Über nicht in derselben Ebene gelegene gekrümmte Linien, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind *

Leonhard Euler

§1 Was bisher über die sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuenden gekrümmten Linien angegeben worden ist, bezieht sich nur auf gekrümmete Linien solcher Art, die in derselben Ebene beschrieben werden können, deren Beschaffenheit darin gelegen ist, dass die das Maximum oder Minimum involvierende Integralformel nur zwei variable Größen umfasst, zwischen welchen die Relation ausfindig gemacht werden muss, mit welcher der Wert dieser Formel maximal oder minimal wird, wenn welches auf gekrümmte Linien übertragen wird, müssen sie so beschaffen sein, dass deren Natur durch eine Gleichung zwischen zwei Koordinaten ausgedrückt wird; daher ist es ersichtlich, dass diese Bedingung nur über derselben Ebene beschriebenen gekrümmten Linien zufallen kann.

§2 Wenn aber die Integralformel drei Variablen wie beispielsweise x, y und z involviert, weil sie ja nur einen bestimmten Wert erhalten kann, wenn zwei durch die dritte bestimmt werden, so dass so y wie z als Funktionen von x anzusehen sind, ist es, um das Maximum oder Minimum zu bestimmen,

*Originaltitel: "De lineis curvis non in eodem plano sitis, quae maximi minimive proprietate sunt praeditae", erstmals publiziert in „*Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg 4* 1813, pp. 18-42", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 25, pp. 293 - 313 ", Eneström-Nummer E740, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" notwendig, dass so zwischen x und y wie zwischen x und z eine entsprechende Relation ermittelt wird; daher, wenn jene drei Variablen x, y und z als Koordinaten angesehen werden, entsteht daher eine nicht in derselben Kurve gelegene Kurve, deren Bestimmung natürlich zwei Gleichungen erfordert, von welchen die eine die Relation zwischen x und y die andere hingegen die zwischen x und z ausdrückt.

§3 Um all dies deutlicher vor Augen zu führen, wollen wir (Fig. 1) drei einander normale Achsen AO, OB und OC auffassen, von welchen die zwei ersten zwei auf die Grundebene fallen, die dritte OC hingegen zu dieser normal ist. Wenn daher nun z irgendein Punkt der gesuchten Kurve war, pflegen wir seinen Ort durch drei jenen Achsen parallele Koordinaten anzugeben, welche $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ seien.

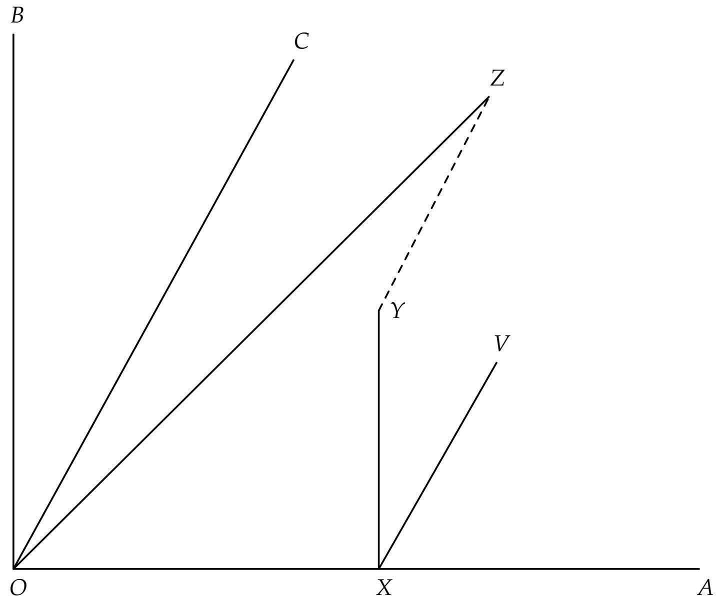

Fig. 1

Daher ist es, um diesen Ort zu erkennen, für jede beliebige Abszisse $OX = x$ notwendig, dass so die Ordinate $XY = y$ wie auch die andere $YZ = z$ dargeboten werden können, wofür also zwei Relationen von Nöten sind, oder es werden dafür zwei Gleichungen verlangt, aus denen so y wie z durch die dritte x bestimmt werden können; dort ist es per se klar, dass mit der Gleichung zwischen x und y die Natur der Projektion der gesuchten

Kurve AOB ausgedrückt wird, mit der anderen Gleichung zwischen x und z hingegen, nachdem die XV parallele und YZ gleiche Gerade gezogen worden ist, die Projektion derselben Kurve in der Ebene AOC dargeboten wird. Auf die gleiche Weise, wenn daher eine Gleichung zwischen y und z gefunden wird, wird die Natur der Projektion in die Ebene BOC bestimmt werden. Es reicht aber, um die Kurve zu bestimmen, aus, nur zwei Projektionen zu kennen, weil ja mit diesen die dritte Projektion schon bestimmt wird.

§4 Wenn daher nun eine Kurve solcher Art verlangt wird, in welcher die Integralformel $\int Vdx$ einen maximalen oder minimalen Wert erhalten soll, wo V irgendeine Funktion nicht nur der drei Variablen x, y und z ist, sondern auch deren Differentiale irgendeiner Ordnung involviert und vielleicht auch neue Integralformeln umfasst, sind, um dies zu erledigen, zwei Gleichungen von Nöten, aus welchen es möglich ist, so den Wert von y wie von z durch x zu bestimmen; wenn dies geleistet werden können wird, werden zugleich die beiden gerade erwähnten Projektionen der gesuchten Kurve bekannt werden.

§5 Um also bei dieser Aufgabe auf die gleiche Weise vorzugehen wie ich es einst bei nur zwei Variablen umfassenden Formeln getan habe, wollen wir zuerst für die Variable y und ihre Differentiale $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ etc. setzen. Und auf die gleiche Weise wollen wir für die Differentiale von z $dz = p'dx$, $dp' = q'dx$, $dq' = r'$ etc. festlegen, aber von den Integralformeln, die unter Umständen in der Größe V enthalten sein könnten, wollen wir den Geist hingegen lösen, so dass die Größe V nun als Funktion all dieser Größen angesehen werden kann: x, y, z, p, p', q, q', r, r' etc., woher man nach auf gewohnte Weise durchgeführter Differentiation eine solche Form haben wird

$$\begin{aligned} dV = Mdx + Ndy &+ Pdp \;\; + Qdq \;\; + Rdr \;\; + \text{etc.} \\ + N'dz &+ P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{etc.} \end{aligned}$$

§6 Nachdem diese Form im Allgemeinen festgelegt worden ist, geht die ganze Aufgabe nun darauf zurück, dass daher die zwei aus den Buchstaben M, N, N', P, P', Q, Q' etc. zu bildende Gleichungen gefunden werden, aus welchen darauf folgend die Natur der gesuchten Kurve durch die zwei erwähnten Projektionen definiert werden können. Hier muss sich aber vor Allem daran erinnert werden, dass in den Fällen, in denen die Variable z vollkommn fehlt, welche ich schon einst sehr umfassend untersucht habe, die Natur der Genüge leistenden Kurven immer mit dieser Gleichung ausgedrückt wird:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0.$$

Daher ist es offenbar, wenn die Variable y nicht vorhanden wäre und die Integralformel $\int Vdx$ nur die Variablen x und z involvierte, dass die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein wird:

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.} = 0.$$

§7 Weil ja aber im gegenwärtigen Fall zwei Relationen ausfindig zu machen sind, von den die eine zwischen x und y, die andere hingegen zwischen x und z besteht, wird die ganze Frage auf den gegenwärtigen Fall zurückgeführt werden können. Zuerst wird es nämlich möglich sein, die eine Projektion zwischen x und z der gesuchten Kurve als gegeben zu betrachten, als wäre ihre Natur tatsächlich schon bekannt, so dass nur die andere Relation zwischen x und y ausfindig zu machen ist, was schon durch die gewöhnliche Methode leicht erledigt werden können wird. Weil nämlich nun z als gewisse Funktion von x angesehen werden kann, werden auch die daher derivierten Größen als solche Funktionen angesehen werden können, woher im für dV angenommenen Differentialwert all diese Terme:

$$N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{etc.}$$

schon im Glied Mdx enthalten zu sein anzusehen sein werden; daher, weil der Buchstabe M nicht in die entgültige Gleichung eingeht, wird die Gleichung zwischen x und y mit dieser Gleichung ausgedrückt werden:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0.$$

§8 Wenn wir daher nun auf die gleiche Weise den Wert von y betrachten als wäre er bekannt, so dass so y wie p, q, r als bekannte Funktionen von x betrachtet werden können, werden diese Terme: $Ndy + Pdp + Qdq + Rdr$ zur Form Mdx hinzuzukommen anzusehen sein und so wird die Gleichung zwischen z und x mit dieser Gleichung definiert werden:

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.} = 0.$$

§9 Aus diesen verbunden folgt offenbar, wenn keine der beiden dieser Gleichungen als bekannt angesehen werden kann, sondern jeder der beiden definiert werden muss, dass dem Gefragten durch Verbinden dieser zwei Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} &= 0, \\ \text{II.} \quad N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} &= 0, \end{aligned}$$

und diese Lösung tritt sogar klar zu tage, zu wie vielen Graden auch immer die in der Formel V enthaltenen Differentiale ansteigen.

§10 Weil aber die Lösungen solcher höhere Differentiale verwickelnder Probleme meistens allzu schwer werden und sogar meistens vollkommen unbehandelbar werden, werden wir hier nur einfachere Fälle, in denen die Differentiale in der Formel V nicht weiter als bis hin zum ersten Grad aufsteigen, aufmerksamer betrachten, welche aus aus diesen zwei Gleichung zu entnehmen sein werden:

$$\text{I.} \quad Ndx = dP \quad \text{und} \quad \text{II.} \quad N' = dP'.$$

§11 Obwohl aber diese zwei Gleichungen die ganze Aufgabe zu lösen anzusehen sind, wird es dennoch meistens überaus zuträglich sein, diesen noch eine dritte Gleichung, die freilich in diesen schon enthalten ist, hinzuzufügen, welche natürlich sehr hilfreich sein wird, um die Rechnung zu vereinfachen. Weil wir nämlich $dy = pdx$ und $dz = p'dx$ gesetzt haben, finden wir aus jenen zwei Gleichungen:

$$1^\circ. \quad Ndy = pdP \quad \text{und} \quad 2^\circ. \quad N'dz = p'dP\prime,$$

welche Werte, in der allgemeinen Differentialformel:

$$dV = Mdx + Ndy + N'dz + Pdp + P'dp'$$

eingesetzt, diese Form hervorbringen werden:

$$dV = Mdx + pdP + Pdp + p'dP' + P'dp'$$

oder

$$dV = Mdx + d(pP + p'P').$$

Daher wird also, wenn wir der Kürze wegen $V - Pp - P'p' = S$ setzen, diese Gleichung entspringen: $Mdx = dS$, welche mit den zwei vorhergehenden $Ndx = dP$ und $N'dx = dP'$ angenehm verbunden werden können wird. Dennoch ist es indes sorgsam zu bemerken, dass jede beliebige dieser drei Gleichungen schon in den zwei übrigen enthalten ist und daher weggelassen werden kann, wenn es nicht sehr oft einen immensen Nutzen beim Entwickeln der Rechnung verschaffen würde. Nachdem diese Dinge angemerkt worden sind, wollen wir diesen völlig neuen Gegenstand mit einigen Beispielen illustrieren.

PROBLEM 1

Die in diesen drei Koordinaten x, y und z enthaltene gekrümmte Linie ausfindig zu machen, in welcher diese Integralformel: $\int \frac{xdydz}{dx}$ einen maximalen oder minimalen Wert erhält.

LÖSUNG

§12 Weil also $dy = pdx$ und $dz = p'dx$ ist, an dessen Stelle wir der Gefälligkeit wegen $dz = q$ schreiben wollen, weil ja dieser Buchstabe p in der ersten Bedeutung hier nicht weiter auftaucht, wird unsere Integralformel $\int pqxdx$ sein, so dass $V = pqx$ ist und daher durch Differenzieren wird

$$dV = pqdx + qxdp + pxdq,$$

woher wir nach Anstellen eines Vergleiches haben werden

$$M = pq, \quad N = 0, \quad N' = 0, \quad P = qx \quad \text{und} \quad P' = px,$$

und daher wird $S = -pqx$ werden, weswegen unsere drei Gleichungen diese sein werden;

$$1^\circ.\quad pqdx = -d\cdot pqx,\quad 2^\circ\quad 0 = d\cdot qx\quad \text{und}\quad 3^\circ\quad 0 = d\cdot px.$$

§13 Aus diesen zwei letzten Gleichungen wird $qx = a$ und $px = b$, woher die ganze Frage schon von selbst aufgelöst wird. Weil nämlich daher $\frac{q}{p} = \frac{a}{b} = n$ ist, wird $q = np$ sein, und nun werden auch alle übrigen Dinge leicht durch die Variable p definiert werden können, während $n = \frac{a}{b}$ ist. Weil nämlich $x = \frac{b}{p}$ ist, wird $dx = -\frac{bdp}{pp}$ sein und daher

$$pdx = dx = -\frac{bdp}{p}\quad \text{und}\quad qdx = dz = -\frac{nbdp}{p},$$

woher durch Integrieren wird

$$y = f - b\log p\quad \text{und}\quad z = g - nb\log p.$$

Deshalb, weil $p = \frac{b}{x}$ ist, wird die Variable y auf die folgende Weise ausgedrückt werden: $y = f - b\log b + b\log x$ oder nach Verändern der Konstanten: $y = f + b\log x$, dann wird aber $z = g + nb\log x$.

§14 Daher tritt es also klar zu tage, dass jede beiden Projektionen der gesuchten Kurven eine logarithmische Kurve ist; dort wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass in diesen Bestimmungen die vier beliebigen Konstanten f, g, n und b enthalten sind, so wie es die vollständige Lösung erfordert, weil freilich jede der beiden anfänglichen Gleichungen offenbar zweite Differentiale umfasst und es daher notwendig ist, dass jedes der beiden vollständigen Integrale zwei beliebige Konstanten enthält.

§15 Weil des Weiteren die Relation zwischen y und z so ausgedrückt wird: $z = ny + c$, wird die Projektion der gefundenen Kurve auf die Ebene BOC eine gerade Linie sein; daher tritt es klar zu tage, dass unsere ganze Kurve auf ein und derselben Ebene liegt und daher nicht eigens zum gegenwärtigen Fall gerechnet werden kann. Dennoch wird indes unsere Methode auch daher nicht unwesentlich illustriert, weil sie aufzeigt, wann immer die gefundene Kurve in derselben Ebene beschrieben werden kann.

PROBLEM 2

Die in den drei Koordinaten x, y und z enthaltene gekrümmte Line zu finden, in welcher diese Integralformel:

$$\int \frac{(y+z)dydz}{dx}$$

einen maximalen oder minimalen erhält.

LÖSUNG

Nachdem hier $dy = pdx$ und $dz = p'dx = qdx$ gesetzt worden ist, wird $V = pq(y+z)$ sein, und daher durch Differenzieren:

$$dV = pqdy + pqdz + (y+z)qdp + (y+z)pdq.$$

Daher werden wir nach Anstellen eines Vergleiches mit der allgemeinen Formel

$$DV = Mdx + Ndy + N'dz + Pdp + P'dp'$$

$M = 0$, $N = pq$, $N' = pq$, $P = (y+z)q$ und $P' = (y+z)p$ haben; daher wird also $S = V - Pp - P'q = -pq(y+z)$ werden. Aus diesen werden unsere drei Gleichungen sein:

$$\begin{aligned} 1°. \quad 0 &= -d \cdot pq \cdot (y+z), \\ 2°. \quad pqdx &= d \cdot (y+z)q \\ 3°. \quad pqdx &= d \cdot (y+z)p. \end{aligned}$$

Die erste liefert sofort $pq(y+z) = a$, so dass $y+z = \frac{a}{pq}$ ist, welcher Wert in den übrigen eingesetzt gibt:

$$1°. \quad pqdx = d \cdot \frac{a}{p} = -\frac{adp}{pp}, \quad 2°. \quad pqdx = d \cdot \frac{a}{q} = -\frac{adq}{qq}.$$

Daher folgt, dass $\frac{dp}{pp} = \frac{dq}{qq}$ sein wird; als logische Konsequenz ist $-\frac{1}{p} = -\frac{1}{q} - b$ oder $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + b$, woher wir $q = \frac{cp}{c+p}$ finden. Und so wird die erste Gleichung $y+z = \frac{a(c+p)}{cpp}$, die übrigen geben hingegen

$$pqdx = -\frac{adp}{pp} \quad \text{und daher} \quad dx = -\frac{a(c+p)dp}{cp^4},$$

deren Integral liefert

$$x = \frac{a}{3p^3} + \frac{a}{2cpp} + f.$$

§17 Des Weiteren wird wegen $dy = pdx$ nun $dy = -\frac{a(c+p)dp}{cp^3}$ sein, deren Integral liefert

$$y = \frac{a}{2pp} + \frac{a}{cp} + g.$$

Für die dritte Koordinate z, weil wir ja schon gesehen haben, dass $y + z = \frac{a(c+p)}{cpp}$ ist, wird nun sein

$$z = \frac{a - 2gpp}{2pp} = \frac{a}{2pp} - g.$$

Hier sind also wiederum vier beliebige Konstanten eingeführt worden; daher wird eingesehen wird, dass diese Lösung vollständig ist.

§18 Hier haben wir freilich alle drei Koordinaten x, y und z durch dieselbe Variable p ausgedrückt gegeben, was für die Konstruktion der Kurve denselben Nutzen mit sich bringt, weil ja für die einzelnen anstelle von p angenommenen Werte ebenso viele Punkte der Kurve definiert werden; daher wird es nicht schwer eingesehen, dass diese ganze Kurve nicht in derselben Ebene gelegen ist, deshalb weil aus diesen drei Formeln durch Finden von p keine solche Gleichung: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ gebildet werden kann. Der Buchstabe p wird sich aber auf die folgende Weise eliminieren lassen. Weil nämlich $y - z = \frac{a}{cp} + 2g$ ist, wird sein

$$p = \frac{a}{c(y - z - 2g)},$$

welcher Wert in der ersten Gleichung eingesetzt eine Gleichung zwischen x, y und z hervorbringen wird, welcher die hinzugefügt werden können wird, die aus der dritten $z + g = \frac{a}{2pp}$ entspringt, woher wird:

$$2a(z + g) = cc(y - z - 2g)^2.$$

Aber diese Formeln tragen nichts dazu bei, um die Kurve zu beschreiben. Im Übrigen ist es ersichtlich, dass diese Kurve algebraisch ist, anders als die Kurve, die im vorhergehenden Problem gefunden worden war.

PROBLEM 3

Die in diesen drei Koordinaten x, y und z enthaltene gekrümmte Linie zu finden, in welcher diese Integralformel:

$$\int X\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

einen maximalen oder minimalen Wert annimmt, während X irgendeine Funktion von x ist.

LÖSUNG

§19 Hier wird also wegen $dy = pdx$ und $dz = qdx$ sein

$$V = X\sqrt{1+pp+qq},$$

wo wir der Kürze wegen $\sqrt{1+pp+qq} = s$ setzen wollen, so dass $V = Xs$ ist. Weil also die Buchstaben y und z nicht enthalten sind, wird so $N = 0$ wie $N' = 0$ sein; des Weiteren wird wegen $ds = \frac{pdp+qdq}{s}$ $P = \frac{Xp}{s}$ und $P' = \frac{Xq}{s}$ sein, woher die zwei die Lösungen enthaltenden Gleichungen $dP = 0$ und $dP' = 0$ sein werden, und so werden wir $\frac{Xp}{s} = a$ und $\frac{Xq}{s} = b = na$ haben.

§20 Daher tritt es also sofort klar zu tage, dass $\frac{q}{p} = n$ oder $q = np$ sein wird, und daher weiter $dz = ndy$ und durch Integrieren $z = ny + c$, so dass die Projektion auf die Ebene BOC eine gerade Linie ist und daher die ganze gesuchte Kurve in einer gewissen Ebene liegt. Des Weiteren, weil $s = \sqrt{1+(nn+1)pp}$ ist, wird aber sein

$$Xp = a\sqrt{1+(nn+1)pp};$$

daher, nachdem der Kürze wegen $nn+1 = m$ gesetzt worden ist, erschließen wir $p = \frac{a}{\sqrt{X^2-aamm}}$. Und so werden wir für jede der beiden gesuchten Projektionen diese Differentialgleichungen haben:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{X^2 - mmaa}} \quad \text{und} \quad dz = \frac{nadx}{\sqrt{X^2 - mmaa}}.$$

§21 Hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, weil $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ das Kurvenelemet ausdrückt, dass die Kurve im Fall $X = x$ eine *Kettenlinie* sein wird, weil freilich ihr Schwerpunkt den untersten Platz unter allen anderen isoperimetrischen einnimmt; aber, wenn $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$ war, so dass gilt

$$dy = \frac{adx\sqrt{x}}{\sqrt{1 - mmaax}} \quad \text{und} \quad dz = \frac{nadx\sqrt{x}}{\sqrt{1 - mmaax}},$$

es ist hingegen offenbar, dass die gefundene Kurve eine *Brachystochrone* ist.

PROBLEM 4

Die durch die drei Koordinaten x, y und z zu bestimmende gekrümmte Linie zu finden, in welcher diese Integralformel:

$$\int \sqrt{(xx + yy + zz)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

einen maximalen oder minimalen Wert Wert annimmt.

LÖSUNG

§22 Wir wollen der Kürze wegen $\sqrt{xx + yy + zz} = v$ und $\sqrt{1 + pp + qq} = s$ setzen, so dass unsere Integralformel $\int Vdx$ wird, während $V = vs$ und daher $dV = sdv + vds$ ist; aber es wird hingegen sein

$$dv = \frac{xdx + ydy + zdz}{v} \quad \text{und} \quad ds = \frac{pdp + qdq}{s},$$

woher es folgt, dass sein wird

$$M = \frac{sx}{v}, \quad N = \frac{sy}{v}, \quad N' = \frac{sz}{v}, \quad P = \frac{yp}{s}, \quad P' = \frac{vq}{s}.$$

§23 Daher werden also, weil wird:

$$S = V - Pp - P'q = \frac{v(ss - pp - qq)}{s} = \frac{v}{s},$$

unsere drei Gleichungen sein:

$$\text{I.} \quad \frac{sxdx}{v} = d \cdot \frac{v}{s}, \quad \text{II.} \quad \frac{sydx}{v} = d \cdot \frac{vp}{s} \quad \text{und} \quad \text{III.} \quad \frac{szdx}{v} = d \cdot \frac{vq}{s}.$$

Aus diesen muss die Lösung unseres Problems gefunden werden, was sehr viel Geschicklichkeit und außerordentliche Rechenkunstgriffe erfordert.

§24 Weil also gilt

$$d \cdot \frac{pv}{s} = \frac{vdp}{s} + p \cdot d \cdot \frac{v}{s} \quad \text{und} \quad d \cdot \frac{qv}{s} = \frac{vdq}{s} + q \cdot d \cdot \frac{v}{s},$$

wird die Lösung wegen $d \cdot \frac{v}{s} = \frac{sxdx}{v}$ nach dieser Substitution zu diesen zwei Gleichungen geführt werden:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad (ydx - xdy) &= \frac{vvdp}{ss}, \\ \text{II.} \quad (zdx - zdz) &= \frac{vvdq}{ss}, \end{aligned}$$

weswegen wir sehen wollen, mit welchen Kunstgriffen wir daher die Integralformeln finden können, weil ja diese Gleichungen wegen $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dz}{dx}$ offenbar differentiale zweiten Grades sind.

§25 Die eine dieser Gleichungen gibt durch die andere dividiert

$$\frac{ydx - xdy}{zdx - xdz} = \frac{dp}{dq},$$

woher diese Gleichung entsprießt:

$$\frac{dp}{ydx - xdy} = \frac{dq}{zdx - xdz} \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{y - px} = \frac{dq}{z - qz}.$$

Wenn daher diese Gleichung nun so dargestellt wird:

$$-\frac{xdp}{y-px} = -\frac{xdq}{z-qx},$$

tritt es schnell klar zu tage, dass der Zähler in jedem der beiden Brüche das Differential des Nenners selbst ist und daher sein wird:

$$\log(y-px) = \log(z-qx) - \log n,$$

woher wir $z - qx = n(y - px)$ haben werden, so dass daher nun z durch die übrigen Buchstaben bestimmt wird.

§26 Dieser Wert werde nun anstelle von $z - qx$ in unserer Differentialgleichung eingesetzt und es wird $dq = ndp$ hervorgehen, als logische Konsequenz ist $q = np + a$, und daher wird weiter durch Integrieren $z = ny + ax + b$, welche Gleichung, weil die eine Dimensionen hat, aufzeigt, dass die ganze Kurve, die wir suchen, in einer bestimmten Ebene liegt.

§27 Hier ist es natürlich sittsam anzumerken, dass in der letzten gefundenen Gleichungen die hinzugefügte Konstante b schon durch die vorhergehenden Dinge bestimmt wird. Weil wir nämlich $z - qx = ny$ gefunden haben, wird wegen $q = np + a$ $z = ny + ax$ sein. Nun haben wir also

$$v = \sqrt{xx+yy+(ny+ax)^2} \quad \text{und} \quad s = \sqrt{1+pp+(np+a)^2},$$

so dass die Frage nun auf die nur zwei Variablen x und y zurückgeführt worden ist, wegen $p = \frac{dy}{dx}$, deren Relation aus der anderen der anfänglichen Gleichungen zu entnehmen ist:

$$ydx - xdy = \frac{vvdp}{ss},$$

welche nach Einsetzen der Werte für v und s in diese Form transformiert wird:

$$\frac{ydx-xdy}{xx+yy+(ny+ax)^2} = \frac{dp}{1+pp+(np+a)^2},$$

deren linke Seite nach Setzen von $y = ux$ diese Form annimmt:

$$-\frac{du}{1+uu+(nu+a)^2} = \frac{dp}{1+pp+(np+a)^2},$$

so dass wir eine separierte Differentialgleichung erlangt haben, von welcher die zwei Seiten sogar vollkommen gleich sind, so dass es ausreicht, nur die eine der beiden integriert zu haben.

§28 Wir wollen also mit der rechten Seite beginnen, welche entwickelt diese wird

$$\frac{dp}{1+aa+2anp+(nn+1)pp}$$

und welche wir so darstellen wollen:

$$\frac{1}{nn+1}\cdot\frac{dp}{pp+2\alpha p+\beta},$$

dass ist

$$\alpha=\frac{an}{1+nn}\quad\text{und}\quad\beta=\frac{1+aa}{1+nn},$$

wofür wir $p+\alpha=t$ oder $p=t-\alpha$ setzen wollen, und daher wird diese Seite werden

$$\frac{1}{1+nn}\cdot\frac{dt}{tt-\alpha\alpha+\beta},$$

deren Integral sein wird:

$$\frac{1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}\cdot\arctan\frac{t}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$$

oder

$$\frac{1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}\arctan\frac{p+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}.$$

Und auf dieselbe Weise, indem u anstelle von p geschrieben wird, ist das Integral der linken Seite

$$-\frac{1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}\arctan\frac{u+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}.$$

§29 Daher wird also das Integral unserer letzten Gleichung wegen der gemeinsamen Koeffizienten sein:

$$C - \arctan\frac{u+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}} = \arctan\frac{p+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}},$$

oder die Summe dieser zwei Bogen wird einer konstanten Größe gleich; als logische Konsequenz muss auch der Tangens der Summe dieser zwei Bogen konstant sein, welche ist:

$$\frac{(p+u+2\alpha)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}{\beta-2\alpha\alpha-\alpha(p+u)-pu} = C,$$

woher die Gleichung so dargestellt werden können wird:

$$pi + \alpha(p+u) + 2\alpha\alpha - \beta = C(p+u+2\alpha)$$

oder

$$pu - \beta = f(p+u+2\alpha).$$

Wenn wir hier daher anstelle von α und β wieder die angenommenen Werte einsetzen, welche diese waren

$$\alpha = \frac{an}{1+nn} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1+aa}{1+nn},$$

wird unsere Gleichung sein:

$$(1+nn)pu - aa - 1 = f((1+nn)(p+u) + 2an).$$

Dort ist es anzumerken, dass $u = \frac{y}{x}$ und $p = \frac{dy}{dx}$ ist, so dass die Gleichung noch eine differentiale ist. Weil wir, um sie zu integrieren, $y = ux$ und $dy = pdx$ gesetzt haben, wird $pdx = udx + xdu$ sein, woher $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$ erschlossen wird. Nun ist es aber möglich, aus der letzten gefundenen Gleichung den Wert von p durch u zu definieren, nach Finden von welchem die Differentialgleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$ separiert ist, deren Integration also keine Schwierigkeiten bereitet. Daher wird x also durch eine gewisse Funktion von $u = \frac{y}{x}$ ausgedrückt werden, welche also eine Gleichung zwischen x und y sein wird; aber für die Koordinate z haben wir hingegen schon gesehen, dass $z = ny + ax$ ist und so ist die bisher angegebene Lösung vollständig.

§30 Hier passiert es aber zum Vorteil, dass es sich algebraisch erledigen lässt. Weil nämlich $p = \frac{\beta + f(u+2\alpha)}{u-f}$ ist, wird nach der Substitution aufgefunden

$$\frac{dx}{x} = \frac{du(u-f)}{\beta + 2\alpha f + 2fu - uu},$$

deren Integral offenbar ist:

$$\log x = C - \frac{1}{2}\log(\beta + 2\alpha f + 3fu - uu),$$

woher nach einer Delogarithmierung sein wird

$$x\sqrt{\beta + 2\alpha f + 2fu - uu} = g.$$

Schließlich, wenn wir hier anstelle von u $\frac{y}{x}$ schreiben, geht diese Gleichung hervor:

$$\beta xx + 2\alpha f xx - 2fxy - yy = gg,$$

woher es also klar zu tage tritt, dass die Projektion ein Kegelschnitt ist. Und wenn wir hier $\frac{z-ax}{n}$ anstelle von y schreiben, wird eine Gleichung zwischen x und y für die andere Projektion erhalten, welche also auch die für einen Kegelschnitt sein wird. Daher wird also eingesehen, dass dieses Problem, welches sehr schwierig erschien, zu einer sehr einfachen Lösung geführt worden ist.

PROBLEM 5

Nach Setzen von $\sqrt{xx + yy + zz} = v$, wenn w irgendeine Funktion von v war, die durch die drei Koordinaten x, y und z zu definierende Kurve zu finden, in welcher diese Integralformel:

$$\int w\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

einen maximalen oder minimalen Wert erhlält.

LÖSUNG

§31 Nachdem also $dy = pdx$ und $dz = qdx$ sowie $\sqrt{1 + pp + qq} = s$ gesetzt worden ist, wird unsere Formel des Maximums $\int wsdx$ und daher $V = ws$ sein; dann wird aber nach Setzen $dw = w'dy$ wegen

$$dv = \frac{xdx + ydy + zdz}{v} \quad \text{und} \quad ds = \frac{pdp + qdq}{s}$$

sein

$$dV = s\omega' \frac{(xdx + ydy + zdz)}{v} + \frac{w(pdp + qdq)}{s}.$$

Daher werden wir also haben:

$$M = \frac{\omega' sx}{v}, \quad N' = \frac{w' sy}{v}, \quad N' = \frac{\omega' sz}{v}, \quad P = \frac{wp}{s}, \quad P' = \frac{wq}{s}.$$

Aus diesen wird weiter erschlossen:

$$S = \frac{w(ss - pp - qq)}{s} = \frac{w}{s}.$$

§32 Die drei Gleichungen, aus denen die Lösung entnommen werden muss, werden also sein:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad && \frac{w' sxdx}{v} = d \cdot \frac{w}{s}, \\ &\text{II.} \quad && \frac{w' sydx}{v} = d \cdot \frac{wp}{s}, \\ &\text{III.} \quad && \frac{w' szdx}{v} = d \cdot \frac{wq}{s} \end{aligned}$$

Daher, weil gilt:

$$d \cdot \frac{wp}{s} = \frac{wdp}{s} + p \cdot d \cdot \frac{w}{s} \quad \text{und} \quad d \cdot \frac{wq}{s} = \frac{wdq}{s} + q \cdot d \cdot \frac{w}{s},$$

wenn hier anstelle von $d \cdot \frac{w}{s}$ sein Wert aus der ersten Gleichung $\frac{w' sxdx}{v}$ geschrieben wird, werden wir die zwei folgenden Gleichungen erlangen:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad && \frac{w' s}{v}(ydx - xdy) = \frac{wdp}{s}, \\ &\text{II.} \quad && \frac{w' s}{v}(zdx - xdz) = \frac{wdq}{s}, \end{aligned}$$

welche in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\text{I.} \quad \frac{ydx - xdy}{vv} = \frac{wdp}{w'vss}$$

und

$$\text{II.} \quad \frac{zdx - xdz}{vv} = \frac{wdq}{w'vss},$$

und diese sind die zwei Gleichungen, aus welchen wir die verlangte Lösung derivieren müssen.

§33 Zuerst wollen wir also die eine dieser Gleichungen durch die andere dividieren und wird werden haben

$$\frac{zdx - xdz}{ydx - xdy} = \frac{dq}{dp},$$

woher wir wegen $dy = pdx$ und $dz = qdx$ diese Gleichung ableiten:

$$\frac{dq}{z - qx} = \frac{dp}{y - px},$$

so dass ist

$$-\frac{xdq}{z - qx} = -\frac{xdp}{y - px};$$

dort, weil die Zähler die Differentiale der Nenner sind, liefert die Integration sofort

$$z - qx = m(y - px).$$

Nachdem dieser Wert eingesetzt worden ist, liefert jene Differentialgleichung $dq = mdp$ und daher wird durch Integrieren $q = mp + n$ sein, welcher Wert in jener integrierten eingesetzt $z = my + nx$ liefert, welche, weil die Koordinaten nur eine einzige Dimension enthalten, anzeigt, dass die ganze Genüge leistende Kurve in derselben Ebene gelegen ist. Daher werden wir also aus unseren anfänglichen Gleichungen die zwei Größen z und q finden können, woher werden wird

$$vv = xx + yy + (my + nx)^2$$

und

$$ss \ = 1 \quad + pp + (mp + n)^2,$$

und so wird nur eine einzige zu lösende Gleichung zurückbleiben, natürlich:

$$\frac{ydx - xdy}{vv} = \frac{wdp}{w'vss},$$

in welcher wir vor Allem $y = ux$ setzen wollen, dass sie in diese Form überführt wird:

$$-\frac{du}{1 + uu + (mu + n)^2} = \frac{wdp}{w'v(1 + pp + (mp + n)^2)},$$

welche, nachdem der Kürze wehen $\frac{w}{w'v} = r$ gesetzt worden ist, so dargestellt werde:

$$\frac{du}{1 + uu + (mu + n)^2} + \frac{rdp}{1 + pp + (mp + n)^2} = 0,$$

in welcher also zwei einander vollkommen gleiche Differentialformeln enthalten sind.

§34 Es ist aber ersichtlich, dass die Integration jeder der beiden Seiten, nachdem natürlich der Buchstabe r weggelassen worden ist, auf einen gewissen Kreisbogen reduziert wird. Dieser Sache wegen wollen wir die Winkel selbst in die Rechung einführen, indem wir festlegen:

$$\frac{\gamma du}{1 + uu + (mu + n)^2} = d\varphi$$

und

$$\frac{\gamma dp}{1 + pp + (mp + n)^2} = d\psi.$$

Und so wird unsere Gleichung auf diese sehr einfache Form zurückgeführt werden: $d\varphi + rd\psi = 0$. Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, wie diese Gleichungen behandelt und integrierbar gemacht werden muss. Es ist aber ersichtlich, dass diese Gleichung Differentiale zweiten Grades involviert.

§35 Leicht wird es aber klar, dass der Winkel φ so beschaffen ist, dass sein Tangens mit einer solchen Form: $\alpha u + \beta$ ausgedrückt wird; daher, wenn wir $\tan \varphi = \alpha u + \beta$ setzen, wird sein

$$d\varphi = \frac{\alpha dp}{1 + (\alpha u + \beta)^2}.$$

Diese Form werde nun mit der vorgelegten verglichen, dass daher die Werte der Buchstaben α und β zusammen mit γ durch die Buchstaben m und n bestimmt werden, was geschehen wird, indem diese Gleichung:

$$\alpha(1 + uu + (mu + n)^2) = \gamma(1 + (\alpha u + \beta)^2),$$

zu einer identischen gemacht wird. Weil für dieses Ziel nach der Entwicklung die folgende Gleichung entspringt:

$$\alpha(mm + 1)uu + 2\alpha mnu + \alpha(nn + 1) = \alpha\alpha\gamma uu + 2\gamma\alpha\beta u + \gamma(\beta\beta + 1),$$

finden wir daher die folgenden drei Bestimmungen:

$$1^\circ. \quad \alpha\gamma = mm + 1, \quad 2^\circ. \quad \beta\gamma = mn, \quad 3^\circ. \quad \gamma(\beta\beta + 1) = \alpha(nn + 1),$$

aus deren erster $\alpha = \frac{mm+1}{\gamma}$ erschlossen wird, aus der zweiten wird $\beta = \frac{mn}{\gamma}$ erschlossen, welche Werte in der dritten eingesetzt $\gamma\gamma = mm + nn + 1$ und daher $\gamma = \sqrt{mm + nn + 1}$ geben und daraus dann schließlich

$$\alpha = \frac{mm + 1}{\sqrt{mm + nn + 1}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{mn}{\sqrt{mm + nn + 1}}.$$

§36 Nachdem wir also die Buchstaben α, β, γ durch m und n bestimmt haben, wird $\tan \varphi = \alpha u + \beta$ sein. Weil wir des Weiteren oben gefunden haben:

$$1 + uu + (mu + n)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}(1 + (\alpha u + \beta)^2),$$

wird, wenn wir anstelle von u wieder den Wert $\frac{y}{x}$ einsetzen, hervorgehen:

$$xx + yy + (my + nx)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}(xx + (\alpha\gamma + \beta x)^2),$$

wo das erste Glied der Wert von vv ist, woher also folgt, dass sein wird:

$$xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \frac{\alpha}{\gamma} vv = \frac{(mm+1)vv}{mm+nn+1}.$$

Außerdem werden wir aber haben

$$\tan\varphi = \frac{\alpha\gamma + \beta x}{x};$$

daher, wenn wir anstelle von

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mm+1}{mm+nn+1}$$

$\delta\delta$ schreiben, dass ist

$$xx + (\alpha\gamma + \beta x)^2 = \delta\delta vv,$$

wird sein

$$\sin\varphi = \frac{\alpha\gamma + \beta x}{\delta v} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\delta v}$$

und daher weiter:

$$\alpha\gamma + \beta x = \delta v \sin\varphi \quad \text{und} \quad x = \delta v \cos\varphi,$$

während $\delta = \sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}$ ist. Daher tritt es klar zu tage, wenn der Winkel φ nur durch v gegeben wäre, dass so x wie y durch dieselbe Größe v ausgedrückt sein werden und so das ganze Problem vollkommen gelöst sein wird.

§37 Auf die gleiche Weise, weil wir festgelegt haben

$$d\psi = \frac{\gamma dp}{1 + pp + (mp+n)^2},$$

wird hingegen auch $\tan\psi = \alpha p + \beta$ gesetzt werden können, wo die Buchstaben α, β, γ die vorigen Werte beibehalten werden; und es wird wie zuvor sein:

$$1 + (\alpha p + \beta)^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(1 + pp + (mp+n)^2) = \frac{\alpha}{\gamma} ss;$$

dann ist aber die anfängliche aufzulösende Gleichung: $d\varphi + rd\psi = 0$, während $r = \frac{w}{w'v}$ ist, so dass dann ist

$$d\psi + \frac{w'vd\psi}{w} = 0.$$

§38 Weil ja aber in den vorhergehenden Formeln die Buchstaben x und y noch enthalten sind, wird es für die Bestimmung der Relation zwischen v und φ zuträglich sein, sie aus der Rechnung auszuschließen, was am bequemsten mit Hilfe dieser Gleichungen geleistet werden wird

$$\alpha y + \beta x = \delta v \sin\varphi \quad \text{und} x = \delta v \cos\varphi,$$

welche differenziert diese liefern:

$$\alpha dy + \beta dx = \delta(dv \sin\varphi + vd\varphi \cos\varphi) \quad \text{und} \quad dx = \delta(dv\cos\varphi - vd\varphi \sin\varphi),$$

von welchen jene durch diese wegen $dy = pdx$ liefert:

$$\alpha p + \beta = \frac{dv \sin\varphi + vd\varphi\cos\varphi}{dv\cos\varphi - vd\varphi\sin\varphi}.$$

Wir haben aber gesehen, dass $\alpha p + \beta = \tan\psi$ ist, und daher wird nun sein:

$$\tan\psi = \frac{dv \sin\varphi + vd\varphi\cos\varphi}{dv\cos\varphi - vd\varphi\sin\varphi}.$$

§39 In der Auflösung dieser Gleichung besteht nun der wesentliche Kunstgriff. Wenn wir natürlich $vd\varphi = tdv$ setzen, dass diese Gleichung entsteht:

$$\tan\psi = \frac{\sin\varphi + t\cos\varphi}{\cos\varphi - t\sin\varphi} = \frac{\tan\varphi + t}{1 - t\tan\varphi},$$

drückt diese letzte Formel offenbar den Tangens der Summe der zweier Winkel aus, von denen der eine φ, der Tangens des anderen hingegen $= t$ ist, und so wird die Summe dieser Winkel dem Winkel ψ gleich werden, so dass nun $\psi = \varphi + \arctan t$ ist, welche Gleichung differenziert gibt

$$d\psi = d\varphi + \frac{dt}{1+tt},$$

welcher Wert in unserer anfänglichen Gleichung eingesetzt liefert

$$\frac{w'vd\varphi}{w} + d\varphi + \frac{dt}{1+tt} = 0,$$

womit wir freilich wenig zu gewinnen scheinen, weil ja diese Gleichung wegen $t = \frac{vd\varphi}{dv}$ noch Differentiale zweiten Grades involviert, und sogar die drei

Variablen v, φ und t verwickelt, welche sich freilich auf zwei zurückführen ließen, wenn wir anstelle von t den angenommenen Wert $\frac{vd\varphi}{dv}$ schreiben wollten, wonach wir aber auf eine höchst verworrene Gleichung stießen.

§40 Aber wir wollen, weil wir ja $\frac{vd\varphi}{dv} = t$ gesetzt haben, in der Tat eher den Wert $d\varphi = \frac{tdv}{v}$ annehmen, welcher in unsere Gleichung eingeführt liefert

$$\frac{w'tdv}{w} + \frac{tdv}{v} + \frac{dt}{1+tt} = 0,$$

und diese Gleichung nimmt durch t wegen $w'dv = dw$ diese wunderschöne Form an:

$$\frac{dw}{w} + \frac{dv}{v} + \frac{dt}{t(1+tt)} = 0,$$

deren Integration also nicht weiter Schwierigkeiten bereitet. Weil nämlich ist

$$\int \frac{dt}{t(1+tt)} = \log \frac{t}{\sqrt{1+tt}},$$

wird unsere Integralgleichung sein:

$$\frac{wvt}{\sqrt{1+tt}} = C,$$

und auf diese Weise haben wir schon eine einzige Integration absolviert, so dass uns nur eine noch zu behandeln übrig gelassen wird.

§41 Aus dieser Gleichung wollen wir nun den Wert von t finden, der aufgefunden wird als

$$= \frac{C}{\sqrt{wwvv - CC}},$$

woher, weil $t = \frac{vd\varphi}{dv}$ ist, wir erschließen, dass sein wird

$$d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{wwvv - CC}},$$

welches die entgültige die ganze Aufgabe lösende Gleichung ist. Weil nämlich w eine Funktion von v ist, wird daher der Winkel φ durch die Größe v ausgedrückt aufgefunden, welcher eine neue Konstante erhalten wird, so dass wir nun vier beliebige Konstanten in der Rechnung haben, natürlich außer dieser neuen diese drei C, m und n, weil ja, wie wir gesehen haben, war

$$\alpha = \frac{mm+1}{\sqrt{mm+nn+1}}, \quad \beta = \frac{mn}{\sqrt{mm+nn+1}}, \quad \gamma = \sqrt{mm+nn+1}, \quad \delta = \sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}.$$

Daher tritt es klar zu tage, dass unsere Lösung ganz und gar vollständig ist, deshalb weil wir am Anfang zu zwei Differentialgleichungen zweiten Grades geführt worden sind, deren vollständige Integrale notwendigerweise vier beliebige Konstanten erfordern.

§42 Nachdem aber der Winkel φ bestimmt worden ist, werden für jeden Wert des Buchstabens v die drei Koordinaten x, y und z am leichtesten durch die folgenden Formeln definiert werden:

$$\begin{aligned} &\text{I.} & x &= \delta v \cos\varphi, \\ &\text{II.} & \alpha y + \beta x &= \delta \sin\varphi, \\ &\text{III.} & z &= my + nx. \end{aligned}$$

Im Übrigen hätten wir sofort, als wir herausgefunden haben, dass die ganze Kurve in derselben Ebene gelegen ist, die Lösung um Vieles leichter angeben können. Denn die anfängliche Ebene AOB, deren Lage von unserem Belieben abhängt, hätte sich in der Ebene der Genüge leistenden Kurve annehmen lassen, woher wir sofort $z = 0$ und daher auch $q = 0$ gehabt hätten, auf welche Weise die ganze Frage auf nur zwei Variablen zurückgeführt worden wäre und mit der gemeinen Methode hätte aufgelöst werden können. Aber außerdem, weil unsere Lösung uns diese Eigenschaft selbst aufgezeigt hat, war es besonders der Mühe wert, jene vorzüglichen Kunstgriffe, welche die Lösung erfordert, genau zu entwickeln.

§43 Dennoch wäre es indes auch möglich gewesen, aus der Integralformel, welche ein Maximum oder Minimum sein muss, sofort zu schließen, dass die Genüge leistende Kurve in derselben Ebene sein muss, deshalb weil diese Integralformel es zulässt, auf nur zwei Variablen reduziert zu werden.

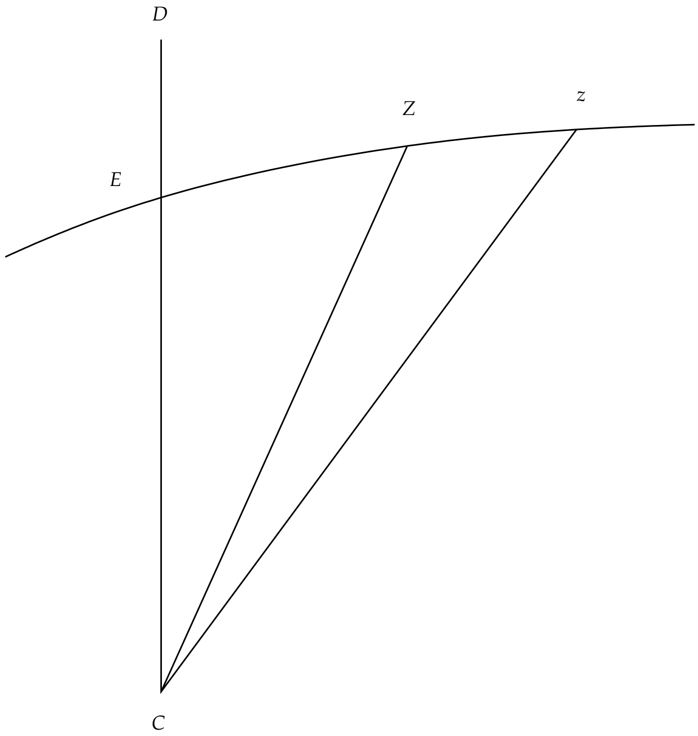

FIG. 2

Weil nämlich die Größe

$$v = \sqrt{xx + yy + zz}$$

in der Figur die Gerade OZ ausdrückt, von welcher also der Buchstabe w irgendeine Funktion bezeichnet, dann aber die Formel $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ das Kurvenelement selbst bezeichnet, involviert die vorgelegte Integralformel nur zwei Variablen, natürlich die Distanz $OZ = v$ und den Kurvenbogen, und daher hätte dieses Problem auf die folgende Weise vorgelegt und aufgelöst werden können, dass in der Ebene die um das Zentrum C zu beschreibende Kurve EZz (Fig. 2) gesucht wird, in welcher, nachdem die Distanz $CZ = z$ gesetzt worden ist, von welcher w irgendeine Funktion ist, diese Integralformel wds ein Maximum oder Minimum ist, während ds das Kurvenelement Zz bezeichnet.

§44 Um nun die Lösung möglichst weit zu vereinfachen und möglichst angenehm aus den gewöhnlichen isoperimetrischen Prinzipien ableiten zu können, wollen wir die Distanz CZ mit dem Buchstaben x bezeichnen, dann werde aber, nachdem die fixe Gerade CD festgelegt worden ist, der Winkel $DCZ = y$ gesetzt und das Kurvenelement wird $ds = \sqrt{dx^2 + xxdy^2}$ werden; und weil nun w irgendeine Funktion von x ist, wird die Integralformel, die ein Maximum oder Minimum sein muss, sein: $\int w\sqrt{dx^2 + xxdy^2}$, die nach Setzen von $dy = pdx$ diese Form annimmt: $\int wdx\sqrt{1+ppxx}$, so dass hier $V = w\sqrt{1+ppxx}$ ist. Nachdem also im Allgemeinen $dV = Mdx + Ndy + Pdp$ gesetzt worden ist, weil hier die Größe y hier nicht vorhanden ist, wird sein

$$N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{wx^2p}{\sqrt{1+ppxx}},$$

der Buchstabe M geht aber in die Rechnung überhaupt nicht ein, weil die Gleichung für die gesuchte Kurve $Ndx = dP$ oder $dP = 0$ ist, woher sofort folgt

$$P = \frac{wpxx}{\sqrt{1+ppxx}} = C,$$

welche Gleichung schon die Natur der Kurve aufzeigt.

§45 Aus dieser Gleichung finden wir aber $p = \frac{p}{x\sqrt{wwxx - CC}}$, und so wird wegen $p = \frac{dy}{dx}$ sein

$$dy = \int \frac{Cdx}{x\sqrt{wwxx - CC}},$$

welche Gleichung vollkommen mit der übereinstimmt, welche wir zuvor durch so große Umwege hindurch erlangt haben, wenn wir hier nur anstelle von x wieder v einsetzen; dann wird aber unser Winkel, hier y genannt, derselbe sein, den wir zuvor mit dem Buchstaben φ bezeichnet haben. Aus diesem Beispiel wird eingesehen, auf welche Weise oftmals an sich sehr schwere Probleme mit einer leichten Transformation sehr leicht lösbar gemacht werden können.