ECLAIRCISSEMENTS CONCERNANT LE PROBLEME GEOMETRIQUE DE LA QUADRIPARTITION DU TRIANGLE

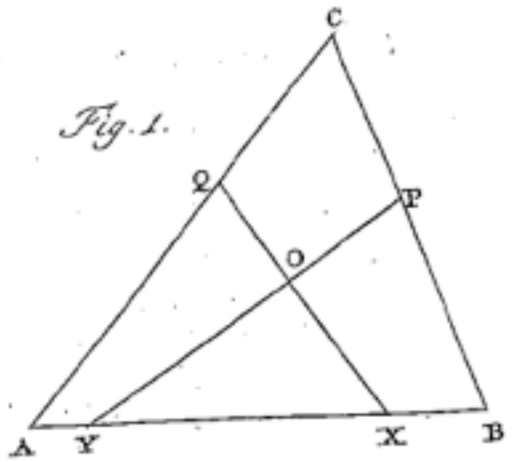
TRAITE EN SON TEMPS PAR JACOB BERNOULLI

PAR L'AUTEUR
L. EULER

Edité le 3 Mai 1779

(Traduction du latin et note par G.Lobet)

1. Le problème s'énonce: diviser l'aire d'un triangle quelconque ABC en quatre parts égales par deux droites XP et YQ se coupant perpendiculairement. Pour sa solution, nous appelons les côtés du triangle AB=c, AC=b et BC=a, et les angles A=α,B=β,C=γ. En outre, nous posons l'aire totale du triangle égale à k^2, d'où: $k^2=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$.



2. Ensuite, afin de réduire le nombre des données, étant donné que les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés, on peut écrire: a=nk sinα, b=nk sinβ, c=nk sinγ. En introduisant ces valeurs dans les formules précédentes, nous réduisons tout à cette équation : $n^2 = 2/\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, de telle façon que les côtés du triangle peuvent s'écrire comme suit: $a=\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$; $b=\sqrt{\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}}$; $c=\sqrt{\frac{2\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}$.
De cette manière, tous les éléments connus sont réduits à k et aux trois angles α, β et γ, dont, si deux sont connus, le troisième se déduit.

3. Ceci noté, nous abordons le problème. Et d'abord, nous commençons par le côté AB sur lequel les extrémités X et Y des deux droites se trouvent, et où nous appelons AX = x ; BY = y et XY = z; d'où, comme AB = c, on a: c = x+y-z et de même z = x+y-c.
Comme enfin le triangle XOY est rectangle en O, posant YXO=ϕ, on aura

l'angle XYO=90°-ϕ et les côtés XO=z cosϕ et YO=z sinϕ. L'aire du triangle XOY sera $z^2 \frac{1}{2} \sin\phi\cos\phi$. Comme cette aire doit être le quart de l'aire totale k^2, on aura l'équation:

$k^2 = 2z^2\sin\phi\cos\phi = z^2\sin 2\phi$ d'où: $z = k/\sqrt{\sin 2\phi}$

4. Considérons maintenant le triangle AXQ dont l'aire doit être égale à $k^2/2$,d'où cette proportion: sin AQX/AX = sin A/QX, soit: $\sin(\alpha+\phi)/x = \sin\alpha/QX$ d'où QX et l'aire du triangle AXQ sera: $x^2 \sin\alpha \sin\phi/2\sin(\alpha+\phi)$ qui, égalé à $k^2/2$ donne: $x^2 = k^2 \sin(\alpha+\phi)/\sin\alpha\sin\phi$.
Nous réduisons cette expression à celle-ci: $x = k\sqrt{\cot\alpha+\cot\phi}$.

5.De même, pour le triangle BPY, où nous avons la proportion sinBPY/BY=sinβ/PY, soit: $\cos(\phi-\beta)/y = \sin\beta/PY$ d'où PY et l'aire du triangle PBY = $y^2\sin\beta\cos\phi/2\cos(\phi-\beta)$, soit $k^2/2 = y^2\sin\beta\cos\phi/2\cos(\phi-\beta)$ d'où on obtient: $y = k\sqrt{\cot\beta+tg\phi}$.

6. Nous réduisons ainsi les trois inconnues x, y et z à la quantité k et à l'angle inconnu ϕ.
Et parce que $c = k\sqrt{\frac{2\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}$, l'égalité z = x+y-c nous amène, après division par k, à cette équation finale: $\sqrt{\cot\alpha+\cot\phi}+\sqrt{\cot\beta+tg\phi}-\sqrt{\frac{2\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\phi}}$.
Et comme γ=180°-α-β d'où sin γ = sin($\alpha+\beta$), on aboutit à l'équation suivante:

$$\sqrt{\cot\alpha+\cot\phi}+\sqrt{\cot\beta+tg\phi}-\sqrt{2(\cot\alpha+\cot\beta)}=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\phi}}$$

7. Afin de ramener cette forme avec angles à des quantités simples, nous posons cotα = f, cotβ = g et tgϕ = t. D'où, comme $\sin\phi=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, et \cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, on a $\sin 2\phi=\frac{2t}{1+t^2}$.
Et en introduisant ces valeurs, notre équation prend cette forme:

$$\sqrt{f+\frac{1}{t}}+\sqrt{g+t}-\sqrt{2(f+g)}=\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$$

d'où on peut tirer la valeur de t qui sera évidemment déterminée par les deux données f et g.

8. Après que la valeur de t aura été trouvée, voyons comment sont définis tous les éléments pour lesquels la solution est satisfaite. Et d'abord, il y a l'angle ϕ ou tg ϕ = t. Ensuite,

introduisant l'aire du triangle, soit k^2, nous avons le segment AX = $x = k\sqrt{\cot\alpha+\cot\phi}$ et BY = $y = k\sqrt{\cot\beta+tg\phi}$. Nous en déduisons les segments AQ = x sinϕ/sin($\alpha+\phi$) et BP = y cosϕ/cos($\phi-\beta$). Les points X, Y, P et Q trouvés, le tracé des droites XQ et YP résout parfaitement le problème.

9. Cela étant, il reste à sortir de l'irrationalité l'équation finale du point 7. Ce qui peut se faire

en recourant à de multiples quadratures, de telle manière qu'on arrive à une équation à plusieurs dimensions mais qui, pratiquement, ne serait pas d'une grande utilité. Parce que, en effet, si un triangle quelconque est proposé dont, pour les deux angles α et β, les quantités f et g peuvent être connues par fractions, rien n'empêche de sortir de l'équation irrationnelle elle-même une valeur au moins proche de t: la figure étant dessinée grosso-modo, une valeur de t ne différant pas trop de la vérité peut être estimée. Ensuite en attribuant à t deux valeurs tantôt plus grande, tantôt plus petite, puis des deux erreurs déduire une valeur plus proche. D'où, en répétant l'opération plusieurs fois, une valeur de t proche de l'exacte sera connue assez vite.

10. Concernant la solution du problème, il faut avant tout faire attention à inclure certaines conditions qui n'ont pas été considérées dans les calculs ci-dessus et qu'il importe de joindre aux formules trouvées avant que l'étude d'un cas précis soit entreprise. Il doit évidemment être supposé que les points X et Y tombent à l'intérieur de la base AB ou, au moins ne tombent pas en dehors. Il faut donc que les deux segments AX = x et BY = y auxquels correspondent $\sqrt{f+\frac{1}{t}} et \sqrt{g+t}$ soient plus petits que la base AB = c à laquelle correspond $\sqrt{2f+g}$. Et donc ces deux conditions doivent être satisfaites:

$$\sqrt{f+\frac{1}{t}} < \sqrt{2(f+g)} \quad \text{et} \quad \sqrt{g+t} < \sqrt{2(f+g)}$$

En outre, pour que la solution réussisse, il faut que la valeur de t, comprise entre ces deux valeurs, satisfasse l'équation trouvée en 7. où les quatre radicaux qui, ailleurs en analyse sont d'habitude ambigus, n'admettent ici aucune ambiguïté et les quantités x,y et z doivent en conséquence être positives.

11. Ensuite, il faut d'abord $\sqrt{f+\frac{1}{t}}<\sqrt{2(f+g)}$ soit $f+\frac{1}{t}<2f+g$ d'où $t>\frac{1}{f+2g}$. De même, comme $\sqrt{g+t}<\sqrt{2(f+g)}$, on aura $t<2f+g$, d'où il est évident que toute valeur de t ne peut être admise que si elle est contenue dans ces limites. Mais si on donne pour t une telle valeur, qui satisfasse ou non notre équation, comment l'utiliser dans un problème particulier? Ici, il convient de distinguer deux cas selon que f et g sont soit positives ,soit l'une ou l'autre négative. Car, en effet, f et g sont les cotangentes des angles A = α et B = β et elles seront positives pour autant que les deux angles soient aigus et, comme un seul de ces angles peut être obtus, l'une ou l'autre peut s'avérer négative. Mais on peut expliquer les deux ensemble dans le problème suivant.

PROBLEME I

Etant donné des cotangentes f et g quelconques, chercher les conditions sous lesquelles il peut être possible de satisfaire au problème proposé de telle façon que les points X et Y tombent dans la base AB.

12. Puisque nous envisageons de faire tomber la valeur de t, par laquelle on désigne la tangente de l'angle AXQ, entre les limites 1/(f+2g) et 2f+g, nous attribuons successivement

à t ces deux limites et nous voyons de combien, pour chacune, notre équation diffère de sa valeur exacte. S'il arrive que l'une de ces erreurs soit positive, l'autre négative, nous pourrions certainement conclure qu'il existe entre ces limites une valeur de t qui n'entraîne aucune erreur et résoudrait donc parfaitement notre problème.

13. Nous commençons par la limite supérieure t = 2f+g d'où $\sqrt{g+t} = \sqrt{2(f+g)}$ et il faut de plus $\sqrt{f+\frac{1}{2f+g}} = \sqrt{\frac{1+(2f+g)^2}{2(2f+g)}}$. Et, en éliminant les radicaux:

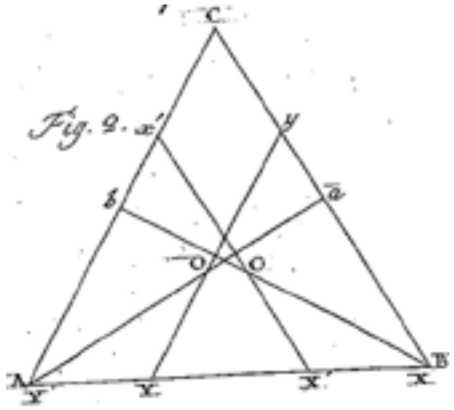
$$\frac{2f^2+fg+1}{2f+g} = \frac{1+4f^2+4fg+g^2}{4f+2g}\text{, d'où } 1-2fg-g^2=0 \text{ soit } f=\frac{1-g^2}{2g}.$$

14. Examinons de la même façon l'autre valeur $t=\frac{1}{f+2g}$,cas où le 1er terme de l'équation est égal au 3e, de sorte que le 2e doit être égal au 4e, soit $g+t=\frac{1+t^2}{2t}$. En substituant, on obtient: $g+\frac{1}{f+2g} = \frac{fg+2g^2+1}{f+2g} = \frac{1+f^2+4fg+g^4}{2(f+2g)}$ d'où $1-2fg-f^2=0$ soit $f=-g+\sqrt{g^2+1}$, où le signe + est valable, f ne pouvant être négatif.

15. Donc si f avait la valeur inférieure, la première limite de t serait admise; si c'était la supérieure, l'autre limite conviendrait. D'où il s'ensuit que si f avait quelque valeur intermédiaire, on pourrait aussi donner à t une valeur intermédiaire qui conduirait à la solution. Et si les deux limites trouvées pour f étaient égales, on aurait g = $1/\sqrt{3}$ auquel cas β = 60°.

16. Mais si β = 60°, les limites pour f sont aussi égales à $1/\sqrt{3}$, un autre cas ne serait donc possible que si, de même, α = 60°, de telle manière que, si cet angle était soit supérieur, soit inférieur, le côté AB ne pourrait être accepté comme celui où les deux points X et Y pourraient se trouver. Mais si les deux angles α et β étaient de 60°, auquel cas le triangle serait équilatère, pour l'angle ϕ ou sa tangente, les deux valeurs trouvées ci-dessus seraient satisfaites aussi bien t = $1/\sqrt{3}$ que t = $\sqrt{3}$. Pour le premier cas en effet notre équation sera $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ qui est évidemment vérifiée. Pour l'autre cas où t = $\sqrt{3}$ on aura $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ qui est aussi vérifiée. Donc ici une double quadrisection existe car, parce que x = c, y = $\frac{c}{\sqrt{2}}$ et ϕ = 30° la droite Bb est la bissectrice de l'angle B et

la droite Yy parallèle à AC. Ensuite,parce que x =c/$\sqrt{3}$, y = c et ϕ = 60°, la droite Aa est bissectrice de l'angle A et X'x' parallèle à BC; et parce que la double partition vaut aussi pour les autres côtés, le triangle équilatéral peut être divisé de trois manières en quatre parties égales.



17. Ce cas résolu, nous examinons les autres pour lesquels β est différent de 60° et donc g différent de 1/$\sqrt{3}$ et pour lesquels les deux limites trouvées pour f s'éloignent l'une de l'autre, ce qui s'exprime comme suit: étant donné que g = cotβ et f = cotα , on note que $\sqrt{1+g^2}-g$ = tgβ/2, d'où de même il faut f = cotα = tgβ/2 soit tg(90°- α) = tgβ/2 d'où on aura α = 90°- β/2. Pour l'autre limite f = (1-g^2)/2g on note cot2β = (g^2-1)/2g soit cot (180°-2β) = (1-g^2)/2g = cotα d'où α = 180°-2β.

18. L'angle β étant connu, le côté AB ne peut être accepté comme base que si α est compris entre les limites 90°- β/2 et 180°- 2 β. Mais si l'angle α est donné,il faut que β soit compris entre 90°-α /2 et 180°-2α . Afin que ces conditions puissent être présentées clairement dans n'importe quel cas, nous ajoutons la table suivante qui donne les limites pour β, en fonction des angles α croissant par 10°.

Angle α	Limites pour l'angle β	
	Première	Seconde
0	90	180
10	85	160
20	80	140
30	75	120
40	70	100
50	65	80
60	60	60
70	55	40
80	50	20
90	45	0

19. Une autre présentation peut être obtenue de ces conditions, étant donné que les deux intervalles x et y doivent être plus grands que l'intervalle XY = z qui correspond au 4e terme

de notre équation. Afin de faire apparaître ces limites, considérons d'abord le cas où x = z, soit le1er terme égal au 4e: f+1/t = $(1+t^2)$ /2t d'où f = (t^2-1) /2t = cot(180°-2ϕ). Et puisque f = cotα , on a, pour cette limite, α = 180°-2ϕ d'où ϕ = 90°- α /2. Pour l'autre limite, nous faisons g+t = $(1+t^2)$/2t soit g = $(1-t^2)$/2t = cot2ϕ et donc, comme g = cotϕ, on aura β = 2 ϕ et l'autre limite ϕ = β /2. D'où nous déduisons que l'angle ϕ doit se trouver entre β/2 et 90°- α/2.

20. Enfin, en admettant que ces mêmes limites satisfont notre équation, nous devrions retrouver pour les angles α et β, soit f et g, des limites qui concordent parfaitement avec celles trouvées auparavant. La première limite était f = (t^2-1)/2t, d'où t = f+ $\sqrt{f^2+1}$ et puisque le 1er terme est égal au 4e, le 2d doit l'être au 3e, soit g+t = 2f+2g, d'où t = 2f+g valeur qui, égalée à celle ci-dessus, donne g = -f+$\sqrt{f^2+1}$ d'où on tire f = $(1-g^2)$/2g qui était la valeur supérieure trouvée auparavant. L'autre limite intervenant ici est g = $(1-t^2)$/2t parce que le 2d terme est égal au 4e, et afin que le 1er soit égal au 3e, il faut 1/t = f + 2g d'où t = 1/(f+2g). C'est pourquoi, comme 2g = 1/t -t, la substitution dans l'autre valeur donne 2g = f+2g-1/(f+2g), soit f-1/(f-2g) = 0 d'où on tire f = -g+$\sqrt{g^2+1}$ qui est l'autre limite pour f trouvée ci-dessus.

21. Jusqu'ici, nous avons supposé que ces limites satisfont l'équation. Mais maintenant, nous examinons les erreurs qui naîtraient à l'une ou l'autre limite pour la solution trouvée pour t. La limite inférieure trouvée pour t était t = 1/(f + 2g) valeur qui, si elle ne satisfait pas l'équation, c'est à dire si le 2e terme n'est pas égal au 4e, l'erreur peut se présenter ainsi: $g+t-\frac{1+t^2}{2t}$ où, en remplaçant t et 1/t par leur valeur donne $\frac{1-2fg-f^2}{f+2g}$.

22. De la même manière pour l'autre limite t = 2f + g qui égalait le 2e terme au 3e, l'erreur tirée de la même règle est $2f+\frac{2}{t}-\frac{t^2+1}{t}$ soit $2f+\frac{1}{t}-t$ où, en remplaçant t par sa valeur, on obtient $\frac{1-2fg-g^2}{2f+g}$. Il faut ici noter que les limites ci-dessus entre f et g sont déterminées de telle manière que si l'une est positive, l'autre est négative.(*)

23.Cela étant, entre les limites trouvées pour t qui sont t = 1/(f+2g) et t = 2f+g, une certaine valeur médiane existe dont l'erreur serait nulle. Parce que si nous supposons que la progression à partir d'une erreur positive vers une négative est uniforme (hypothèse qui, le plus souvent, différera peu de la vérité), on pourra en tirer une vraie valeur de t suffisamment exacte en posant cette proportion: la 1ère erreur - la 2de est à la différence entre la valeur inférieure de t et la supérieure comme la 1ère erreur est à la quantité cherchée , qui doit ensuite être déduite de la valeur inférieure de t:

$$\left(\frac{f-g}{(2f+g)(f+2g)}-f+g\right) \;/\; \frac{1-2f^2-5fg-2g^2}{f+2g}=\frac{1-2fg-f^2}{f+2g} \;/\; (\text{ quant.cherchée})$$

(*) Note: l'erreur pour la limite inférieure est positive pour les valeurs de β de la table du § 18., la supérieure négative et inversément pour les valeurs de la table du § 25.

Nous réduisons d'abord le premier antécédent à cette forme: $\dfrac{(f-g)(1-2f^2-5fg-2g^2)}{(2f+g)(f+2g)}$

d'où la proportion se ramène à: $\dfrac{f-g}{2f+g}=\dfrac{1-2fg-f^2}{f+2g}\Big/$ (quant.cherchée), qui, après calcul, égale à $\dfrac{(2f+g)(1-2fg-f^2)}{(f-g)(f+2g)}$ et en la soustrayant de la première valeur de t soit 1/(2f+g), on arrive à cette forme: $\dfrac{f(2f+g)(f+2g)-(f+2g)}{(f-g)(f+2g)}=\dfrac{f(2f+g)-1}{f-g}$.

24. Donc, un cas étant proposé pour lequel les conditions imposées entre f et g se vérifient, pour le résoudre nous pouvons toujours attribuer à t la valeur $\dfrac{f(2f+g)-1}{f-g}$ trouvée de cette manière, qui s'éloigne peu de la valeur réelle. Si on attribue alors à t une autre valeur peu différente de celle-là et que l'on en tire l'erreur qui en résulte, de ces deux erreurs on peut facilement tirer une valeur de t beaucoup plus juste,de telle façon que, si on souhaite plus de précision, en répétant la même opération, il soit possible d'arriver au résultat souhaité.

25. Nous n'avons pas continué le tableau ci-dessus au delà de α = 90° parce que la limite supérieure pour β s'avérait négative. Cependant tous les angles de notre triangle sont nécessairement positifs. Donc quand l'angle β est inférieur à la première limite, dans le but d'être complet, nous rattachons le tableau suivant au premier en y inscrivant la limite supérieure.

Angle α	Limites pour l'angle β	
	Première	Seconde
90	45	0
100	40	0
110	35	0
120	30	0
130	25	0
140	20	0
150	15	0
160	10	0
170	5	0
180	0	0

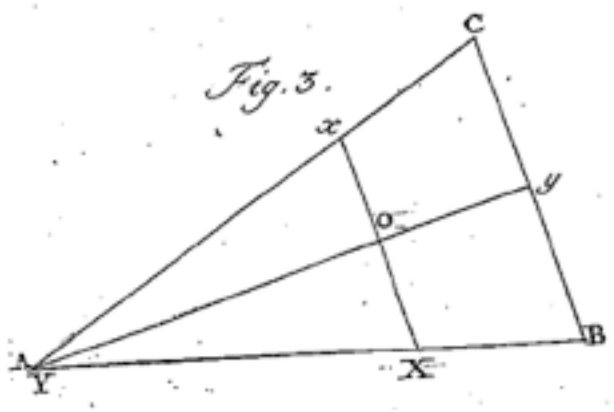
PROBLEME II

Trouver les conditions sous lesquelles les côtés latéraux du triangle peuvent être acceptés, en plus de AB, comme base sur laquelle tombent les deux points X et Y.

26. Nous posons donc que, en plus du côté AB = c, le côté AC = b puisse être considéré

comme base et comme l'angle A = α , il est nécessaire que les deux angles B = β et C = γ tombent entre les limites 90°- α /2 et 180°-2 α . Comme cependant $\beta + \gamma$ = 180°- α dont la moitié est 90°- α /2, un angle sera d'autant plus grand que l'autre sera plus petit; d'où il est évident que si l'un tombe entre ces limites, l'autre tombera certainement dehors. Il s'ensuit donc qu'on ne peut jamais avoir deux côtés différents comme base AB, sauf dans le cas où le triangle est isocèle, où chaque angle est égal à90°- α /2.

27. Seuls, en effet, les triangles isocèles jouissent de cette propriété: leurs deux côtés égaux peuvent être acceptés comme base AB, et la solution du problème ne présente dans ce cas aucune difficulté. En effet, si β = 90°- α /2, comme g = cot β , on aura tg α /2 = g d'où tg α = 2g/(1-g^2) et cot α = (1-g^2)/2g. C'est pourquoi l'équation devant être satisfaite, on aura: $\sqrt{\frac{1-g^2}{2g}+\frac{1}{t}}+\sqrt{g+t}=\sqrt{\frac{1+g^2}{g}}+\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$. Et si maintenant nous posons le 2[e] terme égal au 3[e], on en tire t = 1/g, et ainsi le 1[er] terme sera de même égal au 4[e]. Et on ne peut attendre une autre solution que celle-là qui puisse n'admettre dans aucun membre une ambiguïté de signe.



28. Comme pour cette solution nous avons t = 1/g, on aura tg ϕ = tg β et donc l'angle AXO = l'angle ABC, d'où la droite sécante Xx sera parallèle à BC, qui est la base naturelle du triangle isocèle dont les côtés AB et AC sont égaux. En ce qui concerne l'emplacement des points X et Y, nous avons déjà observé que le 1[er] terme de l'équation qui, par t = 1/g, est $\sqrt{\frac{1+g^2}{2g}}$ se rapporte au segment AX, le 2[e] $\sqrt{\frac{1+g^2}{g}}$ au segment BY, le 3[e] $\sqrt{\frac{1+g^2}{g}}$ au côté AB = c, le 4[e] enfin au segment XY. Et si AB = c, on a AX = c/$\sqrt{2}$, BY = c, XY = c/$\sqrt{2}$. C'est pourquoi le point Y tombe en A et pour X, le segment AX étant tel que AX/AB = 1/$\sqrt{2}$, l'autre droite sécante sera Xx parallèle à BC et l'autre normale à celle-là, Yy, coupe en deux à la fois l'angle A et le côté opposé BC. Et cette solution, qui peut être appliquée à d'autres triangles, est la seule qui puisse être admise.

29. Dans tous les autres triangles scalènes, il ne peut exister plus d'un côté qui puisse être accepté comme base AB. On peut toutefois se demander si un tel côté existe dans tous les triangles, ce que nous démontrons dans le théorème suivant.

THEOREME

Dans tout triangle,en tout cas scalène, il existe toujours un côté qui peut être admis pour notre base AB, lequel est moyen entre les trois côtés, de telle sorte que ni le plus grand, ni le plus petit ne peuvent jamais convenir à cette fin.

Démonstration

30. Parce que dans tout triangle le côté moyen est opposé à l'angle moyen, il est compris entre le grand angle et le petit.En posant A = α, minimum et l'autre B = β, maximum, et donc $\alpha < \gamma < \beta$, il faut démontrer que la solution de notre problème peut toujours être attribuée au côté AB.

31. Comme dans tout triangle le petit angle est toujours inférieur à 60°, nous posons $\alpha =$ 60°-p et, le grand étant toujours supérieur à 60°,nous posons β=60°+q et le moyen sera γ =60°-p+q. Comme il faut que $\gamma > \alpha$ il s'ensuit que q < 2p. Ensuite parce qu'il faut $\gamma < \beta$, il sera nécessaire que q >1/p et donc que q soit contenu entre les limites p/2 et 2p.

32. Donc, comme on a α = 60°-p, pour avoir une solution avec les données ci-dessus, il faut que β soit contenu entre les limites 90°-α/2 = 60°+p /2 et 180°-2α = 60°+ 2p. Et donc comme β = 60°+q, étant donné que p/2 < q < 2p, il est évident que β sera en tout cas contenu entre les limites imposées et ainsi on peut toujours trouver une solution, ce que nous montrons avec plusieurs exemples.

EXEMPLE I

33. *Soit le triangle rectangle ABC, dont les côtés sont AB = 2, BC = 1 et donc AC =* $\sqrt{5}$ *, qu'il faut diviser en quatre parties égales par deux droites normales entre elles.*

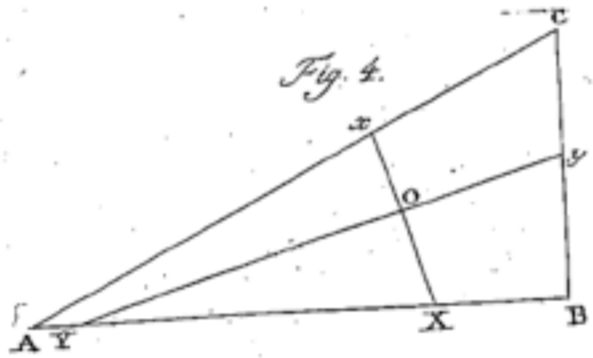
Comme AB est le côté moyen, qui est pris pour base, et comme f = cotα, on aura f = 2 et parce que g = cot β, on aura g = 0. L'équation sera donc: $\sqrt{2+\frac{1}{t}}+\sqrt{t}=2+\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$ pour laquelle il faut chercher la valeur convenable de t. Nous avons vu que les deux limites entre lesquelles t doit se trouver sont t = 1/2 et t = 4 dont aucune ne satisfait. Afin de faciliter la séquence de calcul, nous désignons l'erreur par E, soit E = $\sqrt{2+\frac{1}{t}}+\sqrt{t}-2-\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$.

Pour la première limite t = 1/2, l'erreur sera E = 1/$\sqrt{2}$ - $\sqrt{5}$/2 = -0,410927 qui est donc négative. L'autre limite t = 4 donne E = 0,042262.

Mais ci-dessus, nous avons trouvé une valeur plus proche t = $\frac{f(2f+g)-1}{f-g}$ = 7/2 où l'erreur sera E = $\sqrt{\frac{16}{7}}+\sqrt{\frac{7}{2}}-2-\sqrt{\frac{53}{28}}$ =0,006875. Si ensuite nous comparons cette erreur avec la précédente pour t = 4, nous pouvons en tirer une valeur beaucoup plus proche. Comme t = 4 donne E = 0,042262 et t = 3,5 donne E = 0,006875, il est évident que la vraie valeur de t est inférieure 3,5, et pour la trouver, nous posons la proportion: 35387 : 5 = 6875 : 0,098214, terme qui, soustrait de la valeur 3,5 donne une valeur t = 3,40186 à peine différente de la vraie. Ensuite, pour cette valeur approchée, nous voyons de combien elle diffère de la vraie. Comme 1/t = 0,293962,on a $(1+t^2)/2t$ = 1,8483. D'où ensuite nous tirons les termes de l'équation pris séparément, qui seront $\sqrt{2+\frac{1}{t}}$ = 1,5146, $\sqrt{t}$ =1,8444, dont la somme 3,3590.

Et comme 2+$\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$ = 3,35956, l'erreur est -0,00056 qui peut être considérée comme nulle.

Ensuite comme le 3^e terme du dernier calcul se rapporte à la base AB = 2, le 1er terme donne le segment AX = 1,5146, le 2d le segment BY = 1,8444 et le dernier XY = 1,35956. D'où la quadripartition du triangle peut être pratiquement représentée. Comme t = 3,4018 = tg ϕ, ϕ sera égal à 73°37', angle sous lequel Xx doit être incliné sur la base.



EXEMPLE II

34. *Etant donné un triangle dont les angles sont α = 50°, β = 70°, γ = 60°, trouver, sur le côté moyen AB, les deux points X et Y à partir desquels on peut exécuter la quadripartition du triangle.*

Pour ce triangle nous avons f = cotα = 0,8390996 et g = cotβ = 0,3639702; d'où le 3^e terme = $\sqrt{2(f+g)}$ = 1,5511740. Il faut maintenant chercher la valeur de t = tgϕ, en débutant parles deux valeurs extrêmes.

Nous posons d'abord le 1er terme égal au 3^e : 1/t = f+2g = 1,5770400 d'où on tire t = 0,634100, soit ϕ = 32°22'. Comme ensuite 1/t +t = 2,211140, d'où le 4^e terme $\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$ = 1,05143. Puis comme g+t = 0,99807, le 2^e terme sera $\sqrt{g+t}$ = 0,99904 duquel le 4^e étant soustrait, on trouve E = -0,05239.

De la même manière, nous égalons le 2^e terme au 3^e ce qui fait t = 2f+g = 2,0421694 d'où 1/t = 0,489675. On aura ensuite t+1/t = 2,531844 et le 4e terme $\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}}$ = 1,125132. Pour le 1er terme, f+1/t = 1,328775 , d'où la racine 1,152725 et en soustrayant le 4^e, E = 0,027593.

De ces deux erreurs on déduit une valeur plus proche de t = 1,55644, d'où t+1/t=2,19893 et donc le 4^e terme = 1,04734 et ainsi la somme des 3^e et 4^e termes sera 2,59851 qui doit être égale à la somme des 1^{er} et 2^e termes.

Nous avons f+1/t = 1,48159 d'où le 1^{er} terme = 1,21721. De même ,par g+t = 1,92041 le 2^e terme sera = 1,38579 et donc leur somme = 2,60300 et après soustraction du 3^e et du 4^e reste l'erreur E = 0,00449. Nous comparons cette erreur avec le cas t = 2,04217, et comme:

Pro + t = 2,04217	erreur = +2759
Pro + t = 1,55644	erreur = +449

il est évident que la vraie valeur de t doit tomber sous la deuxième et, pour la trouver, nous posons la proportion 2310 / 449 = 0,48573 / 0,09441 d'où la valeur proche t = 1,46203.

Nous recommençons l'opération et, comme t = 1,46208, on aura 1/t = 0,68398 et t+1/t = 2,14604 d'où on tire le 4^e terme = 1,03586, de même 3^e +4^e = 2,58703. Ensuite comme f+1/t = 1,52306 et g+t = 1,82605, on aura le 1^{er} = 1,23412 , le 2d = 1,35130 et leur somme = 2,58542 d'où l'erreur E = 0,00161.

Ensuite puisque t = 1,55644 donne l'erreur +449 et t = 1,46203 donne -162, la valeur proche de t devient t = 1,48701 d'où 1/t = 0,67249 et l'angle ϕ = 56°5'. Puis le 4^e terme = 1,03911, de même le 3^e plus le 4^e = 2,59028. Ensuite comme f+1/t = 1,51159, le 1^{er} terme = 1,22944 puis, par g+t = 1,85098 on aura le 2^e = 1,36051 et donc le 1^{er} plus le 2^e= 2,58995 et en soustrayant le 3^e plus le 4e, il reste l'erreur -0,00033 qu'il est permis de considérer nulle.

Nous trouvons donc cette solution: parce que le 3^e terme se rapporte à la base entière AB, le 1^{er} au segment AX et le 2^e au segment BY, si nous posons AB = 1,55117, on aura AX = 1,22944, BY = 1,36059, AY = 0,19066, BX = 0,32172 et l'angle ϕ = AXO = 56°5'

35. Considérer ces éclaircissements de géométrie n'a pas été stérile étant donné qu'il s'y présente de nombreuses recherches non triviales et telles que, dans d'autres problèmes, elles se présentent rarement et à peine. Mais en plus, il mérite d'être noté qu'il est peu prudent, pour la solution de ce problème, de réduire l'équation principale,qui comprend quatre radicaux, à la rationalité, parce que cette équation rationnelle renfermerait ensemble toutes les ambiguïtés de signe alors que, cependant, la nature de la question n'admet pas une telle ambiguïté.

NOTE

L'étude de Bernoulli, citée dans le titre, s'intitule «Solutio algebraica problematis de Quadrisectione Trianguli Scaleni per duas Normales rectas» (Solution algébrique de la quadripartition du triangle scalène par deux droites normales).
Ref: AE Novembris 1687- pp.617-623- Opera pp.328-335.

Dans l'introduction, Bernoulli évoque l'intérêt des mathématiciens de son époque pour ce problème et fait allusion à une solution de Christian Huygens qui l'aurait conduit à une équation du quarantième degré!

Résumé de l'étude de Bernoulli.

-Lemmes.

Soient deux droites concourantes qui coupent un triangle scalène en quatre:

I. Chacune d'elles coupe le triangle en deux;
II et III. Si ces droites sont perpendiculaires, aucune des deux ne peut passer par un sommet ni être parallèle ou perpendiculaire à un côté;
IV. Elles ne peuvent toutes deux, à la fois, couper les deux côtés d'un angle.

-Corollaire.

Ces droites doivent toutes deux couper un même côté et chacune un des deux autres côtés.
Il peut se déduire des équations trouvées que la base est le plus souvent le moyen, jamais le plus grand, rarement le plus petit.

-Analyse.

La solution se déduit d'un système de deux équations à deux variables y et x qui déterminent la position de l'intersection des droites sur la base.
La première est la condition pour que les deux droites divisent le triangle en quatre sans être nécessairement perpendiculaires. La seconde, pour qu'elles soient perpendiculaires.
On en tire une équation du 8^e degré de l'une des deux variables, apparemment sans solution analytique.

-Scolies.

I. Montre que toute solution de la première équation est valable pour tout triangle construit sur le côté a.
II. La base n'est jamais le plus grand. De la comparaison des deux autres côtés, Bernoulli déduit d'une manière peu claire, que l'un ou l'autre peut être la base ou même les deux, et il donne un exemple.
III. Dans un triangle rectangle ou obtusangle, la base est toujours le côté moyen.
IV. De limites inférieures pour les valeurs de b et c calculées, à partir des deux équations, en fonction de a, il déduit que dans les seuls triangles acutangles voisins de l'équilatéral le petit côté peut être la base.
V. N'apporte rien à la solution du problème.

Note: si on remplace x et y par x/a et y/a dans la première équation, le paramètre a disparaît et la relation est valable pour tout triangle,ce qui correspond au scolie I.

Commentaire

Faute d'une solution analytique du système des deux équations, Bernoulli s'est approché aussi près qu'il le pouvait du nombre de solutions et de leur position sur les côtés du triangle, comme le montre l'exemple du scolie II, mais il ne donne pas de méthode de calcul numérique de la solution.

L'étude se limite aux triangles scalènes, les solutions pour l'isocèle étant sans doute trop évidentes.