etc.}$$

5°. Des Weiteren ist es aber aus der Lehre der Progressionen bekannt, dass der allgemeine Term einer jeden Reihe aufgefunden wird, wenn, während der erste Term der Reihe selbst derselbe bleibt, der erste Term der ersten Differenzen mit x multipliziert wird, der erste der zweiten Differenzen hingegen mit $\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}$, der der dritten mit $\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ und so weiter, woher der allgemeine Term für unseren Fall auf diese Weise ausgedrückt werden wird:

$$1+(n-2)x+(n-2)(n-3)\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+(n-2)(n-3)(n-4)\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.},$$

woher nach Nehmen von $x = 1$ der zweite Term $n - 1$ entspringt; aber wenn anstelle von x die Zahlen 2, 3, 4 etc. genommen werden, wird der dritte, vierte, fünfte etc. Term entspringen. Es wird aber passend sein, diese für die einzelnen Fällen zu entwickeln.

§25 Wenn daher also $n = 2$ war, wird der allgemeine Term $= 1$ sein; aber wenn $n = 3$ ist, wird der allgemeine Term $1 + x$ sein. In diesem Fall war aber die Reihe selbst 1, 2, 3, 4; dort tritt es klar zu tage, dass nach Nehmen von $x = 3$ der letzte Term 4 hervorgeht, welcher durch den vorhergehenden Term dividiert den Wert von $S = \frac{4}{3}$ gibt. Es werde nun $n = 4$ genommen; und der allgemeine Term der Reihe 1, 3, 7, 13, 21 wird sein

$$= 1 + 3x + x(x-1) = 1 + x + xx,$$

woher nach Nehmen von $x = 4$ der letzte Term $= 21$ hervorgeht, welcher durch den vorhergehenden 13 dividiert $S = \frac{21}{13}$ gibt. Es sei nun $n = 5$; und der allgemeine Term der Progression 1, 4, 13, 34, 73, 136 wird dieser sein

$$1 + 3x + 3 \cdot 2 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

woher nach Nehmen von $x = 5$ der letzte Term 136 entspringt, welcher durch den vorletzten dividiert den Wert von S gibt. Auf die gleiche Weise wird nach Nehmen $n = 6$ der allgemeine Term der Reihe 1, 5, 21, 73, 209, 501, 1045 dieser sein

$$1 + 4x + 4 \cdot 3 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \frac{x(x-1)(x-2)(x-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

welcher für $x = 6$ gesetzt den letzten Term liefert, aber nach Setzen von $x = 5$ den vorletzten; von diesen liefert jener durch diesen dividiert S.

§26 Weil ja aber hier nur über den letzten und den vorletzten Term gehandelt wird, wollen wir die Form dieser Terme für den Fall $n = 6$ genauer betrachten. Nach Nehmen von $x = 5$ wird der vorletzte Term dieser sein

$$1 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

aber nach Nehmen von $x = 6$ wird man als letzten Term diesen haben

$$1 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

daher, wenn für diesen Fall $S = \frac{p}{q}$ gesetzt wird und die Nenner mit den ersten Faktoren verrechnet werden, sein wird

$$p = 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

Und auf dieselbe Weise wird sein

$$p = 1 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2.$$

wo es ersichtlich ist, dass die ersten Koeffizienten aus der vierten Potenz des Binoms entnommen worden sind.

§27 In allen Fällen werden wir also mit glücklichstem Erfolg die Binomialkoeffizienten gebrauchen können und, weil ja für den allgemeinen Wert n die Koeffizienten aus der Potenz $n - 2$ zu entnehmen sind, wird es förderlich sein zu erinnern, dass ich einst diese Koeffizienten auf die folgende Weise ausgedrückt habe:

$$\left[\frac{n-2}{1}\right], \quad \left[\frac{n-2}{2}\right], \quad \left[\frac{n-2}{3}\right], \quad \left[\frac{n-2}{4}\right] \quad \text{etc.}$$

Wenn wir, wie bisher, $S = \frac{p}{q}$ setzen, wird sein

$$p = 1 + \left[\frac{n-2}{1}\right] n + \left[\frac{n-2}{2}\right] n(n-1) + \left[\frac{n-2}{1}\right] n(n-1)(n-2)$$
$$\left[\frac{n-2}{4}\right] n(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

und

$$q = 1 + \left[\frac{n-2}{1}\right](n-1) + \left[\frac{n-2}{2}\right](n-1)(n-2)$$
$$+ \left[\frac{n-2}{3}\right](n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

So, wenn $n = 7$ war, wird daher sein

$$p = 1 + 5 \cdot 7 + 10 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

und

$$q = 1 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2.$$

Solcher Ausdrücke werden also an jegliche Fälle leicht angepasst.

§28 Wenn daher nun diese für p und q gefundenen Formeln genauer betrachtet werden und mit dem folgenden Fall $n+1$ verglichen werden, für welchen $\frac{p'}{q'}$ sei und daher

$$p' = 1 + \left[\frac{n-1}{1}\right](n+1) + \left[\frac{n-1}{2}\right](n+1)n + \left[\frac{n-1}{3}\right](n+1)n(n-1) + \text{etc.}$$

und

$$q' = 1 + \left[\frac{n-1}{1}\right] n + \left[\frac{n-1}{2}\right] n(n-1) + \left[\frac{n-1}{3}\right] n(n-1)(n-2) + \text{etc.}$$

verglichen werden, wird daher ohne Mühe jene vorzügliche Relation abgeleitet werden können, welche wir schon zuvor [§ 21] erwähnt haben, natürlich, dass immer gilt

$$p' = np + nq$$

und

$$q' = \ p + nq,$$

welche Eigenschaft umso bemerkenswerter ist, weil mit ihrer Hilfe sehr leicht aus jedem beliebigen Fall der folgende deriviert werden kann, wie schon im vorhergehenden Artikel gezeigt worden ist.