

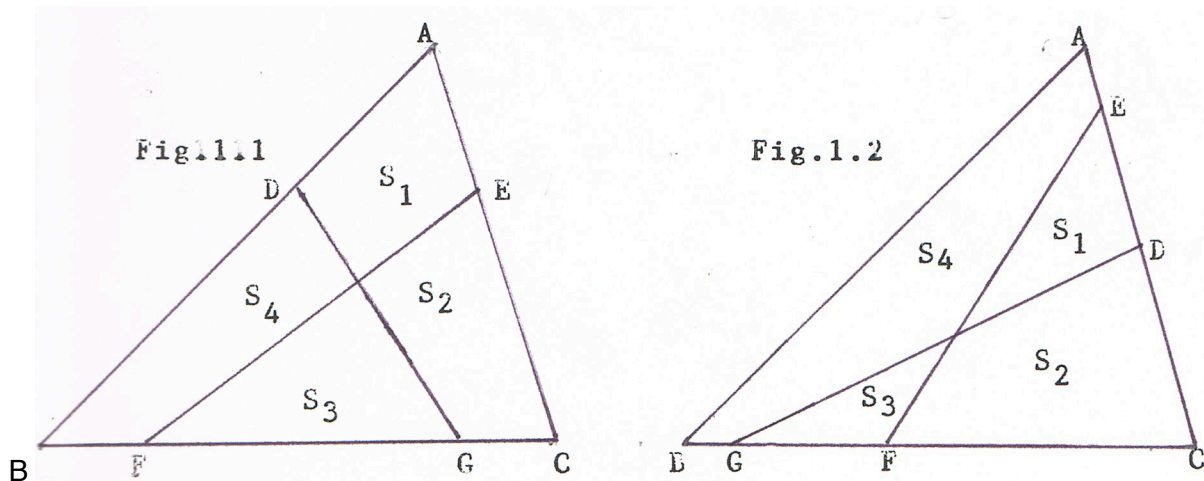
DIVISION D' UN TRIANGLE EN QUATRE AIRES EGALES PAR DEUX DROITES CONCOURANTES PERPENDICULAIRES

G. Lobet

1. Idée de solution.

On considère 2 droites concourantes qui divisent chacune le triangle en 2 aires égales. On cherche d'abord la condition pour que ces droites divisent le triangle en 4 aires égales, sans être nécessairement perpendiculaires. Ensuite la condition pour que ces droites soient perpendiculaires, que la première condition soit vérifiée ou non. La réalisation simultanée des deux conditions donne la solution du problème.

Deux cas de figure sont possibles:



Dans les deux cas, E et D doivent se trouver entre le milieu du côté et A.
Etant donné que les 2 droites coupent le triangle en 2, on a:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \quad \text{et} \quad S_2 + S_3 = S_1 + S_4$$

$$\text{D'où on tire:} \quad S_1 = S_3 \quad \text{et} \quad S_2 = S_4 \quad (1.1)$$

2. Première condition.

2.1. Cas de fig.1.1.

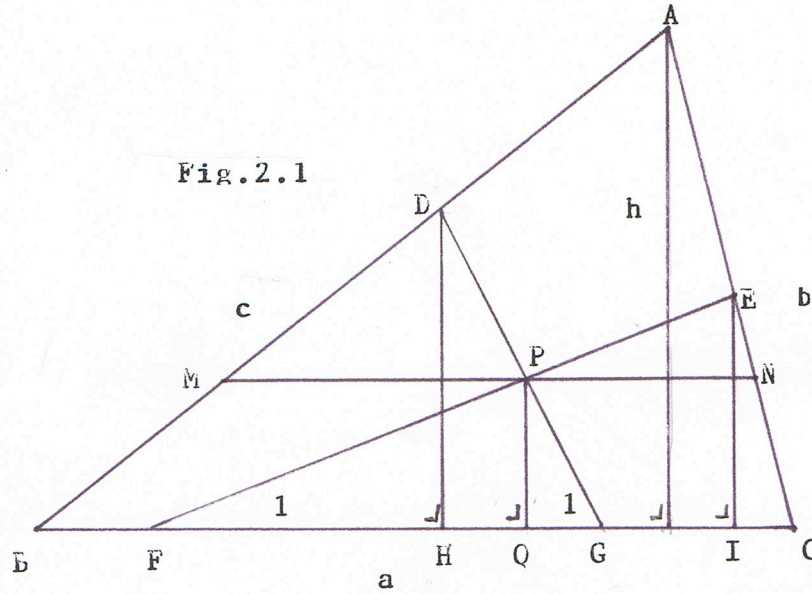
Tenant compte des relations (1.1.), si l'une des quatre aires est égale au quart du triangle ABC, les autres le seront aussi. On va, ce qui paraît le plus simple, chercher la condition pour l'aire S_3 .

On définit deux variables x et y :

$$y = CE / CA \quad \text{et} \quad x = BD / BA \quad (2.1.)$$

$$\text{avec la contrainte:} \quad 1/2 \leq x, y \quad (2.2.)$$

Par la suite, pour ce cas de figure, on appellera «côté double» le côté coupé par les deux droites afin de faciliter l'exposé, en 4.3, de la discussion sur les solutions possibles.



Dans la fig.2.1. on a:

$$CF = a/2y \quad BG = a/2x \quad EI = yh \quad DH = xh \quad (2.3)$$

$$FG = a(x + y - 2xy) / 2xy \quad (2.4)$$

Par P, on mène MN parallèle à BC. Dans les triangles ABC, BDG, et FEC on a les 3 relations:

$$(MP+PN)/a = (h-PQ)/h \quad MP/BG = (DH-PQ)/DH \quad PN/CF = (EI-PQ)/EI$$

En éliminant MP et PN entre ces relations, on obtient:

$$PQ = hxy(x + y - 2xy) / (x^2 + y^2 - 2x^2y^2) \quad (2.5)$$

Il faut: $FG.PQ = ah/4$ d'où, par (2.4) et (2.5):

$$F(x,y) = 2(x + y - 2xy)^2 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2) = 0 \quad (2.6)$$

C'est la condition pour que les 2 droites, déterminées par x et y, divisent le triangle en 4 aires égales.

Il y a une infinité de solutions, sous la contrainte (2.2), à laquelle il faut ajouter $x, y \leq 1/\sqrt{2}$, car si x (ou y) dépasse cette valeur, y (ou x) sera inférieur à 1/2. (voir 4.1. ci-après). Ces valeurs limites correspondent à deux solutions évidentes: EF(DG) médiane de b(c) et DG(EF) parallèle à b(c).

Et puisque les paramètres du triangle ne figurent pas dans (2.6), toute solution (x,y) est valable pour n'importe quel triangle ou paire de côtés d'un triangle.

2.2. Cas de figure 1.2.

Comme pour le premier cas, on calcule l'aire de S_3 , en notant ici:

$$y = CE/CA \quad x = CD/CA \quad \text{avec} \quad 1/2 \leq x \leq y \quad (2.7)$$

Par un calcul semblable à celui de 2.1., on obtient $y = 3x$. Suivant (2.7), on aurait $y \geq 3/2$ ce qui est impossible.

3. Deuxième condition.

Pour que l'angle FPG de la fig.2.1 soit droit, il faut que les angles F_1 et G_1 soient complémentaires, donc que le produit de leurs tangentes soit égal à 1. On a :

$$\operatorname{tg} G_1 = DH / (BG - BH) = 2x^2c \sin B / (a - 2x^2c \cos B)$$

$$\operatorname{tg} F_1 = EI / (CF - CI) = 2y^2b \sin C / (a - 2y^2b \cos C)$$

On diminue le nombre de paramètres pour ramener le triangle à sa forme sans dimensions linéaires :

- on suppose $b \leq c$ et on introduit $r = b/c \leq 1$;
- on élimine a, B , et C et on introduit A ;

On obtient :

$$G(x, y) = r \cos A [1 + (1 - 2x^2)(1 - 2y^2)] - r^2(1 - 2y^2) - (1 - 2x^2) = 0 \quad (3.1)$$

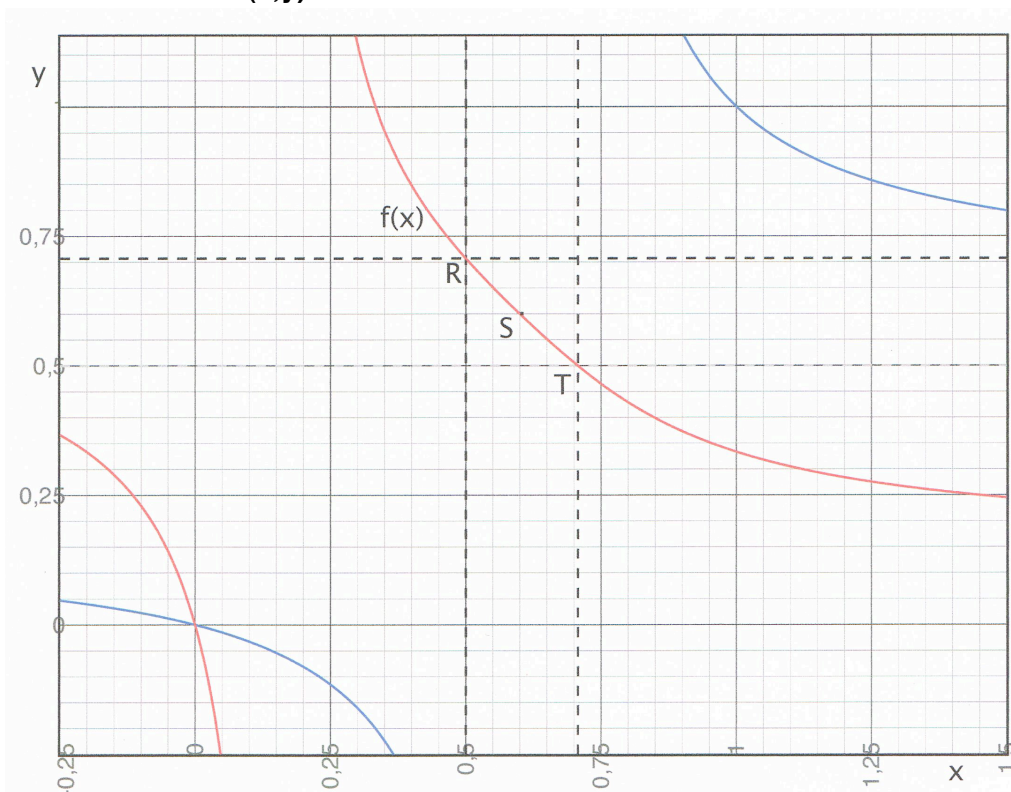
condition pour que les deux droites soient perpendiculaires. Il y a également une infinité de solutions, mais dépendant de la forme du triangle fixée par le couple (r, A) .

4. Recherche des solutions.

La solution du problème consiste donc à rechercher les valeurs de x et y qui vérifient les deux équations du 4^e degré (2.7) et (3.1). Une solution analytique ne semble pas possible. Il faut donc recourir à l'analyse numérique. On utilisera ici le logiciel GRAPHER pour les solutions et les graphiques.

Cependant, à partir de l'examen de la représentation graphique des fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$, on peut déduire le nombre de solutions et les conditions pour les obtenir.

4.1. Etude de $F(x, y)$.



En résolvant $F(x,y)$ par rapport à y , on a:

$$y = x / (4x - 2 \pm R) \quad \text{avec } R = (6x^2 - 8x + 3)^{1/2} \quad (4.1)$$

où les signes + et - correspondent respectivement aux courbes en rouge et en bleu de la fig.4.1. Suivant ce qui a été vu au para.2.1., seule la partie de la courbe rouge comprise entre $1/2$ et $1/\sqrt{2}$ doit être prise en compte.

Entre ces valeurs, la courbe présente une anomalie (fig.4.2.), une sorte de méplat qui n'existe pas au coude des autres branches de $F(x,y)$. La distance maximale en S entre l'arc RST et sa corde (en vert) est de 0,0050 pour $RT = 0,2929$.

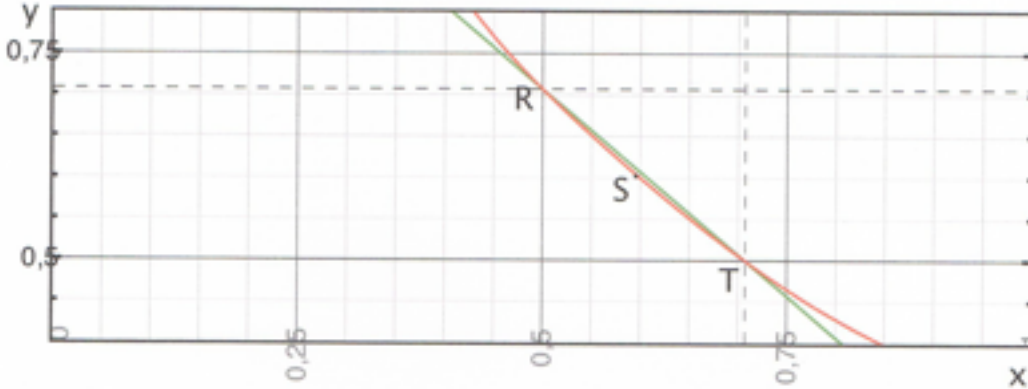


Fig.4.2.

Pour la suite, on notera:

$$y = f(x) = x / (4x - 2 + R) \quad (4.2) \quad \text{et} \quad f'(x) = (3 - 4x - 2R) / R(4x - 2 + R)^2 \quad (4.3)$$

Aux points R, S et T on a :

	x	f(x)	f'(x)	(4.4)
R	1/2	$1/\sqrt{2}$	$-2(2 - \sqrt{2})$	
S	0,6	0,6	-1	
T	$1/\sqrt{2}$	1/2	$-(2 + \sqrt{2}) / 4$	

4.2. Etude de $G(x,y)$.

La fonction (3.1) est symétrique par rapport aux axes. Seule la partie où x et y sont positifs est à considérer. En résolvant par rapport à y , on a:

$$y = g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(1 - 2x^2) - r \cos A}{(1 - 2x^2)r \cos A - r^2} \right)} \quad (4.5)$$

$g(x)$, pour r donné et A variable, est représentée par un faisceau de courbes passant par le point:

$$x = \sqrt{(1-r)/2} \quad y = \sqrt{(1+1/r)/2} \quad (4.6)$$

de la courbe:

$$y = h(x) = \sqrt{(1-x^2)/(1-2x^2)} \quad (4.7)$$

à droite), ainsi que $f(x)$ et $h(x)$. Si $r = 1$, $g(x)$ passe, pour tout A , par $(1,0)$ et $(0,1)$ (voir fig.4.4.) et est symétrique par rapport à la première bissectrice. Si on fait $A = 0$ dans $G(x,y)$ on obtient deux droites. Une réelle: $x = \sqrt{(1-r)/2}$ et une imaginaire: $y = i\sqrt{(1-r)/r}$.

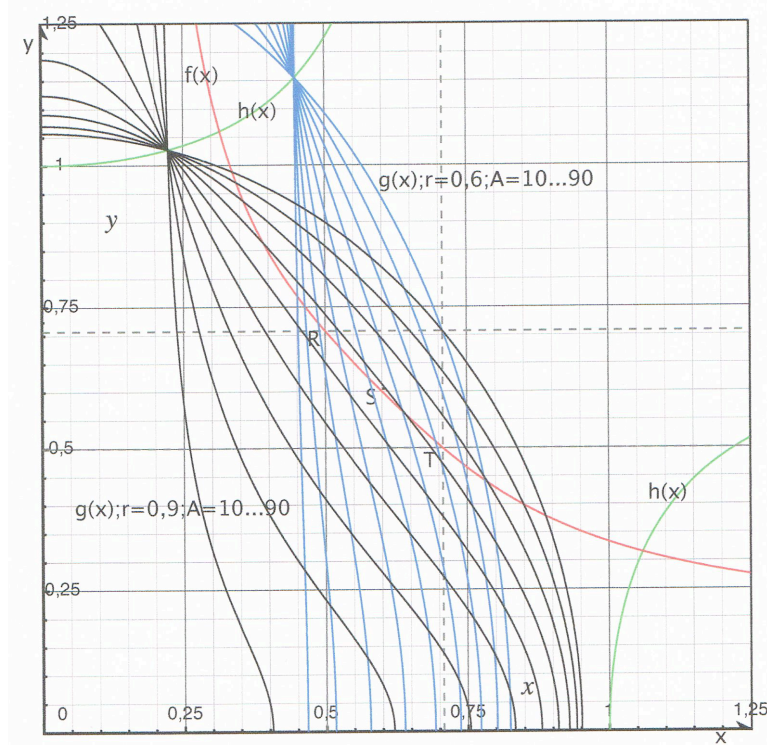


Fig.4.3.

Pour la dérivée, on utilisera:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} = \frac{xr \cos A (1 - 2y^2) - x}{r^2 y - yr \cos A (1 - 2x^2)} \quad (4.8)$$

Au point R, $g(x)$ devient: $2r \cos A = 1$ (triangle isocèle de base c) et en T, $2 \cos A = r$ (triangle isocèle de base b).

Ces deux relations sont importantes pour la discussion sur le nombre de solutions et le choix du couple (A,r) en 4.4.

4.3. Solutions.

4.3.1. Calcul de la solution x :

A l'aide de GRAPHER on détermine les zéros de la fonction $g(x)-f(x)$ compris entre 0,5 et $1/\sqrt{2}$.

4.3.2. Tangence de $g(x)$ et $f(x)$.

Le point de tangence de ces fonctions pour A et r donnés ne peut être déterminé analytiquement. Mais l'inverse est possible. On peut calculer, pour un point donné de $f(x)$, le couple (A_t, r_t) tel que $g(x)$ soit tangente en ce point:

- on choisit x , d'où y par (4.2)
- en ce point, on calcule $k = f'(x)$ par (4.3)
- on égale (4.8), dérivée de $g(x)$, à k
- on élimine $r \cos A$ entre cette relation et $g(x)$; on obtient:

$$r_t = \sqrt{\frac{x - ky(1 - 2x^2)^2}{x(1 - 2y^2)^2 - ky}} \quad (4.9) \quad \text{d'où, par (3.1): } \cos A_t = \frac{r_t^2(1 - 2y^2) + (1 - 2x^2)}{r_t[1 + (1 - 2y^2)(1 - 2x^2)]} \quad (4.10)$$

Pour que r_t soit ≤ 1 , on peut montrer que x doit être $\leq 0,6$. Par le calcul, on constate que r_t augmente avec x . Et du calcul de A_t et r_t il ressort que ce couple est unique pour x donné.

La courbe de A_t en fonction de r_t est PQ sur la fig.4.6.b (qui sera explicitée en 4.4.2.) pour x allant de 0,5 en P à 0,6 en Q.

4.3.3. $r = 1$ - Deux solutions.

Pour $r = 1$, les courbes $g(x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice et passent par $(1,0)$ et $(0,1)$. Elles correspondent à des triangles isocèles de sommet A pour lesquels il existe une solution évidente: la médiane issue de A et une perpendiculaire à une distance $h/\sqrt{2}$ du sommet.

Cependant, pour certaines valeurs de A, deux autres solutions existent. La fig.4.4. montre $g(x)$ pour des valeurs de A croissant de gauche à droite.

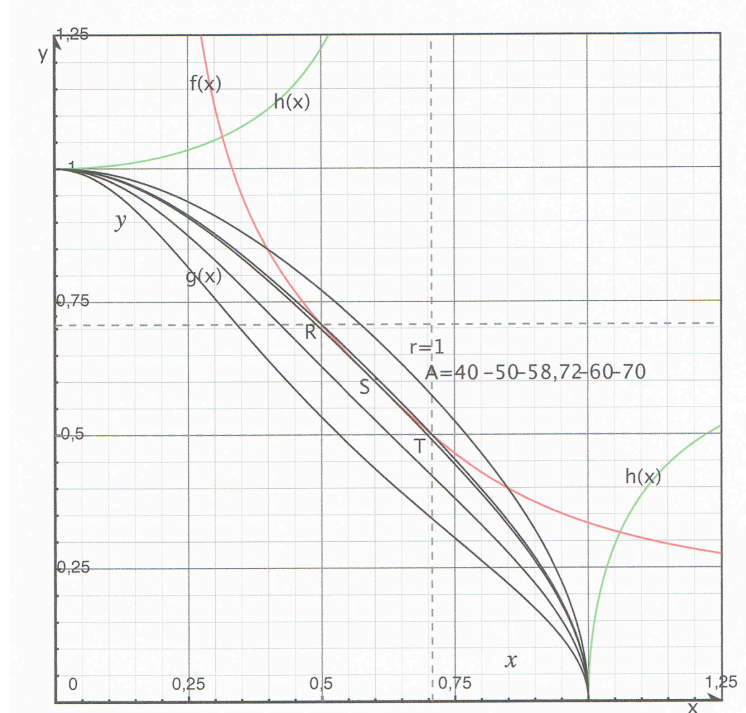


Fig.4.4.

Pour $A = 40^\circ$ ou 50° , pas de solution, $g(x)$ et $f(x)$ ne sont pas sécantes. Comme ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la première bissectrice, elles peuvent être tangentes en $S(0,6;0,6)$. C'est la première solution (deux solutions confondues) pour laquelle A vaut, par (4.10):

$$\cos A = 0,56 / 1,0784 \quad \text{et} \quad A \approx 58,7155^\circ$$

Si A croît encore, on a deux intersections et donc deux solutions symétriques. Pour $A = 60^\circ$, $g(x)$ passe par R et T : c'est le triangle équilatéral. Au delà, plus de solutions, $g(x)$ et $f(x)$ ne se coupent plus entre les valeurs limites de x , $1/2$ et $1/\sqrt{2}$.

En cherchant directement sur un triangle isocèle la condition pour que le côté coupé par les deux droites soit la base, on trouve $A = 2 \arctg 9/16 = 2 \arccos 0,56/1,0784$.

4.3.4. $r < 1$ - Deux solutions ou une seule.

Pour $r < 1$, il existe une plage de valeurs pour lesquelles on a également deux solutions.

Considérons par exemple les courbes $g(x)$ de la fig.4.5. où $r = 0,9658$. Pour $A \approx 58,42^\circ$, il y a tangence entre $g(x)$ et $f(x)$, d'où deux solutions confondues: $x = 0,55$; $y = 0,6515$.(*)

Ensuite, deux solutions asymétriques jusqu'à ce que $g(x)$ passe par R où $\cos A = 1/2r$ et $A \approx 58,82^\circ$. Quand A augmente encore, une seule solution jusqu'à ce que $g(x)$ passe par T où $\cos A = r/2$ et $A \approx 61,13^\circ$.

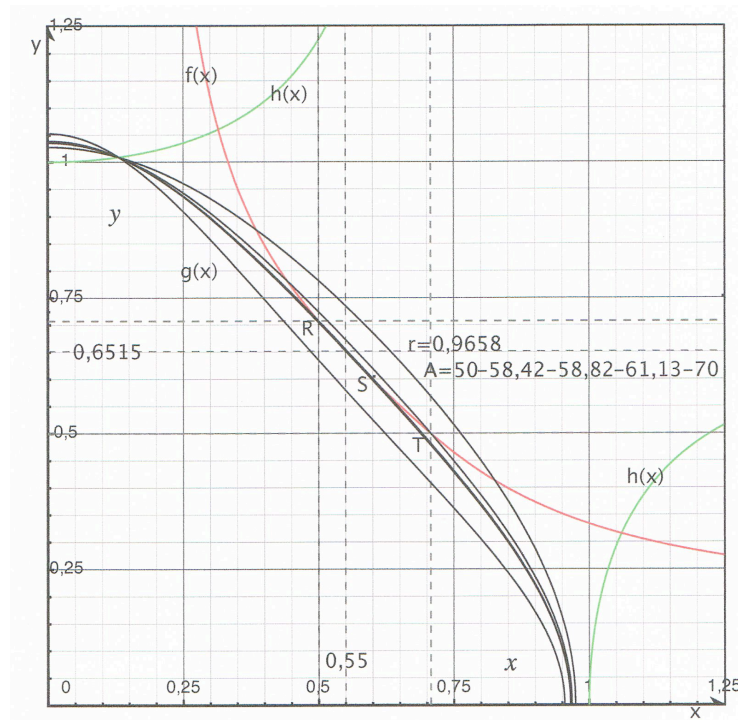


Fig.4.5.

Donc, quand r varie, le point de tangence peut aller de $S(r=1)$ jusqu'à R où on obtient, en égalant les dérivées de $g(x)$ et $f(x)$ (calculées avec (4.3) et (4.8)), la valeur minimum de r pour avoir tangence:

$$r = \sqrt{2 + \sqrt{2}} / 2 \approx 0,9239 \quad \text{avec} \quad \cos A = 1/2r \quad \text{d'où} \quad A \approx 57,23^\circ \quad (4.11)$$

Au delà, quand A croît, une seule solution jusqu'à ce que $g(x)$ passe par T .

De même que pour $r = 1$, il existe pour les triangles ayant des solutions doubles une troisième solution correspondant à un autre angle du triangle (voir 4.4. ci-dessous).

Dans la suite, nous appellerons «solutions doubles» (SD), celles où $g(x)$ est tangente à $f(x)$ ou la coupe en deux points, et «solutions simples» (SS) celles où il y a une seule intersection entre R et T.

4.3.5. $r < 1$ - Une seule solution.

Quand r et A sont respectivement inférieur et supérieur aux valeurs (4.11), il n'y a plus qu'une seule solution par intersection entre R et T .

4.4. Détermination du couple (A,r).

Etant donné un triangle, il faut déterminer le couple (A, r) qui donnera une SS ou une SD.

4.4.1. Solution simple.

Elle est obtenue pour des valeurs de A telles que l'intersection a lieu entre R et T et donc, suivant le para. 4.2 :

$$r/2 \leq \cos A \leq 1/2r \quad (4.12) \quad \text{d'où} \quad b \leq a \leq c$$

Le «côté double» est donc le côté moyen (ou un des côtés égaux pour un triangle isocèle).

Et la réciproque est vraie. Si on choisit le côté moyen, compte tenu du fait que l'angle opposé est $< 90^\circ$, on retrouve (4.12) et donc la SS.

D'où, conclusion: le problème a toujours au moins une solution.

4.4.2. Solution double.

La SD est obtenue pour A tel que:

$$1/2r < \cos A \quad \text{d'où} \quad a < b$$

Le «côté double» est donc le petit côté du triangle puisqu'on a convenu que $b \leq c$.

Mais seules certaines valeurs du couple (A,r) donnent une SD. Pour r donné, A est compris entre ses valeurs au point de tangence et en R. En ce point, A est donné par $\cos A = 1/2r$. Au point de tangence, A est obtenu par la méthode du para.(4.3.1.) et la fig.4.6.b. représente la plage PNQ des couples (A,r) qui donnent une SD. PN y donne les valeurs de A en R (suivant $\cos A = 1/2r$) et PQ au point de tangence. Cette plage de valeurs montre que les triangles avec SD sont tous proches de l'équilatéral: les valeurs extrêmes pour A sont $57,23^\circ$ et 60° ; pour r 0,9239 et 1. La fig.4.6.a donne l'ensemble des valeurs de (A,r) pour lesquelles on aura 0, 1 ou 2 solutions.

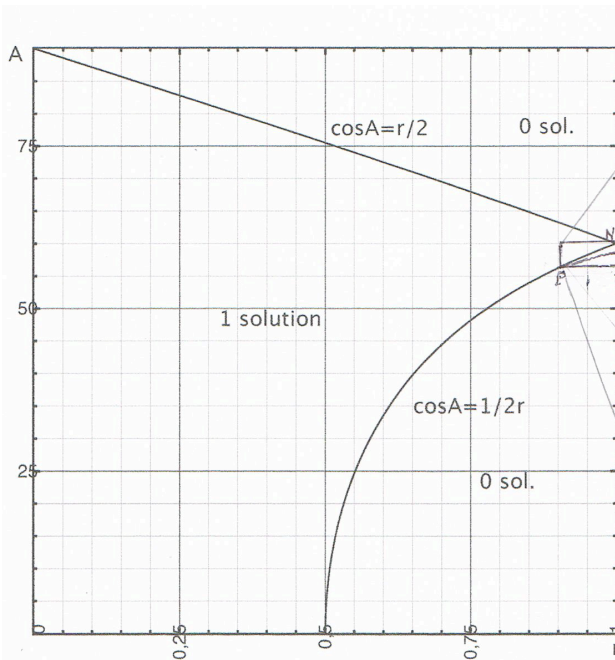


Fig.4.6.a

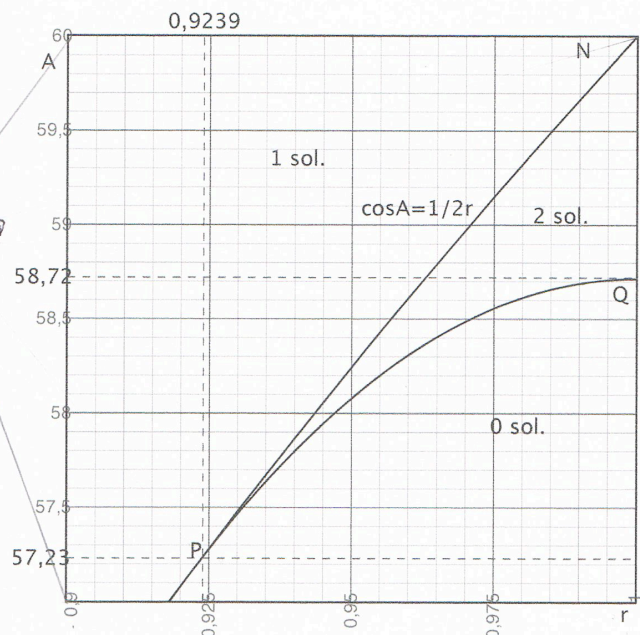


Fig.4.6.b

4.4.3. A = f(r) pour x donné.

La fig. 4.7. représente les courbes $A = \arccos \sqrt{\frac{r^2(1-2y^2) - (1-2x^2)}{r[1+(1-2y^2)(1-2x^2)]}}$ avec

$y = x/(4x-2+R)$ pour des x donnés allant 0,5 à $1/\sqrt{2}$. On y voit clairement l'entre-croisement

des courbes donnant deux valeurs à x pour un couple (A,r) , quand $r \geq \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et A inférieur à $\arccos 1/2r$.

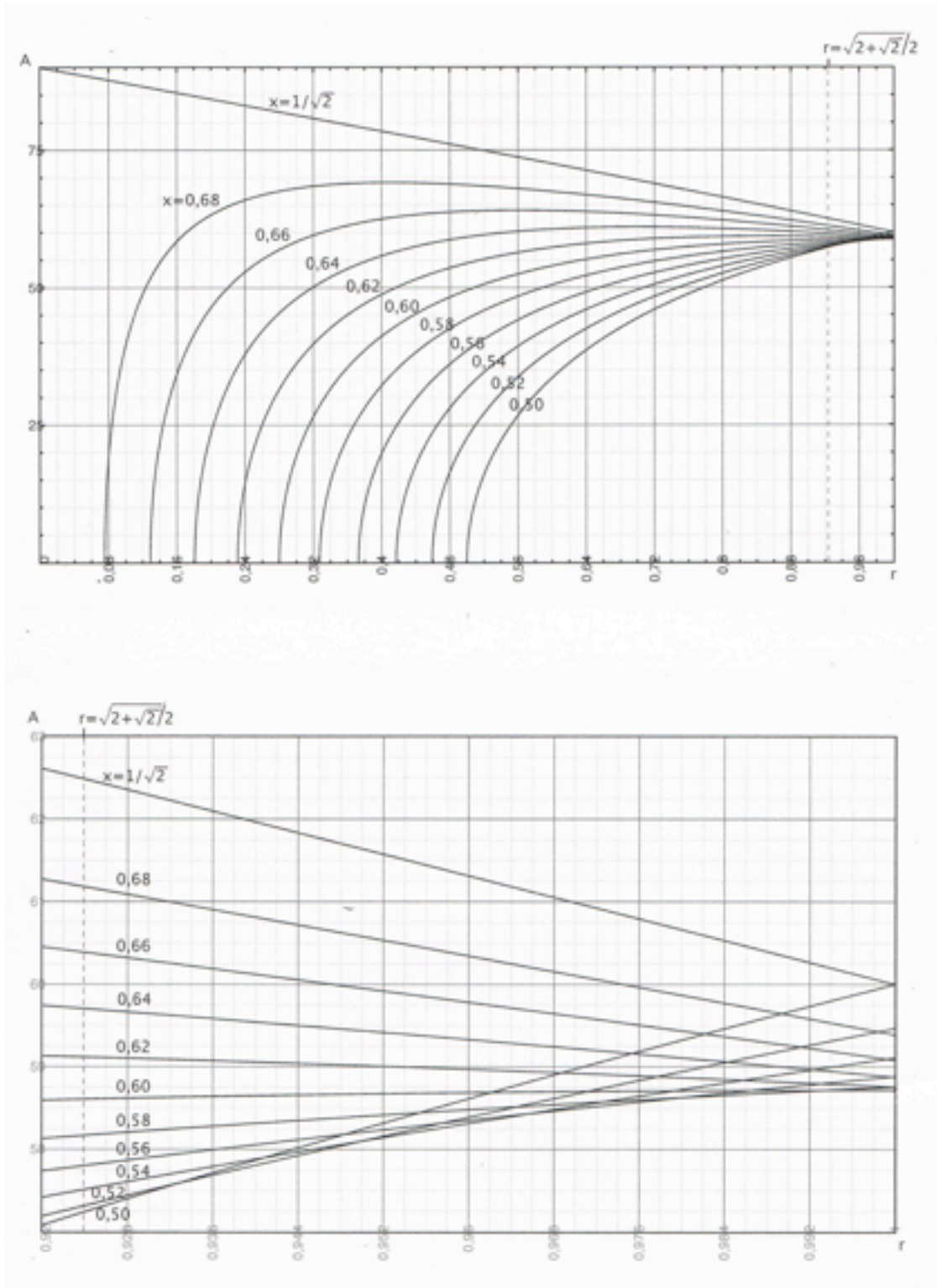
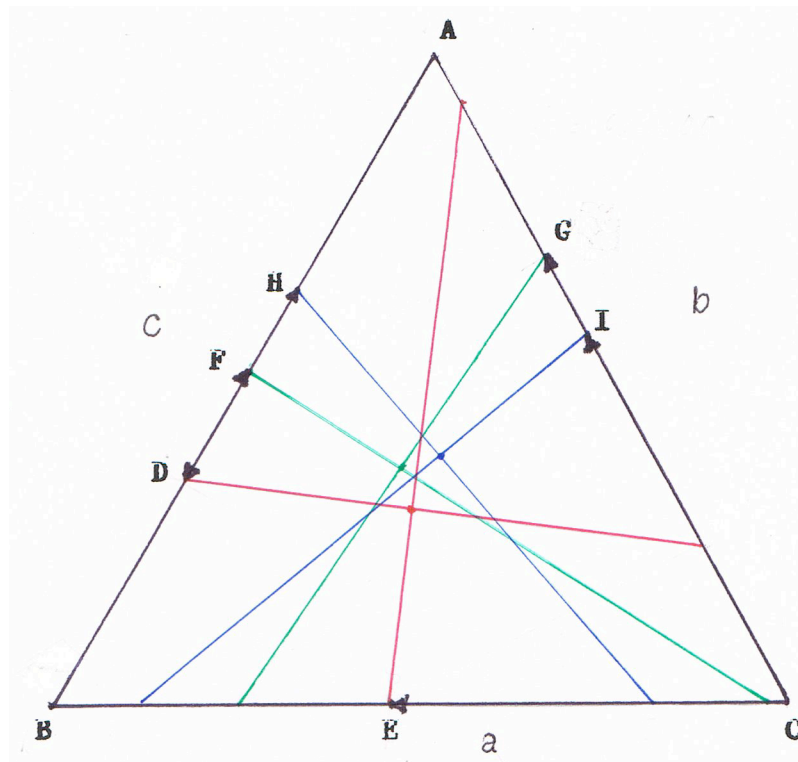


Fig.7

4.4.4. Exemple avec 3 solutions.



$$c = 1$$

$$b = 0,9800 = b/c = r_A$$

$$a = 0,9752 = a/c = r_B$$

$$C = 61,52^\circ$$

$$B = 59,48^\circ$$

$$A = 59,00^\circ$$

Les flèches indiquent à partir de quel «côté double» il faut porter les x et les y .

La solution simple (B, r_B) est en rouge: $y = 0,5440$ (E); $x = 0,6580$ (D)

La solution double (A, r_A) est:

- en vert: $y = 0,6885$ (G); $x = 0,5162$ (F)

- en bleu: $y = 0,5687$ (I); $x = 0,6319$ (H)

-----0-----