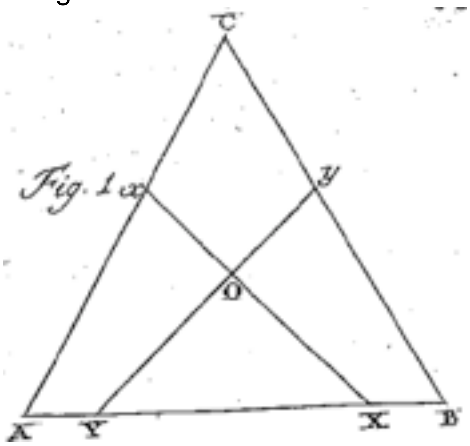
SOLUTION COMPLETE DU PROBLEME DE LA QUADRIPARTITION DU TRIANGLE PAR DEUX DROITES NORMALES ENTR'ELLES

PAR L'AUTEUR
L.EULER

Edité le 3 Mai 1779

1. Dans les éclaircissements à propos de ce remarquable problème, que j'ai proposés il y a peu, j'ai donné la règle sûre à l'aide de laquelle la quadripartition peut toujours être exécutée quel que soit le triangle proposé et qui, si nous considérons l'aspect pratique, suffit de toute façon. Mais que cette règle embrasse l'ensemble des quadripartitions, la question n'a pas été estimée suffisamment gênante tant il est vrai que je n'ai pas hésité à affirmer qu'aucune quadripartition ne pouvait être obtenue en dehors de celles que ma règle montrait.

Fig. 1



2. Par la suite cependant un cas se présenta qui infirmait fondamentalement cette assertion. C'était dans le triangle isocèle ABC où la tangente des angles A et B était égale à 16/9 et ces deux angles égaux à 60°38'32'', tels que le triangle diffère peu de l'équilatéral. Suivant la règle établie auparavant, l'un et l'autre des côtés AC ou BC devraient être admis comme les côtés où les deux droites sécantes tombent. Mais on constate que, dans ce cas, la base AB peut être admise pour un tel côté. En la divisant en six parties, si on prend AX = 5 et BY = 5, et qu'on construise sur XY le triangle isocèle rectangle XOY, non seulement son aire sera le quart de celle du triangle total, mais aussi les droites XO et YO étant prolongées en x et y, les triangles XAx et YBy sont égaux à la moitié du triangle total, de telle façon que l'aire totale du triangle est divisée en quatre parts égales ce qui se verra facilement si on veut faire le calcul.

3. Et comme cette quadripartition contredit la règle que j'ai donnée auparavant, il n'est pas douteux qu'il existe d'innombrables cas qui infirment cette règle. J'ai cependant ensuite observé que toutes ces exceptions sont comprises dans des limites étroites, telles que nous pouvons affirmer qu'elles ne sont pas aussi abondantes que celles de la règle rappelée. Il vaudra surtout la peine de conduire la solution de ce problème avec plus de soin, comme il arrive dans ces nombreux cas qui exigent une explication tout à fait spécifique, telle qu'il ne s'en présente pas d'habitude dans d'autres problèmes de géométrie.

4. Je vais maintenant aborder ce problème et, comme les deux droites sécantes se

trouvent nécessairement sur un seul côté du triangle*, soit AB ce côté et X,Y les points où les sécantes tombent. Nous appelons AB = c, AX = x, BY = y, l'intervalle XY = z et on a x + y = c + z. Ensuite soient les angles A = α et B = β et, pour le triangle XOY, soit l'angle YXO = ϕ; et il est nécessaire, pour que cet angle soit inférieur à un droit, que la somme $\alpha+\beta$ soi inférieure à deux droits. Enfin nous notons l'aire totale du triangle égale à k^2.

5. Ceci posé, dans le triangle XOY, les côtés sont XO = $z\cos\phi$ et YO = $z\sin\phi$,son aire sera donc $z^2\sin\phi\cos\phi$ / 2 et elle doit être égale à k^2 / 4, d'où $z^2 = k^2 /2\sin\phi\cos\phi = k^2 /\sin 2\phi$. Donc si, pour les calculs suivants, nous posons tgϕ = t, on aura:

$$\sin\phi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, z = k\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}.$$

6. Considérons maintenant le triangle AXx dont l'aire doit être k^2 /2 et comme l'angle AxX =180°-α-ϕ on a, pour les côtés, Ax= x $\sin\phi$ /sin($\alpha+\phi$) et Xx = x $\sin\alpha$ /sin($\alpha+\phi$) d'où l'aire du triangle AXx = $x^2\sin\alpha\sin\phi$ /2 sin($\alpha+\phi$) qui, égalée à k^2/2, 2 donne

x =k $\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\sin\alpha\sin\phi}}$ qui devient, si on pose cot α = a, x = k$\sqrt{a+\frac{1}{t}}$. Ensuite nous aurons

Ax = $\frac{k\sin\phi\sqrt{a+\frac{1}{t}}}{\sin(\alpha+\phi)}$ d'où Ax $\sin\alpha$ = $\frac{k}{\sqrt{a+\frac{1}{t}}}$ que j'ajoute parce que Ax doit être sûrement inférieur à AC. Ensuite on a Xx = $\frac{k\sin\alpha\sqrt{a+\frac{1}{t}}}{\sin(\alpha+\phi)}$ d'où Xx $\sin\phi$ = $\frac{k}{\sqrt{a+\frac{1}{t}}}$.

Et il faut noter qu'on doit avoir Xx > XO.

7. Nous traitons de la même manière le triangle BYy où on a By = y et l'angle ByY = 180°-β-90°+ ϕ = 90°-$\beta+\phi$; nous avons le côté By = y $\cos\phi$ /cos(β-ϕ) et Yy = y sin β/ cos(β-ϕ). Ensuite,l'aire du triangle k^2/2 devant être égale à $y^2\sin\beta\cos\phi$ /2 cos(β-ϕ), on aura $y^2 = k^2\cos(\beta-\phi)/\sin\beta\cos\phi$. Et ensuite, si nous posons cotβ*= b, on a, après calcul, y = k$\sqrt{b+t}$ et By = $\frac{k\cos\phi\sqrt{b+t}}{\cos(\beta-\phi)}$ et par conséquent, By $\sin\beta$ = $\frac{k}{\sqrt{b+t}}$ et il faut que By < BC. De plus on auraYy= $\frac{k\sin\beta\sqrt{b+t}}{\cos(\beta-\phi)}$ qui doit être plus grand que YO; et enfin on aura Yy $\cos\phi$ = $\frac{k}{\sqrt{b+t}}$.

8. Enfin nous considérons le triangle ABC et, comme AB = c et l'angle C = 180°- α-β

nous avons $k^2 = c^2 \sin\alpha \sin\beta / 2 \sin(\alpha + c)$ d'où $c = k\sqrt{\dfrac{2k\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$. Et, comme nous avons posé $\cot\alpha = a$ et $\cot\beta = b$, on aura $c = k\sqrt{2(a+b)}$ d'où AC $\sin\alpha$ = BC $\sin\beta$ $= k\dfrac{\sqrt{2(a+b)}}{a+b}$.

9. Ayant trouvé les quatre segments:

1) $AB = c = k\sqrt{2(a+b)}$ 3) $BY = y = k\sqrt{b+t}$

2) $AX = x = k\sqrt{a+\dfrac{1}{t}}$ 4) $XY = z = k\sqrt{\dfrac{1+t^2}{2t}}$

qui doivent être tels que $x + y = c + z$, nous obtenons, en divisant par k, l'équation:

$$\sqrt{a+\frac{1}{t}}+\sqrt{b+t}=\sqrt{2(a+b)}+\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$$

Et ici, il faut remarquer ce qui suit:

1) même si généralement, dans les calculs, les signes radicaux ont une double signification, ici il faut attribuer son signe à chaque terme;
2) l'examen de la figure montre qu'aussi bien x que y doivent être inférieurs à c; d'où ces deux conditions:

$$\sqrt{a+\frac{1}{t}}<\sqrt{2(a+b)} \quad \text{et} \quad \sqrt{b+t}<\sqrt{2(a+b)}$$

3) et il est aussi évident que tant x que y doivent être supérieurs à z, d'où:

$$\sqrt{a+\frac{1}{t}}>\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}} \quad \text{et} \quad \sqrt{b+t}>\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$$

10. Les considérations ci-dessus concordent parfaitement avec celles que j'ai exposées naguère dans les éclaircissements. Maintenant, nous cherchons la solution de l'équation trouvée d'une autre manière, afin que les premières conditions soient remplies pour lesquelles les deux premiers termes doivent être inférieurs au 3e ou, du moins, ne pas lui être supérieurs. Enfin nous posons le 4e terme = s d'où $2s^2 = t+1/t$, le 1er terme = ms, le 2e = ns, où les m et n sont des nombres >1 ou, du moins, pas inférieurs. D'où on aura $a = m^2s^2 - 1/t$, $b = n^2s^2 - t$ et $a + b = (m^2 + n^2 - 2)s^2$ et le 3e sera égal à $s\sqrt{2(m^2+n^2-2)}$.

11. En introduisant les m , n, et s, l'équation prend cette forme:

$$m + n = \sqrt{2(m^2+n^2-2)} + 1^*$$

par laquelle la relation entre met n est déterminée de telle manière que, si l'une est connue, l'autre s'en déduit. Après développement ,on aura: $(m-n)^2 + 2(m+n) = 5$; puis, en soustrayant 4n et en ajoutant 1, on obtient $(m-n)^2 + 2(m-n)+1 = 6 - 4n$. Après avoir extrait la racine, on arrive à $m = n - 1 + \sqrt{6-4n}$.

12. Ici il est évident que, pour ne pas calculer dans l'imaginaire, on doit avoir n < 3/2 et aussi que le signe du radical ne peut être négatif ce qui entraînerait m < 1. Ensuite, si n < 3/2, pour avoir m > 1 il faut $\sqrt{6-4n}$ > 2-n d'où n < $\sqrt{2}$, et il est évident que m et n doivent être compris entre les limites 1 et $\sqrt{2}$. Et si elles étaient égales, on aurait m = n = 5/4 et si l'une est supérieure à cette valeur, l'autre lui est inférieure. Et il est évident que, la limite supérieure étant $\sqrt{2}$ = 1,414136 et l'inférieure = 1, la valeur 5/4 = 1,25 est :à peu près au milieu entre ces limites.

13. Et, afin que ce soit plus clair, comme m et n dépendent l'une de l'autre, nous établissons la table suivante qui donne les valeurs rationnelles de m et n, exactes jusqu'à la quatrième décimale et où, puisque m et n sont permutables, la première colonne donne les plus grandes (Majores.), la seconde les plus petites (Minores.)

Majores.	Minores.	Majores.	Minores.
1,2500	1,2500	1,3479	1,1279
1,2599	1,2399	1,3556	1,1156
1,2696	1,2296	1,3631	1,1031
1,2791	1,2191	1,3704	1,0904
1,2884	1,2084	1,3775	1,0775
1,2975	1,1975	1,3844	1,0644
1,3064	1,1864	1,3911	1,0511
1,3151	1,1751	1,3976	1,0376
1,3236	1,1636	1,4039	1,0239
1,3319	1,1519	1,4100	1,0100
1,3400	1,1400		

Table donnant les valeurs rationnelles exactes des nombres m et n.

14. Ensuite nous posons ce qui suit:

$$\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}} = s \qquad \sqrt{a+\frac{1}{t}} = ms \qquad \sqrt{b+t} = ns \qquad \sqrt{2(a+b)} = (m+n-1)s$$

d'où, pour les segments de la base du triangle, nous déduisons:

AB = ks (m+n-1); AX = mks; BY = nks; XY = ks

où il est évident que les quatre segments sont proportionnels à m+n-1, m, n et 1 et ne dépendent donc que du seul n qu'il faut déterminer.

15. Pour les autres côtés nous avons, par ces mêmes déterminations que nous venons d'établir: AC sin α = 2k /(m+n-1)s et Ax sin α = k /ms d'où AC /Ax = 2m /(m+n-1) qui montre que x sera toujours entre A et C, car 2m > m+n-1. De même on aura BC sin β = 2k /(m+n-1)s et By = k /ns d'où BC /By = 2n /(m+n-1) et, à cause de la même inégalité, y sera toujours entre B et C. De plus il est utile de constater que

AC /AX = 2AX /AB etBC /By = 2BY /AB d'où il découle que les triangles XAx et YBy sont égaux à la moitié du triangle ABC.

16. Ensuite on aura Xx sinϕ = k /ms et Yy cosϕ = k /ns. Et comme sinϕ cosϕ = t /(1+t²) = 1/2s², aura XO sinϕ = k /2s et YO cosϕ = k /2s d'où Xx /XO = 2 /m et Yy /YO = 2 /n, et comme on a toujours m et n < 2, il est certain que, pour notre solution, le point O tombera à l'intérieur du triangle. Par conséquent, les formules données ici concernent sûrement l'ensemble des quadripartitions possibles.

17. Comme la solution de notre problème dépend de la relation entre m et n, de la table ci-dessus il est possible de tirer, pour n'importe quelle valeur de n la valeur correspondante de m. Puisque le plus souvent ces valeurs sont irrationnelles et sont données ici de façon précise, si nous souhaitons des valeurs semblables rationnelles, cela peut se faire par les formules suivantes: m = 5/4 + δ - δ^2 et n = 5/4 - δ - δ^2 où δ est une fraction sûrement petite et inférieure à ($\sqrt{2}$ -1) /2 =0,2071. On a donc m - n = 2δ et m + n = 5/2 - 2δ^2. Et comme il faut (m - n)² + 2(m + n) = 5, ces formules satisfont évidemment ces conditions. Ensuite, parce que n > 1, il faut $\delta+\delta^2 < 1/4$ et $\delta + 1/2 < 1/\sqrt{2}$, d'où $\delta <$ ($\sqrt{2}$ -1) /2. Comme en plus m + n = 5/2 - 2δ^2 sa valeur maximum est 5/2 et la minimum 1 +$\sqrt{2}$ = 2,4142. De même m + n -1 est contenue entre ces limites très étroites : 1,500 et 1,414 qui diffèrent de 0,086.

18. Nous cherchons maintenant de quelle manière les a et b, qui sont les cotangente des angles α et β, de même que l'angle ϕ, dont la tangente est t, peuvent être définis par les lettres m et n. Et d'abord, comme nous avons posé $\sqrt{a+\frac{1}{t}}$ = ms, on aura $a = m^2s^2 - \frac{1}{t}$ et puisque $s^2 = \frac{1+t^2}{2t}$, d'où $2a = \frac{m^2-2}{t} + m^2t$ et, car m² < 2, $2a = m^2t - \frac{2-m^2}{t}$. De même, comme $\sqrt{b+t}$ = ns, on aura $2b = t\left(n^2-2\right) + \frac{n^2}{t}$ = $\frac{n^2}{t} - \left(2-n^2\right)t$. Donc si à m ou n, mais aussi à t, nous attribuons des valeurs choisies à volonté, nous obtiendrons toutes les valeurs possibles pour α et β et donc tous les triangles pour lesquels la quadripartition est possible. Ainsi notre problème est déjà parfaitement résolu de manière inverse.

19. En réalité, si un triangle est donné, et si a et b sont données, une certaine relation existe cependant entr'elles, que la solution exige et qu'il faut examiner à partir des deux équations trouvées ci-dessus, en éliminant t:

$$2a = m^2t - \left(2-m^2\right)\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad 2b = n^2t - \left(2-n^2\right)t$$

Et d'abord, en éliminant 1 /t, nous avons:

$$2n^2a + 2\left(2-m^2\right)b = 2\left(m^2+n^2-2\right)t \quad \text{d'où} \quad t = \frac{n^2a+\left(2-m^2\right)b}{m^2+n^2-2}$$

et en éliminant t: $2\left(2-n^2\right)a + 2m^2b = 2\left(m^2+n^2-2\right)\big/_t$ d'où $\frac{1}{t} = \frac{\left(2-n^2\right)a+m^2b}{m^2+n^2-2}$

De ces deux équations, on tire la relation entre a et b:

$$n^2\left(2-n^2\right)a^2+m^2\left(2-m^2\right)b^2+2ab\left(2-m^2-n^2+m^2n^2\right)=\left(m^2+n^2-2\right)^2$$

20* .**Afin** d'abréger cette équation, on pose: $n^2(2-n^2) = A$, $m^2(2-m^2) = B$, $m^2+n^2-2=C$ et $2-m^2-n^2+m^2n^2 = D$, d'où l'équation: $Aa^2+Bb^2+2Dab = C^2$ où il est utile de noter que: $A= 1-(n^2-1)^2$; $B = 1-(m^2-1)$; $C = (m^2-1)+(n^2-1)$ et $D = 1+(m^2-1)(n^2-1)$ et, en outre, on ajoute $AB = D^2 - C^2$ et $A+B = 2D - C^2$.

21. Ensuite, cette équation se présente mieux si on pose: $m^2 - 1 = \mu$ et $n^2 - 1 = \nu$ où on note que μ et ν sont toujours compris entre 0 et 1. Et l'équation devient:

$$\left(1-\nu^2\right)a^2+\left(1-\mu^2\right)b^2+2ab\left(1+\mu\nu\right)=\left(\mu+\nu\right)^2$$

Mais il faut bien noter ici, étant donné que μ et ν sont formées à partir de m et n qui dépendent l'un de l'autre, que si l'une est donnée, l'autre peut s'en déduire.

22. De ce qui précède, il est évident que les angles α et β ne peuvent nullement être choisis à volonté. En effet, si ils sont choisis comme données, la résolution de l'équation pourra donner des valeurs μ et ν qui, sauf si elles sont entre les limites 0 et 1, rendront la quadripartition impossible. En réalité, nous avons parfaitement démontré dans les élucidations qu'on pouvait toujours choisir deux angles de telle façon qu'il soit toujours possible de satisfaire cette équation. Afin de développer plus précisément cet argument, nous ajoutons le problème suivant.

PROBLEME I

Trouver tous les triangles isocèles ABC pour lesquels notre équation est applicable à la base AB, de telle façon que X et Y tombent entre les extrémités A et B.

23. Comme les angles A et B sont égaux entre eux, en posant a = b, l'équation devient: $\left(4-\left(\mu-\nu\right)^2\right)a^2=\left(\mu+\nu\right)^2$ et, en introduisant m et n, on a: $a^2=\dfrac{\left(m^2+n^2-2\right)^2}{4-\left(m^2-n^2\right)}$.

Comme m est toujours compris entre 1 et $\sqrt{2}$, on a soit m = 1 et n = $\sqrt{2}$ ou l'inverse, et on trouve a = $1/\sqrt{3}$ = cot α d'où α = 60° et on est dans le cas du triangle équilatéral.

24. Ensuite comme on a m = 1, n = $\sqrt{2}$ et a = b = *1/3,* pour l'angle ϕ et sa tangente, suivant la formule du 19., on trouve t = $\sqrt{3}$ et l'angle ϕ = 60°. Et comme $s^2 = (1+t^2)/2t = 2/\sqrt{3}$, l'aire totale du triangle étant égale à k^2, la base devient égale à ks $\sqrt{2}$ et les segments AX = ks, BY = ks $\sqrt{3}$ et XY = ks. Et donc si AB = c, on a AX= c/ $\sqrt{2}$ et BY = c.

25. Comme les deux cas extrêmes choisis pour m et n conduisent au même triangle équilatéral, j'ai fait l'erreur autrefois, par précipitation, de penser atteindre les cas intermédiaires de la même manière. Mais maintenant, l'affaire doit être comprise tout autrement lorsque les triangles présentent toutes les valeurs intermédiaires. D'abord,

nous attribuons à m et n des valeurs égales entre elles qui sont 5/4, d'où $a^2 = 9^2/16^2$ et a = b = 9/16 = cotα et tgα = 16/9 = 1,777... d'où les angles à la base α = β = 60°38'33''. Alors, pour l'angle ϕ, on aura t = 1 et ϕ = 45°. Et pour la division de la base en X et Y, en posant AB = c, on a: AX = BY = 5c /6 et XY = 4c /6.

26. De tout ceci on peut conclure que les autres cas intermédiaires sont d'autant plus proches du triangle équilatéral qu'ils s'éloignent plus du milieu. Afin que ce soit plus clair, nous donnons à m et n les valeurs attribuées ci-dessus: m = 5/4 + δ - δ^2 et n = 5/4 - δ - δ^2, d'où: m + n = 5/2 - 2δ^2 et m - n = 2δ et aussi: $m^2 - n^2 = 5\delta - 4\delta^3$ et $m^2 + n^2 - 2 = 18/16 - 3\delta^2 + 2\delta^4 = 2(3/4 - \delta^2)^2$. Comme nous avons trouvé

$a = \dfrac{m^2+n^2-2}{\sqrt{4-\left(m^2-n^2\right)^2}}$ on a donc $a = \dfrac{2\left(3/4-\delta^2\right)^2}{\sqrt{4-\left(5\delta-4\delta^3\right)^2}}$, d'où on peut tirer une valeur pour a, que δ soit positif ou négatif.

27. Etant donné que les limites de ces solutions sont étroites, comme la valeur de δ est très petite, on peut négliger les puissances supérieures à 4 et, en divisant le numérateur et le dénominateur par 2, le numérateur sera:
$\dfrac{9}{16}-\dfrac{3}{2}\delta^2+\delta^4 = \dfrac{9}{16}\left(1-\dfrac{8}{3}\delta^2+\dfrac{16}{9}\delta^4\right)$ et le dénominateur $\sqrt{1-\dfrac{25}{4}\delta^2+10\delta^4}$ environ égal à $\dfrac{1}{1+\dfrac{25}{8}\delta^2+\dfrac{1235}{128}\delta^4}$. En multipliant, on trouve $a = \dfrac{9}{16}\left(1+\dfrac{11}{24}\delta^2+\dfrac{3568}{1152}\delta^4\right)$
d'où il est évident que a sera toujours supérieur à 9/16. A noter que la fraction δ ne peut être supérieure à ($\sqrt{2}$ - 1)/2 = 0,2371.

28. Après avoir trouvé la cotangente a, nous cherchons l'angle ϕ dont nous avons vu que la tangente est $a\dfrac{\left(2+n^2-m^2\right)}{m^2+n^2-2}$. Comme ensuite on a m = 5/4 + δ - δ^2 et n = 5/4 - δ - δ^2, suivant ce qu'on a vu :

$$m^2+n^2-2 = 2\left(\frac{3}{4}-\delta^2\right)^2 = 2\left(\frac{9}{16}\left(1-\frac{8}{3}\delta^2+8\frac{16}{8}\delta^4\right)\right)$$

de plus $m^2 - n^2 = 5\delta - 4\delta^3$ d'où le numérateur sera $2 - 5\delta + 4\delta^3 = 2(1 - 5\delta/2 + 2\delta^3)$ et

$$t = a\frac{\left(1-\frac{5}{2}\delta+2\delta^3\right)}{\frac{9}{16}\left(1-\frac{8}{3}\delta^2+\frac{16}{9}\delta^4\right)}\quad t = \frac{\left(1-\frac{5}{2}\delta+2\delta^3\right)\left(1+\frac{11}{24}\delta^2+\frac{3563}{9.128}\delta^4\right)}{1-\frac{3}{2}\delta^2+\frac{16}{9}\delta 4}$$

Du dénominateur nous tirons ce nouveau facteur: $1+\dfrac{8}{3}\delta^2+\dfrac{16}{3}\delta^4$ qui, joint au dernier, donne: $1+\dfrac{25}{8}\delta^2+\dfrac{695}{72}\delta^4$ et la vraie valeur de t = $1-\dfrac{5}{2}\delta+\dfrac{25}{8}\delta^2-\dfrac{19}{16}\delta^3+\dfrac{695}{72}\delta^4$.

D'où il est évident que, δ pouvant être positif ou négatif (parce que dans la formule pour a n'apparaît aucune puissance impaire de δ, ainsi pour ϕ deux valeurs apparaissent tantôt inférieure à un demi droit, tantôt supérieure), il peut donner une double valeur à t et ce cas, parce que le triangle est isocèle, donne lieu évidemment à deux solutions.

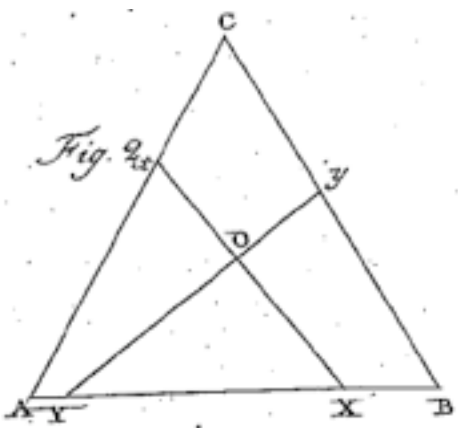
29. Si nous attribuons à δ sa valeur maximale qui est ($\sqrt{2}$ - 1)/2, auquel cas ou bien m = $\sqrt{2}$ et n = 1, ou m = 1 et n = $\sqrt{2}$, pour ces deux cas notre formule principale donne a = 1/$\sqrt{3}$, d'où $\alpha = \beta = 60°$ pour le triangle équilatéral. Cependant, dans le premier cas où m = $\sqrt{2}$ et n = 1, on a t = a -1/ $\sqrt{3}$ d'où t = 30°. Avec l'autre cas, m = 1 et n = $\sqrt{2}$, on a t = 3a = $\sqrt{3}$ d'où $\phi = 60°$. Ces cas étant extrêmes, nous disons qu'aucun triangle isocèle ne peut admettre une quadripartition que si les angles à la base sont compris entre les limites 60° et 60°38'33''.

30. Mais pour que ces cas intermédiaires, où on donne à δ une valeur quelconque entre 0 et ($\sqrt{2}$ - 1)/2, soient plus aisément exécutés, nous exprimons les coefficients trouvés ci-dessus comme suit:

$$a = 0{,}56250 + 0{,}25781\delta^2 + 1{,}73975\ \delta^4$$
$$t = 1{,}00000 - 2{,}50000\delta + 3{,}12500\delta^2 - 5{,}81250\delta^3 + 9{,}65278\delta^4$$

31. Soit $\delta = \pm 1/10$, on aura = 0,56510 d'où $\alpha = \beta = 60°31'44''$; ensuite on aura t = 1,03221 $\mp$ 0,25581. Et si $\delta = +1/10$, on a m = 1,34000 = AX et n = 1,14000 = BY, et aussi AB = m + n - 1 = 1,48000 d'où XY = 1. Et dans ce cas t = 0,77640 et $\phi = 37°49'31''$.

32. L'autre solution s'obtient pour $\delta = -1/10$ où m =1,14000 = AX, n = 1,34000 = BY et AB = m + n - 1 = 1,48000 d'où XY = 1. Et on a t = 1,28802 , $\phi = 52°10'29''$. Ce cas est représenté à la fig.2 qui, en l'inversant, représente aussi l'autre cas. Ensuite, pour l'un ou l'autre des côtés pris comme base, la solution ordinaire peut s'appliquer.



QUADRIPARTITION DES TRIANGLES SCALENES

33. Etant donné que les valeurs attribuées aux m et n donnent exactement la division de la base aux points X et Y, nous allons ici considérer divers cas parmi toutes les quadripartitions:

I) cas de la première extrémité où $m = \sqrt{2}$, $n = 1$ et l'équation entre a et b est $a^2 + 2ab = 1$ avec $t = a$;

II) cas de l'autre extrémité où $m = 1$, $n = \sqrt{2}$ et l'équation entre a et b est $b^2 + 2ab = 1$ avec $t = 1/b$ *;

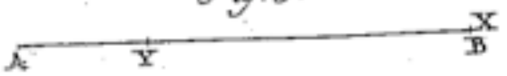
III) cas intermédiaire où $m = n = 5/4$ et l'équation entre a et b est $175\ a^2 + 175\ b^2 + 2 \times 337\ ab = 324$ avec $t = (25\ a + 7\ b)/18$ *.

Nous développons ces cas très précisément, un par un.

PROBLEME II

Etant donné l'angle A = α , avec cot α = a, trouver l'autre angle à la base B =β avec cot β = b, afin que la quadripartition soit possible pour le premier cas.

Fig. 3.



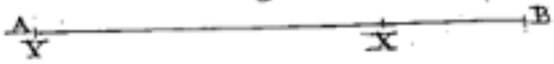
34. Comme on a ici $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$, la base totale $AB = \sqrt{2}$ est divisée de manière que X tombe en B, le point Y est tel que $BY = 1$ et l'équation pour ce cas étant $a^2 + 2ab = 1$, on en tire $b = (1 - a^2) /2a$ et on aura $\cot \beta = (1 - \cot^2 \alpha) /2\cot \alpha$ d'où $\text{tg}\beta = 2\text{tg } \alpha /(\text{tg}^2\alpha - 1)$.

35. En transformant cette formule pour faire apparaître tg 2α , on aura $\text{tg } \beta = - \text{tg } 2\alpha = \text{tg } (180°-2\alpha)$ d'où $\beta = 180° - 2\alpha$. Il est ici utile de noter que, si on avait $\alpha = 60° +\varepsilon$, d'où $\beta = 60° - 2\varepsilon$ et le 3[e] angle $C = \gamma = 60°+\varepsilon$ donc égal à A, ce triangle serait aussi isocèle. Mais si ε était soustrait, on aurait $A = \alpha = 60°- \varepsilon$, $B = \beta = 60°+ 2\varepsilon$ et l'angle $C = \gamma = 60°- \varepsilon = A$. Enfin on aura, pour la tangente de l'angle ϕ , $t = a$ soit $\text{tg}\phi = \cot \alpha$, d'où $\phi = 90°- \alpha$.

PROBLEME III

Etant donné l'angle A = α , avec cot α = a, trouver l'autre angle à la base B = β , avec cot β = b, afin que la quadripartition soit possible pour le second cas.

Fig. 4.



38. Comme ici on a m = 1 et n = $\sqrt{2}$, la base est divisée de telle façon que AX = 1 et BY = $\sqrt{2}$, cas qui diffère point par point du précédent. Ici, entre a et b nous avons l'équation $b^2 + 2ab = 1$, d'où nous tirons b = -a + $\sqrt{1+a^2}$ = cot β et par suite, tg β = a + $\sqrt{1+a^2}$. Et comme on a: a* = cotα = cosα /sinα , on aura tgβ = (1+cosα)/sinα et comme 1 + cosα = 2 cos$^2\alpha$ /2 et sinα = 2sinα /2 cosα /2, on aura tgβ = cotα /2 et β = 90°- α /2. De plus comme dans ce cas on a t = b, on aura tg ϕ = cot β = tgα /2 d'où $\phi = \alpha$ /2. Et si nous posons comme avant α = 60°+ε , on aura β = 60°- ε /2 ce qui donne pour le troisième angle : γ = 60°- ε /2 = β = B et ainsi ce triangle est aussi isocèle.

39. Etant donné un angle α quelconque, pourvu que β tombe entre les limites 90°- α /2 et 180° -2α ou, en posant α = 60° +ε , pourvu que l'angle β tombe entre les limites 60°- ε /2 et 60° - 2 ε , la quadripartition sera toujours possible. Il ne s'ensuit pourtant pas que, si cet angle tombe hors de ces limites, la solution soit toujours impossible ainsi que nous l'avons écrit dans les éclaircissements et ces cas je vais les étudier ici principalement, puisque les autres, on été traités auparavant assez clairement et amplement.

PROBLEME IV

Etant donné A = α , avec cot α = a, trouver l'autre angle à la base β ,avec cot β = b, afin que la quadrisection soit possible pour le troisième cas.

Fig. 5.

40. Comme on a m = n = 5/4, la base totale AB = m + n -1 = 6/4 est coupée aux points X et Y avec AX = BY = 5/4 et AY = BX = 1/4 et donc égales à la sixième partie de la base AB. Et entre a et b on a cette équation $175a^2 + 175b^2 + 2x337ab = 324$, d'où en extrayant la racine, on obtient b = $\dfrac{-337a+18\sqrt{256a^2+175}}{175}$ où il faut bien noter qu'onne peut donner le signe moins au radical, même si cot β pouvait être négative;

la raison en est que, dans la formule principale se trouve le terme $\sqrt{2(a+b)}$, et qu'il faut que la somme a + b soit positive. Et comme elle est égale à: $\dfrac{-162a+18\sqrt{256a^2+175}}{175}$,elle sera évidemment négative si on adopte le signe moins.

41. Mais de cette expression assez complexe, rien ne peut être clairement déduit pour le calcul des angles α et β et c'est pourquoi nous essayons, en supprimant l'irrationalité, de trouver des formules plus simples pour a et b. A cette fin, nous posons $\sqrt{256a^2+175}$ = 16a + 7v d'où on tire a = $\dfrac{25-7v^2}{32v}$ et $\sqrt{256a^2+175} = \dfrac{25+7v^2}{2v}$ * et, en substituant, b = $\dfrac{25v^2-7}{32v}$. Voici donc pour a et b deux formules assez simples et qui, en plus son cohérentes entre elles, de sorte que, si dans l'une on remplace v par 1/v, l'autre sera modifiée de même.*

44. On observe d'abord que si v = 1, on a: a = b = 9/16 qui est le cas du triangle isocèle traité ci avant. Et ensuite, si on attribue à v des valeurs plus grandes, les angles α et β s'éloignent d'autant l'un de l'autre. Ainsi, si α devient droit, d'où cot = 0 et v = $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$, on aura b = $\dfrac{18}{5\sqrt{7}}$ qui correspond à l'angle β = 30°18'48''. Certes il faut observer ici qu'on ne peut attribuer à v des valeurs négatives, autrement la valeur du signe radical serait négative.

45. Parce que j'ai décidé d'étudier en premier lieu ces cas qui s'éloignent des considérations précédentes, ils subsistent cependant, comme on le verra sous peu, pour des angles α et β proches de l'égalité; et ici nous développons plus précisément ces cas pour lesquels v n'excède l'unité que de peu. Je poserais donc, puisque le calcul est le même avec v et 1/v, v = $\dfrac{1+\omega}{1-\omega}$ et, le ω de cette fraction étant très petit, en développant en série ,on aura:

$$v = 1+2\omega+2\omega^2+2\omega^4 + \text{etc} \quad \text{et} \quad \frac{1}{v} = 1-2\omega+2\omega^2-2\omega^3+2\omega^4+\text{etc}$$

d'où comme on a: $a = \dfrac{25}{32v} - \dfrac{7v}{32}$, on obtient:

$$a = \frac{9}{16} - 2\omega + \frac{9}{8}\omega^2 - 2\omega^3 + \frac{9}{8}\omega^4 \text{ etc} \quad \text{et} \quad b = \frac{9}{16} + 2\omega + \frac{9}{8}\omega^2 + 2\omega^3 + \frac{9}{8}\omega^4 \text{ etc}$$

séries pour lesquelles il suffit de s'arrêter à peu de termes.

46. Avec cela, il ne sera pas difficile de définir les angles α et β. Soit θ l'angle dont la cot = 9/16, et, comme $\cot\alpha = \cot\theta - 2\omega + \dfrac{9}{8}\omega^2 - 2\omega^3 + \dfrac{9}{8}\omega^4$ etc, pour abréger, on pose cot α = cot θ -p avec p = $\dfrac{2\omega - 9\omega^2/8}{1-\omega^2}$. Et, comme $\cot(\alpha-\theta) = \dfrac{1+\cot\alpha\cot\theta}{\cot\theta - \cot\alpha}$, on aura $\cot(\alpha-\theta)=\dfrac{1+\cot^2\theta-p\cot\theta}{p}$ et de même, $tg(\alpha-\theta)=\dfrac{p}{1-p\cot\theta+\cot^2\theta}=$ $\dfrac{256p}{337-144p}$ = P. Et puisque cet angle α - θ est très petit, on aura approximativement α - θ = P - $P^3/3$ *. Mais ici, l'angle est exprimé en radians que nous convertissons en secondes en multipliant par 206265", dont le logarithme est 5,4144251 *. Et, si on pose le nombre en secondes = M, d'où α - θ = M et, puisque θ = 60°38'33", on aura pour l'angle α = 60°38'33"+ M.

47. De la même manière, si nous posons, pour faire court:
$q=2\omega+\dfrac{9\omega^2}{8}+etc=\dfrac{2\omega+9\omega^2/8}{1-\omega^2}$ d'où cot β = b = 9/16 +q = cot θ + q, de même, par $\cot(\theta-\beta)=\dfrac{1+\cot\beta\cot\theta}{\cot\beta-\cot\theta}$, on aura $\cot(\theta-\beta)=\dfrac{1+\cot^2\theta+q\cot\theta}{q}$ et $tg(\theta-\beta)=\dfrac{q}{1+\cot^2\theta+q\cot\theta}=\dfrac{256q}{337+144q}$ que nous posons égale à Q, d'où θ - β = Q - $Q^3/3$ qu'on convertit en secondes en multipliant par 206265 et, en l'appelant N, on aura β = θ - N = 60°38'33"- N. De plus, la valeur ω étant très petite, son carré comme les puissances supérieures peuvent être négligés d'où p = q = 2ω et on a ainsi P = Q = $\dfrac{512\omega}{337}$.

48. Maintenant, pour chercher à comparer plus facilement entre elles les trois valeurs de β qui, dans les trois cas principaux correspondent à α, nous introduisons les notations convenables suivantes:

I) on appelle b' la valeur de b venant du 1er cas, et β' l'angle qui convient pour avoir $b'=\dfrac{1-a^2}{2a}$ et β' = 180° - 2α ;

II) soit b" la valeur de b pour le 2d cas et β" l'angle correspondant que nous avons trouvé $b''=\sqrt{1+a^2}-a$, et β" = 90° - α/2;

III) soit b"' la valeur de b pour le 3e cas et β"' l'angle correspondant tel que $b'''=\dfrac{-337a+18\sqrt{256a^2+175}}{175}$.

PROBLEME V

Trouver l'angle α, ainsi que sa cotangente a, auquel correspond la valeur b"' égale à la valeur b'.

49. Puisque les 1er et 2e cas se rapportent aux quadripartitions extrêmes, la valeur b"' tombera le plus souvent entre b' et b"; cependant, il y aura des cas où elle les dépassera, comme je l'ai constaté naguère. Pour cette raison il est nécessaire

d'examiner ces cas pour lesquels b''' tombe hors des limites b' et b'', ce qui se fera plus facilement si nous étudions les cas où b''' égale b' ou b''.

50. Si on remplace b' et b''' par leurs valeurs trouvées ci-dessus, on a l'équation $\frac{1-a^2}{2a} = \frac{-337a+18\sqrt{256a^2+175}}{175}$ d'où $175+499a^2 = 36a\sqrt{256a^2+175}$ et, en élevant au carré: $175^2+2.175.499a^2+499^2a^4 = 36^2.16^2a^4+26^2.175a^2$ qui se réduit à: $77.1075a^4+2.149.175a^2 = 175^2$ équation qui, divisée par 175 = 7.25, devient $11.43a^4+2.149a^2 = 175$ d'où la racine $a^2 = \frac{-149+\sqrt{149^2+175.473}}{473} = \frac{-149+324}{473}$ $= \frac{175}{473}$ et par conséquent, $a = \sqrt{\frac{175}{473}}$.

Ce problème peut aussi être résolu de la manière suivante.

51. On utilise les équations trouvées pour les 1er et 3e cas: $a^2+2ab=1$ et $175a^2+175b^2+2.337ab = 324$ d'où il faut tirer la valeur de a. A cette fin, on divise l'une par l'autre et on a: $175a^2+175b^2+2.337ab = 324a^2+2.324ab$ qui mène à cette équation: $149a^2-175b^2-26ab=0$, d'où $b = \frac{149}{175}a$, et en remplaçant dans la première équation, on obtient $a = \sqrt{\frac{175}{473}}$.

52. Comme tg $\alpha = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{473}{175}}$, on en tire α = 58°41'22,5'' auquel correspond pour les1er et 3e cas le même angle β, avec cot β = b = $\frac{149}{\sqrt{149.473}}$ d'où tg β = $\frac{\sqrt{175.473}}{149}$ et on aura β' = β'''= 62°37'15'' et pour le même angle α, on a β''= 90° - α /2 = 60°39'19''.

PROBLEME VI

Chercher l'angle α, avec cot α = a, auquel correspond la valeur b''' égalée à b''.

53. A partir des formules pour b'' et b''' données ci-dessus, on a cette équation:

$$\sqrt{1-a^2}-a = \frac{-337a+18\sqrt{256a^2+175}}{175}$$

qu'on transforme ainsi: $175\sqrt{1+a^2}+162a = 18\sqrt{256a^2+175}$

puis en l'élevant au carré: $175.149\left(1+a^2\right) = 2.175.162a\sqrt{1+a^2}$

qu'on réduit à : $149\sqrt{1+a^2 =}324a$

et de nouveau au carré: $149^2 = \left(324^2 - 149^2\right)a^2 = 175.473a^2$,

d'où $$a = \frac{149}{\sqrt{175.473}}$$

54. Nous tirons la même valeur de ces équations rationnelles qui sont $b^2 + 2ab = 1$ et $175a^2 + 175b^2 + 2.337ab = 324$, en les divisant l'une par l'autre. On obtient ainsi $\dfrac{175a^2 + 175b^2 + 2.337ab}{b^2 + 2ab} = 324$ qu'on transforme en: $149b^2 - 26ab - 175a^2 = 0$,

d'où $b = \dfrac{175}{149}a$, valeur qu'on substitue dans la première équation $b^2 + 2ab = 1$ et puisque $b + 2a = \dfrac{473}{149}a$, on obtient $a = \dfrac{149}{\sqrt{175.473}}$.

55. Comme ensuite $\cot\alpha = \dfrac{149}{\sqrt{175.473}}$, on aura $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{175.473}}{149}$ et, d'un précédent calcul, nous obtenons $\alpha =$ 62°37'15'' auquel correspond, aussi bien pour le 2e que le 3e cas, l'angle β''= β'''= 58°41'22,5''.

56. Ces deux valeurs que nous avons obtenues pour α peuvent être considérées comme les limites telles que, si α y est compris, il y correspond des valeurs de β''' qui dépassent les limites β' et β''. Donc il convient de chercher plus précisément les valeurs intermédiaires de α et, à cette fin, nous ajoutons le problème suivant.*

PROBLEME VII

Etant donné l'angle α contenu dans les limites trouvées ci-dessus, attribuer à l'angle β les trois valeurs qui peuvent être acceptées pour les trois cas principaux.

57. Ici, il faut surtout observer qu'il existe, entre les deux limites trouvées, un lien étroit tel que, si l'une est connue, l'autre s'en déduit. En effet, si nous désignons la limite inférieure par f et la supérieure par g, nous avons $tgf = \sqrt{\dfrac{473}{175}}, tgg = \dfrac{\sqrt{175.473}}{149}$ et

$tg\left(f+g\right) = \dfrac{tgf + tgg}{1 - tgf \times tgg} = -\sqrt{\dfrac{473}{175}} = -tgf$, d'où f + g = 180°- f et 2f + g = 180°, qui correspond aux valeurs trouvées.

58. Les valeurs correspondantes pour β' et β'' sont β'= 180° - 2α et β''= 90° - α /2, d'où, si on pose $\alpha = 60° + \varepsilon$, on aura $\beta' = 60° - 2\varepsilon$ et $\beta'' = 60° - \varepsilon/2$. Pour la 3e valeur β''', étant donné que les limites trouvées sont assez étroites, on comprend facilement que, dans les formules que nous avons trouvées dans un problème précédent, les puissances supérieures à deux puissent être négligées. D'où, en introduisant l'angle θ avec $tg\theta = 16/9$, nous trouvons $tg(\alpha - \theta) = 256p/(337 - 144p)$ avec $p = 2\omega - 9\omega^2/8$ puisque nous rejetons la 3e puissance ω^3. En substituant p, on a:

$tg(\alpha - \theta) = \dfrac{512\omega - 288\omega^2}{337 - 288\omega} = \dfrac{512}{337}\omega + \dfrac{175.188}{337^2}\omega^2$ que, pour faire court, nous écrivons $tg(\alpha - \theta) = \mu\omega + \nu\omega^2$ avec $\mu = 512/337$ et $\nu = 175.188/337^2$. Mais nous n'avons pas besoin de ces valeurs. De la même manière, on obtient $tg(\theta - \beta''') = \mu\omega - \nu\omega^2$.

59. Maintenant, comme nous avons rejeté la puissance trois, nous aurons pour ces angles: $\alpha - \theta = \mu\omega + \nu\omega^2$ et $\theta - \beta''' = \mu\omega - \nu\omega^2$ d'où, en soustrayant, $\alpha + \beta''' - 2\theta = 2\nu\omega^2$ et, en négligeant ω^2, on a $\alpha + \beta''' = 2\theta$ et donc $\beta''' = 2\theta - \alpha$ $= 121°17'4'' - \alpha$; ceci posé, si on fait $\alpha = 60° + \varepsilon$, on aura $\beta''' = 61°17'4'' - \varepsilon$.*

60. Mais cette valeur a besoin de correction a cause du ω^2 négligé et, comme on fait $\beta''' = 61°17'4'' - 2\nu\omega^2$, aux valeurs qu'on en déduit, il faut toujours ajouter quelque chose. Afin de chercher cette correction, nous considérons la somme des deux formules trouvées qui est: $\alpha - \beta''' = 2\mu\omega$ d'où nous déduisons que l'erreur à ajouter sera proportionnelle à la 2e puissance de $\alpha - \beta'''$. Et donc, si nous connaissons l'erreur relative à un cas, il sera facile de la trouver pour tous les autres.

61. Enfin nous examinons la limite supérieure trouvée pour α qui était $\alpha = 62°37'15''$ auquel correspond $\beta''' = 58°41'22''$. Et, par la formule $\beta''' = 2\theta - \alpha$, on déduit $\beta''' = 58°39'49''$ et comme l'erreur est 1'33'', il faut l'ajouter à la valeur. Donc, puisque dans ce cas on a $\alpha - \beta''' = 3°57'26''$, en réduisant en secondes, on trouve $\alpha - \beta''' = 14246''$ * et l'erreur est 93''. D'où, pour tous les autres cas quelconques, si on pose $\alpha - \beta''' = \lambda$, l'erreur sera $93\lambda^2/14246^2$ * soit approximativement $\lambda^2/2000000$.

62. Et puisque pour n'importe quelle différence $\alpha - \beta''' = \lambda$ nous pouvons facilement attribuer une erreur (où il faut noter qu'il en va de même, que $\alpha - \beta'''$ soit positive ou négative), nous ajoutons le tableau suivant dont la première colonne donne la différence $\alpha - \beta'''$ en augmentant par 5', l'autre colonne l'erreur désirée devant évidemment être ajoutée à la valeur $\beta''' = 2\theta - \alpha$. A noter que si la différence $\alpha - \beta'''$ était de 5i minutes, par $\lambda = 300i$ et $\lambda^2 = 90000i^2$, on aurait l'erreur $9i^2/200$sec ou, plus précisément, $i^2/24$.

Table des erreurs

$\alpha-\beta'''$	Error.	$\alpha-\beta'''$	Error.	$\alpha-\beta'''$	Error.	$\alpha-\beta'''$	Error.
5′	1/24″	1° 5′	7 1/24″	2° 5′	26 1/24″	3° 5′	57 1/24″
10	1/6	1 10	8 1/6	2 10	28 1/6	3 10	60 1/6
15	3/8	1 15	9 3/8	2 15	30 3/8	3 15	63 3/8
20	2/3	1 20	10 2/3	2 20	32 2/3	3 20	66 2/3
25	1 1/24	1 25	12 1/24	2 25	35 1/24	3 25	70 1/24
30	1 1/2	1 30	13 1/2	2 30	37 1/2	3 30	73 1/2
35	2 1/24	1 35	15 1/24	2 35	40 1/24	3 35	77 1/24
40	2 2/3	1 40	16 2/3	2 40	42 2/3	3 40	80 2/3
45	3 3/8	1 45	18 3/8	2 45	45 3/8	3 45	84 3/8
50	4 1/6	1 50	20 1/6	2 50	48 1/6	3 50	88 1/6
55	5 1/24	1 55	22 1/24	2 55	51 1/24	3 55	92 1/24
60	6	1 60	24	2 60	54	3 60	96

63. Maintenant, à l'aide de cette table, nous élaborons la table complète qui, pour tous les angles α compris entre ces limites, donne les trois valeurs de β sorties des trois cas. La 1ère colonne donne l'angle α de la valeur inférieure 58°41'22'' à la supérieure 62°37'15''en croissant par 10', sauf aux limites; la 2de colonne donne l'angle β' déduit du premier cas où β'= 180°-2α ; la 3e colonne montre l'angle β'' du 2e cas où β''= 90°- α /2; la 4e colonne donne l'angle β''' du 3e cas déduit de la formule 2θ - α auquel, dans la 5e colonne, nous indiquons l'erreur à ajouter.

α	β'	β''	β'''	Error.
58°, 41′, 22″	62°, 37′, 15	60°, 39′, 19″	62°, 37′, 15″	—′ —″
58, 50 —	62, 20 —	60, 35 —	62, 27, 4	1′ 18″
59, 0 —	62, 0 —	60, 30 —	62, 17, 4	1 5
59, 10 —	61, 40 —	60, 25 —	62, 7, 4	— 52
59, 20 —	61, 20 —	60, 20 —	61, 57, 4	— 41
59, 30 —	61, 0 —	60, 15 —	61, 47, 4	— 31
59, 40 —	60, 40 —	60, 10 —	61, 37, 4	— 21
59, 50 —	60, 20 —	60, 5 —	61, 27, 4	— 15
60, 0 —	60, 0 —	60, 0 —	61, 17, 4	— 10
60, 10 —	59, 40 —	59, 55 —	61, 7, 4	— 5
60, 20 —	59, 20 —	59, 50 —	60, 57, 4	— 2
60, 30 —	59, 0 —	59, 45 —	60, 47, 4	— —
60, 40 —	58, 40 —	59, 40 —	60, 37, 4	— —
60, 50 —	58, 20 —	59, 35 —	60, 27, 4	— 1
61, 0 —	58, 0 —	59, 30 —	60, 17, 4	— 3
61, 10 —	57, 40 —	59, 25 —	60, 7, 4	— 7
61, 20 —	57, 20 —	59, 20 —	59, 57, 4	— 11
61, 30 —	57, 0 —	59, 15 —	59, 47, 4	— 17
61, 40 —	56, 40 —	59, 10 —	59, 37, 4	— 25
61, 50 —	56, 20 —	59, 5 —	59, 27, 4	— 34
62, 0 —	56, 0 —	59, 0 —	59, 17, 4	— 44
62, 10 —	55, 40 —	58, 55 —	59, 7, 4	— 56
62, 20 —	55, 20 —	58, 50 —	58, 57, 4	1, 9
62, 30 —	55, 0 —	58, 45 —	58, 47, 4	1, 23
62, 37, 15	54, 45, 30	58, 41, 22	58, 41, 22	— —

64. Dans cette table sont contenus tous les cas pour lesquels la valeur de β''' tombe hors des limites β' et β''; d'où il s'ensuit, un cas de ce genre étant donné, soit un cas où les relations entre les angles à la base α et β, avec β hors des limites qui étaient 180°- 2α et 90°- α /2, subsistent, pour lesquelles on ne peut réaliser la quadripartition du triangle. Nous représentons ces cas, non contenus dans les limites, dans le tableau suivant qui montre de nouvelles limites pour α , pour lesquelles même une solution peut avoir lieu laquelle, comme nous l'avons vu, ne peut exister que si l'angle α est compris dans l'intervalle de 58°41'22'' à 62°37'15''. A cet angle α nous ajoutons de nouvelles limites croissant par 10', entre les valeurs β''' et, ou β', ou β'' qui lui conviennent mieux pour autant que les cas soient contenus dans la table précédente; et, pour rendre cette table d'un usage plus aisé, nous ajoutons aux valeurs de β''' les erreurs figurant dans la table précédente.

Table montrant les limites pour l'angle β
qui peut être regardée comme un supplément
à la table précédente. (vel = ou)

α	β'''	β' vel β''
58°, 41', 22''	62°, 37', 15''	62°, 37', 15''
58, 50, —	62, 28, 22	62, 20, —
59, 0, —	62, 18, 9	62, 0, —
59, 10, —	62, 7, 56	61, 40, —
59, 20, —	61, 57, 45	61, 20, —
59, 30, —	61, 47, 35	61, 0, —
59, 40, —	61, 37, 25	60, 40, —
59, 50, —	61, 27, 19	60, 20, —
60, 0, —	61, 17, 14	60, 0, —
60, 10, —	61, 7, 9	59, 55, —
60, 20, —	60, 57, 6	59, 50, —
60, 30, —	60, 47, 4	59, 45, —
60, 40, —	60, 37, 4	59, 40, —
60, 50, —	60, 27, 5	59, 35, —
61, 0, —	60, 17, 7	59, 30, —
61, 10, —	60, 7, 11	59, 25, —
61, 20, —	59, 57, 15	59, 20, —
61, 30, —	59, 47, 21	59, 15, —
61, 40, —	59, 37, 29	59, 10, —
61, 50, —	59, 27, 38	59, 5, —
62, 0, —	59, 17, 48	59, 0, —
62, 10, —	59, 8, 0	58, 55, —
62, 20, —	58, 58, 13	58, 50, —
62, 30, —	58, 48, 27	58, 45, —
62, 37, 15	58, 41, 22	58, 41, 22

65. Quand l'angle β est contenu entre les anciennes limites, j'ai exposé dans les élucidations, une méthode facile à partir des angles donnés α et β ou leurs cotangentes a et b, pour trouver l'angle ϕ dont la tangente est t; où il était aussi évident que, quel que soit le cas, une solution unique pouvait être trouvée ; et en plus là j'ai montré que des deux angles α et β , l'un étant maximum, l'autre sera toujours minimum dans le triangle d'où le côté adopté pour la base sera toujours le moyen.

66. Mais quand l'angle β est contenu dans les nouvelles limites, alors l'ancienne propriété suivant laquelle le côté AB est le moyen, n'est plus d'application. Considérons en effet le cas où α = 61°, en lui ajoutant β = 60°, le 3e angle sera 59° et de ce fait le côté AB est le petit. Mais si nous sommons l'angle α = 59° et β = 62°10', le 3e angle sera 58°50' et donc tant lui-même que le côté opposé, soit la base, seront minimums; où on comprend que dans ces nouveaux cas le côté AB sera toujours le plus petit côté

des triangles. Mais il faut noter, à propos de ces nouveaux cas, qu'on peut toujours leur donner deux solutions pour lesquelles on ne peut facilement utiliser la méthode exposée avant. Nous proposons ici une nouvelle méthode pour trouver les deux solutions en une seule opération, dans n'importe quel cas.

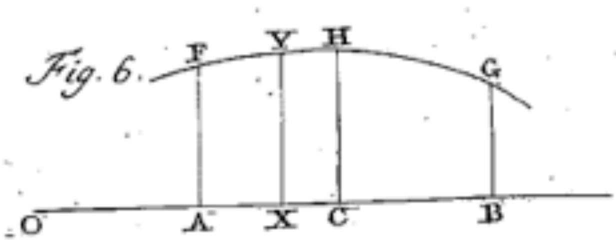
PROBLEME VIII

Quand la relation entre les angles α et β est comprise dans la nouvelle table, trouver les deux quadripartitions qui peuvent avoir lieu.

67. Toute l'affaire revient à ceci que, pour les deux angles donnés, les valeurs des deux nombres m et n doivent être trouvés: ceux-ci étant connus, on peut à l'aide de la formule trouvée ci-dessus, calculer $t = \frac{n^2a + (2-m^2)b}{m^2+n^2-2}$. Comme, en outre, t est la tangente de l'angle ϕ, le triangle rectangle XOY est déterminé. La division de la base par les points X et Y est connue à partir des nombres m et n: en posant XY = 1, on a AX = m, BY = n et AB = m + n - 1.

68. Nous commençons maintenant à partir des trois cas principaux pour lesquels le 1[er] était m = $\sqrt{2}$ et n = 1; ici nous considérons le nombre n = 1, et nous posons β, correspondant à α pour ce 1[er] cas, comme β'= 180°- 2α = f. Pour le 2[e] cas, soit l'autre limite, on avait n = $\sqrt{2}$ que nous écrivons ς, soit $\varsigma^2 = 2$; et l'angle β''= 90°- α/2 est posé = g. Et pour le 3e cas intermédiaire, pour lequel n = 5/4, la valeur β''' de l'avant-dernière table, nous l'appelons h. De ceci il faut déduire la valeur de n qui correspond à l'angle β donné.

Fig. 6.



69. A cette fin, nous représentons la valeur de n en abscisse et celle de β en ordonnée, de telle façon que, si AO = 1 on a AF = f, si OB = $\sqrt{2}$ = ς on a BG = β''=g et enfin, si OC = 5/4 on a CH = β'''= h. On voit ici clairement que les points F, H et G se trouvent sur une ligne courbe d'allure assez uniforme parce que l'intervalle entre f et g est très étroit. Et en plus, à chaque abscisse correspond une ordonnée . Si on appelle l'abscisse OX = x, à laquelle correspond l'ordonnée XY = y, la nature de cette courbe est telle qu'elle peut être représentée par cette équation: $y = A + Bx + Cx^2$.

70. Dans cette équation les coefficients A, B, C doivent être comparés ainsi: si on pose x = 1, on aura y = f, si on suppose l'abscisse x = 5/4, on aura y = h, enfin si l'abscisse x= $\sqrt{2}$, on aura y = g. De ceci, on tire les équations suivantes:

I) f = A + B + C
II) h = A + 5B /4 + 25C /16
III) g = A + ς B + ς^2C

D'où les valeurs suivantes pour A, B et C:

$$B = \frac{9(g-f)-16(h-f)}{9\varsigma-13} = \frac{7f+9g-16h}{9\varsigma-13}$$

$$C = (g-f)-(\varsigma-1)B$$

$$A = f - B - C$$

Il sera préférable dans la pratique d'utiliser ces formules plutôt que celles qui proviendraient de la réduction au même dénominateur. Il importe de noter que, à peu près, 9ς-13 = -0,2720776 d'où 1/(9ς-13) = -3,6754175 et aussi ς - 1 = 0,4142136.

71. Le calcul est rendu plus commode, avec des valeurs de f, g, h autour de 60° et contenues dans des limites assez étroites, si les ordonnées f, g, h sont diminuées de 60°, et leur valeur, qu'elle soit inférieure ou supérieure à 60°, exprimée en minutes, auxquelles on peut ajouter une partie décimale en secondes; alors aussi la valeur de l'ordonnée y, qui se rapporte à la valeur de l'angle B = β , devra de même être diminuée de 60°.

72. Quand les valeurs des lettres A, B, C auront été trouvées, on donnera à l'ordonnée y la valeur de la donnée B = β et, de l'équation du 2e degré y = A + Bx + Cx^2, on tirera les deux valeurs pour x qui donneront deux valeurs pour le nombre n (et, en même temps, l'autre nombre m sera connu) à partir desquels on trouve facilement la division de la base aux points x et y d'où l'angle ϕ et sa tangente t; ici il faut rappeler que les lettres a et b désignent les cotangentes de α et β et, de cette manière, on obtient la double solution en une seule opération.Ce qu'il convient d'illustrer par cet exemple.

EXEMPLE

Soit un triangle dont les angles sont l'un A = α = 59°, l'autre B = β = 62°10', pour lequel il faut chercher la double quadripartition.

73. Pour cet angle α = 59°, nous avons β'= 62°, β''= 60°30', β'''= 62°18'9'' d'où, en soustrayant 60°, on a f = 120', g = 30', h = 138,150' et on aura y = 130'. Ensuite nous cherchons le numérateur de la lettre B qui est 7f + 9g - 16h = -1100,40 qui, multiplié par -3,6754175 donne B = +4044,430. D'où pour C = -1765,258 et de même A = -2159,172 . En remplaçant dans l'équation du 2d degré du § 69., pour la détermination de la valeur de x, on a:130 = -2159,172 + 4044,430 x - 1765,258 x^2

d'où $$x = \frac{2022{,}215 \pm \sqrt{2022{,}215^2 - 2289{,}172.1765{,}258}}{1765{,}258}$$

d'où on tire x= 1,27015 et 1,02097.

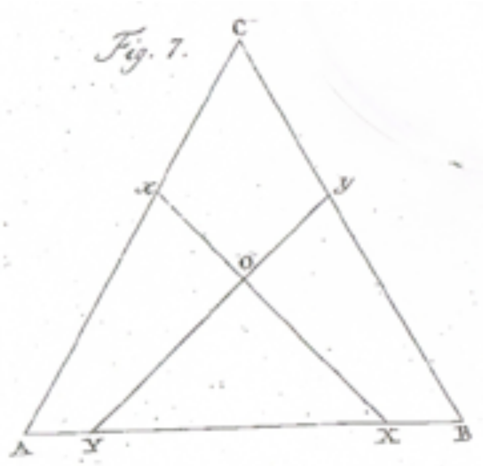
74. Cette double valeur pour x étant trouvée, on en tire de même deux valeurs pour le

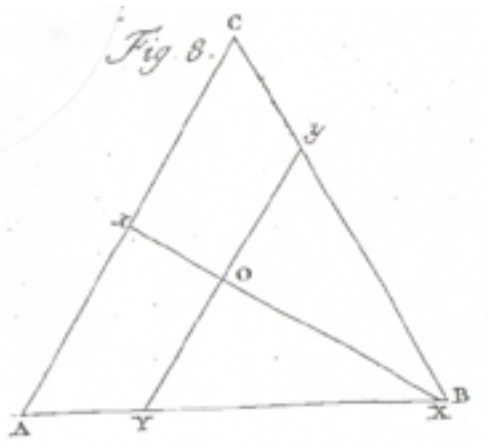
nombre n qui, étant connues donnent les valeurs de l'autre nombre m, car on a $m = n - 1 + \sqrt{6 - 4n}$. Ces valeurs étant déterminées, on peut établir ainsi, grâce au problème VIII, la quadripartition de telle sorte qu'on aura, pour la division de la base, AX = m, BY = n, la base totale AB = m + n - 1 et l'angle ϕ par $tg\phi = \dfrac{n^2 a + \left(2 - m^2\right) b}{m^2 + n^2 - 2}$.

La double quadripartition est présentée dans la table suivante.

Data	Solutio I.	Solutio II.
AB	1,4991	1,4262
AX	1,2290	1,4052
BY	1,2701	1,0210
XY	1,0000	1,0000
Φ	47°, 32′, 14″	32°, 10′, 23″

La disposition et la construction des deux sont montrées dans les figures 7 et 8.





NOTES ET COMMENTAIRES

Pour chaque paragraphe concerné, on donne le numéro et on indique par un astérisque le passage concerné. Les erreurs évidentes du texte original sont signalées et corrigées dans la traduction. Une autre solution du problème est reprise dans l'étude en annexe. Il sera fait référence dans les commentaires.

4. Dans l'annexe (§ 2.2.), on démontre que le cas de figure où les deux droites coupent les deux côtés d'un seul angle est impossible

7. Erreur, 5e ligne: cot β au lieu cos β.

11. « , 2e « : le +1 doit sortir du radical.

20. Ce paragraphe ne sert pas pour la suite.

30. La méthode de solution exposée aux § 67. et ss peut évidemment aussi s'appliquer à ces triangles isocèles.

33. Erreur, 7e ligne: 1/b au lieu de b.
9e ligne: t est aussi égal à 18/(7a+25b)-(voir § 19.).

38. Erreur, 4e ligne: a au lieu de α.

41. « 4e « : +25 au lieu de -25.

42. et 43. Ces deux paragraphes manquent, sans nuire à la compréhension de la suite.

46. Erreur,6e ligne: $P^3/3$ au lieu de P/3.
« 7e « : le logarithme de 206265 est 5,3144260.

48. Erreur: le signe moins est mal placé pour b''', il doit être devant 337 et pas devant la barre de fraction.

49. On ne comprend pas ce paragraphe et sa suite quand on sait que les limites pour α du § 56. doivent être élargies, en admettant pour β''' des valeurs comprises entre β' et β'', afin d'obtenir toutes les solutions trouvées dans l'étude en annexe. Voir la note relative aux paragraphes 67. et suivants.

59. Par rapport à la valeur exacte obtenue par le calcul de b''' du § 48., la valeur approchée de β''' est déjà très précise: l'erreur, quand α varie de 57° à 63°, va de 5'27'' à 2'12'' en passant par 0,5'' pour 60°. Avec la correction, les erreurs correspondantes sont 15'', 0,5'' et 12''.

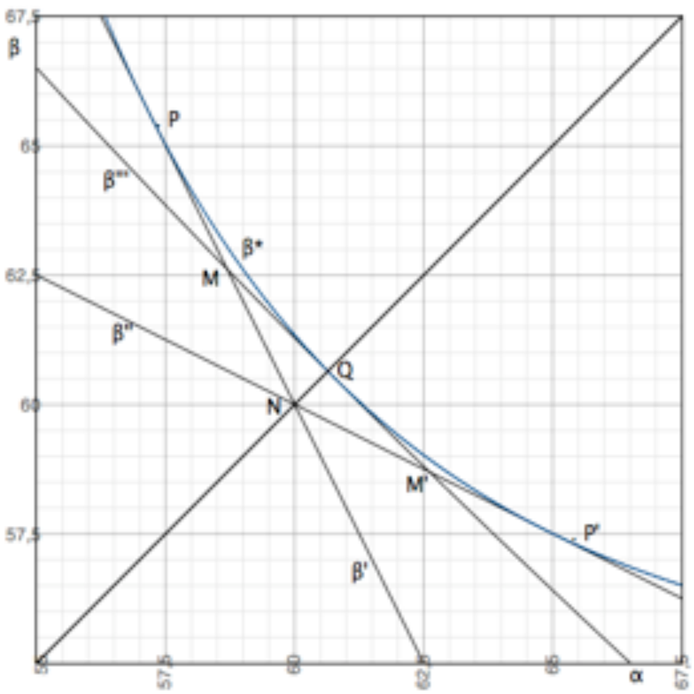
66. Pour la détermination du côté qui peut servir de base AB, on peut se reporter à la figure et au commentaire de la note suivante.

-si le point (α,β) est dans l'angle PNQ, on a $\beta+2\alpha>180°$ d'où $\alpha>\gamma$ et comme $\alpha<\beta$, on a $\gamma<\alpha<\beta$ et AB est le petit côté. Et la conclusion est la même pour l'angle P'NQ où on a $\gamma<\beta<\alpha$.

-si α est dans l'angle supérieur entre β' et β'' on a, d'une part: $\beta> 90°-\alpha/2$, d'où

$2\beta + \alpha > 180°$ et $\gamma < \beta$,d'autre part: β<180°-2α , d'où β+2 α < 180° et $\alpha <. \gamma$
On a donc enfin $\alpha <. \gamma < \beta$ et AB est le côté moyen. Et de même pour l'angle inférieur entre β' et β'' où $\alpha > \gamma > \beta$.
Conclusion: le côté AB ne peut être accepté comme base que si le point (α , β) se trouve dans la zone PQP'N (AB petit côté) ou entre β' et β''(AB côté moyen).

67. et ss. Comme noté au § 56., les limites pour α doivent être élargies pour obtenir toutes les solutions trouvées dans l'étude en annexe. Pour trouver ces nouvelles limites pour α , il faut faire la discussion des solutions de l'équation du § 69. en déterminant les valeurs possibles pour n.
Pour illustrer l'exposé qui suit, on s'aidera de la figure ci-dessous où les valeurs de α du § 56. sont les abscisses des points M et M', respectivement intersections de β' et β'' avec β'''.



Considérons à nouveau l'exemple développé au § 73. avec α = 59° et β = 62,1667° (62°10'). La parabole β = f(n) donne deux solutions pour $\beta \geq \beta$'. S'il y a égalité, les valeurs de n sont n_1 = 1 (le triangle est isocèle en B) et n_2 = 1,2910. Si β< β', n_1 devient inférieur à 1 et sort des limites permises pour n.

Si β>β',on a toujours deux solutions jusqu'à la valeur maximum $\beta^* = A - B^2 / 4C$, sommet de la parabole où $n^* = n_1 = n_2 = - B / 2C$ = 1,1455. Si la valeur choisie pour α diminue, on peut montrer que la dérivée de n* est négative; donc n* diminue avec α , mais il ne peut devenir inférieur à 1. Quand n* est égal à 1, B + 2C = 0 et:
$\beta^* = A - B^2 / 4C = f - B - C - B^2 / 4C = 180° - 2\alpha - (B + 2C)^2 / 4C = 180° - 2\alpha = \beta'$.

Il y a donc une valeur limite de α , qu'on peut tirer de B + 2C = 0, égale à 57,1684°

(57°10'6'') et donc inférieure à celle du § 56., avec β^*= 65,6632° (65°39'48''). En ce point P de la figure, β^* et β' sont non seulement égales mais tangentes car la dérivée $(B + 2C)^2/ 4C$ est nulle.

Les points de la figure entre N et Q correspondent aux triangles isocèles dont les angles à la base vont de 60° en N à θ = arctg 16/9 en Q où $\alpha = \beta = \theta = \beta'''$ et où il n'y a qu'une solution n* = 5 / 4 avec $\beta^* = \theta$. Donc en Q, on a égalité entre β^* et β''' et tangence puisque β^* est symétrique par rapport à la bissectrice.

En résumé on a, sur PQ, une solution n* qu'on peut qualifier de double, et deux à l'intérieur de PQN et sur PN où le triangle est isocèle en B puisque $n_1 = 1$.Et à tout couple (α_1, β_1) situé dans ou sur NPQ correspond, par symétrie, un couple ($\alpha_2 = \beta_1, \beta_2 = \alpha_1$) dans ou sur NP'Q. En conclusion, les valeurs limites pour α sont donc 57,1684°(57°39'47'') et 65,6740° (65°39'48'').

Dans l'étude en annexe,

-Les points où, ci-dessus, $\beta = \beta^*$ correspondent aux points où g(x) est tangente à f(x). Sur la fig.4.6.b., ces points se trouvent sur PQ qui est, sur la fig.7., l'enveloppe des courbes donnant les valeurs de A en fonction de r pour des valeurs de x données.

-La zone NPQ correspond à la zone NPQ de la figure ci-dessus dont le point P correspond point R de la fig.4.5. où r = $\sqrt{2+\sqrt{2}}\ /\ 2$ et cosA = $1\ /\ \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et,puisque le triangle est isocèle, α est égal à cet angle A = 57,2349 $\simeq$ 57,1684 trouvé ci-dessus.