Weitere Untersuchungen über die Reihen, die nach den Vielfachen eines Winkels fortschreiten *

Leonhard Euler

§1 Ich werde hier erneut Funktionen solcher Art eines Winkels ϕ betrachten, welche sich in Reihen, deren Terme Kosinus von vielfachen Winkeln von ϕ enthalten, entwickeln lassen. Wenn natürlich ϕ eine solche Funktion des Winkels ϕ bezeichnet, die durch die Entwicklung einer Reihe dieser Art entstehe

$$\Phi = A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + E\cos 4\phi + \text{etc},$$

ist es klar, dass eine solche Auflösung immer gelingt, wann immer dieselbe Funktion Φ durch eine allgemeine Lösung in eine solcher Reihe verwandelt werden kann

$$\Phi = \alpha + \beta\cos\phi + \gamma\cos^2\phi + \delta\cos^3\phi + \varepsilon\cos^4\phi + \text{etc},$$

deshalb, weil alle Potenzen der Kosinus in Kosinus der Vielfachen desselben Winkels aufgelöst werden können; das gelingt bei den Potenzen der Sinus nicht, weil ja nur die geraden Potenzen in Kosinus der Vielfachen aufgelöst werden, die ungeraden Potenzen aber auf Sinus der Vielfachen geführt werden. Weil in der Tat alle Sinus sehr leicht auf Kosinus zurückgeführt werden, sie die Sachen, die ich hier behandeln werde, anzusehen sich in gleicher Weise auch auf Sinus zu beziehen.

*Originaltitel: "Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus", erstmals publiziert in „*Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 11* 1798, pp. 114-132", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16,2, pp. 333 - 353 ", Eneström-Nummer E704, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§2 Wenn die vorgelegte Funktion Φ rational oder hinreichend leicht war, werden die einzelnen Terme der Reihe, die aus ihrer Entwicklung entspringt

$$A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + E\cos 4\phi + \text{etc}$$

entdeckt, so beschaffen zu sein, dass deren Werte nur durch höchst transzendente Größen dargeboten werden können. Wenn z. B. die vorgelegte Funktion

$$\Phi = (1 - n\cos\phi)^{-\frac{3}{2}}$$

war, von deren Entwicklung fast die ganze Theorie der Astronomie abhängt, wird der erste Term der daher herstammenden Reihe A gefunden, durch diese Reihe ausgedrückt zu werden

$$1 + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot nn + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot n^4 + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{11\cdot 13}{12\cdot 12}\cdot n^6 + \text{etc},$$

deren Summation alle bis jetzt gefundenen analytischen Kunstgriffe unnütz wirken lässt; daher habe ich mich einst besonders darum bemüht, ihre Summation auf die Auflösung einer Differentialgleichung zurückzuführen, woher schließlich diese Untersuchung auf das Geschlecht der transzendenten Größen oder auf bekanntere Quadraturen von Kurven zurückgeführt werden könnte; aber auch bei dieser Arbeit habe ich die Mühe vergeblich aufgebracht. Neulich aber hatte ich die Idee, die mich zu ziemlich gefälligen Integralformeln geführt hat, in denen nicht nur der erste Term dieser Reihe A, sondern sogar alle Terme hinreichend angenehm ausgedrückt werden können, welche ich im folgenden Theorem zusammenfassen werde.

Allgemeines Theorem

§3 Wenn die Funktion Φ des Winkels so beschaffen war, dass sie sich in eine solche Reihe entwickeln lässt

$$\Phi = A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + E\cos 4\phi + \text{etc},$$

dann werden die einzelnen Größen A, B, C, D, E, etc durch die folgenden Integralformeln so bestimmt werden, wenn natürlich bei den einzelnen die Integration von der Grenze $\phi = 0$ bis hin zur Grenze $\phi = \pi$ erstreckt wird, während π die Semiperipherie des Kreises bezeichnet, dessen Radius gleich 1 ist,

$$\begin{aligned}
&1.) \quad A = \frac{1}{\pi}\int \Phi\partial\phi \\
&2.) \quad B = \frac{2}{\pi}\int \Phi\partial\phi\cos\phi \\
&3.) \quad C = \frac{2}{\pi}\int \Phi\partial\phi\cos 2\phi \\
&4.) \quad D = \frac{2}{\pi}\int \Phi\partial\phi\cos 3\phi \\
&5.) \quad E = \frac{2}{\pi}\int \Phi\partial\phi\cos 4\phi \\
&\quad \text{etc,}
\end{aligned}$$

wo angemerkt sei, dass der erste Koeffizient $\frac{1}{\pi}$ ist, während die folgenden alle $\frac{2}{\pi}$ sind.

§4 Hier wird es zuerst förderlich sein bemerkt zu haben, dass alle Integralformeln sehr leicht durch die Quadraturen hinreichend einfacher Kurven dargestellt werden können. Wenn nämlich über der geradlinigen Achse AB dem Bogen gleiche Abszissen AP genommen werden, die die Winkel ϕ messen, sodass $AP = \phi$ wird, dann aber über dieser Achse die Kurve EMF konstruiert wird, deren Ordinaten PM die vorgelegte Funktion Φ bezeichnen, dann wird die Formel $\int \Phi\partial\phi$ die Fläche $AEMP$ ausdrücken, deren Anfang in A festgesetzt wurde, wo $\phi = 0$ ist. Wenn also nun der Punkt P bis hin zu B vorwärts bewegt wird, dass $AB = \pi$ wird, dann liefert die mit $\frac{1}{\pi}$ multiplizierte Fläche $AEFB$ sofort den ersten Term der Reihe, die wir suchen. Auf ähnliche Weise werden der zweite Term B und zugleich alle folgenden konstruiert werden können, wenn die Kurve EMF so bestimmt wird, dass für den zweiten Term B die Ordinate $PM = \Phi\cos\phi$ genommen wird, für den dritten $PM = \Phi\cos 2\phi$, für den vierten $PM = \Phi\cos 3\phi$ und so weiter; dann wird nämlich die ganze Fläche $AEMF$ mit $\frac{2}{\pi}$ multipliziert diese Größen B, C, C, D, etc selbst darbieten.

§5 Weil ja auf diese Weise die Abszissen AP den Kreisbögen gleich zu nehmen sind, können diese beschreibenden Kurven nicht für algebraische gehalten werden; dennoch werden anstelle dieser Kurven algebraische eingesetzt werden können, sodass alle unsere Größen sogar durch Quadraturen algebraischer Kurven dargeboten werden können; man setze nämlich nur $\cos\phi = x$, und weil die Funktion Φ als Funktion von ϕ betrachtet werden kann, wird nun Φ eine algebraische Funktion von x sein. Weil aber daher $\partial\phi = \frac{-\partial x}{\sqrt{1-xx}}$ wird, werden wir für die erste Größe haben

$$A = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\Phi\partial x}{\sqrt{1-xx}},$$

woher die Konstruktion so durchzuführen sein wird, dass den einzelnen Abszissen $AP = x$ die Ordinaten $PM = \frac{\phi}{\sqrt{1-xx}}$ entsprechen, sodass nun die Fläche $AEMP = \int \frac{\phi\partial x}{\sqrt{1-xx}}$ sein wird, welche aber nun von der Grenze $x = 1$ bis hin zur Grenze $x = -1$ erstreckt werden muss. Hier also werden die Abszissen vom festen Mittelpunkt C aus genommen werden müssen; dann nämlich, wenn $CA = 1$ und $CB = -1$ war, wird die Fläche $AEFB$, die über der ganzen Basis AB beschrieben ist, dem Vorgelegten Genüge leisten, sodass alle diese Bestimmungen durch Quadraturen von Kurven bewältigt werden können.

§6 Nachdem diese Dinge im Voraus bemerkt worden sind, wollen wir den Beweis unseres Theorems angehen und zuerst ist klar, dass, wenn i irgendeine ganze Zahl bezeichnet, das Integral

$$\int \partial\Phi \cos i\phi = \frac{1}{i}\sin i\phi$$

so für $\phi = 0$ wie für $\phi = \pi$ verschwindet, was also für alle ganzen Zahlen i gelten wird, einzig ausgenommen im Fall $i = 0$, in dem natürlich

$$\int \partial\Phi \cos i\phi = \pi$$

hervorgeht. Nachdem das angemerkt worden ist, wird, weil ja per Annahme

$$\Phi = A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + \text{etc}$$

wird

$$\int \Phi\partial\phi = A\pi$$

sein, nachdem die Integrale natürlich von $\phi = 0$ bis hin zu $\phi = \pi$ erstreckt worden sind. Daher ist also schon der erste Teil unseres Theorems gefunden worden, in dem $A = \frac{1}{\pi}\int \Phi\partial\phi$ ist.

§7 Für die übrigen Teile wollen wir die Differentialformel

$$\partial\phi \cos i\phi \cos \lambda\phi$$

betrachten, die in einfache Kosinus aufgelöst

$$\frac{1}{2}\partial\phi \left[\cos\,(i-\lambda)\phi + \cos\,(i+\lambda)\phi\right]$$

gibt, woher ihr Integral

$$\int \partial\phi \cos i\phi \cos \lambda\phi = \frac{\sin\,(i-\lambda)\phi}{\partial(i-\lambda)} + \frac{\sin(\lambda+i)\phi}{\partial(i+\lambda)}$$

sein wird, welches Integral natürlich so für $\phi = 0$ wie für $\phi = \pi$ genommen verschwindet, wegen der ganzen Zahlen i und λ, wenn wir nur den einen einzigen Fall ausnehmen, in welchen $\lambda = i$ wird, in welchem Fall man natürlich

$$\int \partial\phi \cos^2 i\phi = \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4i}\sin 2i\phi$$

findet, welcher Wert natürlich für $\phi = \pi$ in $\frac{\pi}{2}$ übergeht.

§7 Weil also, indem man die Integration von $\phi = 0$ bis hin zu $\phi = \pi$ erstreckt, immer $\int \partial\phi \cos i\phi \cos \lambda\phi = 0$ ist, einzig ausgenommen in dem Fall $\lambda = i$, in welchen Fall natürlich das Integral gleich $\frac{\pi}{2}$ sein wird, werden wir aus der Gleichung

$$\Phi = A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + E\cos 4\phi$$

für den zweiten Teil unseres Theorems

$$\int \Phi\partial\phi \cos\phi = \frac{1}{2}\pi B$$

finden, deshalb weil aus allen übrigen Formeln nichts hervorgeht; daher schließt man andererseits, dass

$$B = \frac{2}{\pi}\int \Phi\partial\phi\cos\phi$$

sein wird, wenn natürlich das Integral von $\phi = 0$ bis hin $\phi = \pi$ erstreckt wird.

§8 Auf ähnliche Weise werden wir für den dritten Teil

$$\int \Phi \partial \phi \cos 2\phi = \frac{1}{2}\pi C$$

auffinden und umgekehrt werden wir haben

$$C = \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos 2\phi.$$

Auf die gleiche Weise wird für die folgenden Teile

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos 3\phi \\ E &= \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos 4\phi \end{aligned}$$

hervorgehen und so weiter ins Unendliche. Und auf diese Weise ist also die Gültigkeit unseres Theorem vollkommen bewiesen.

§9 Nachdem wir also die Gültigkeit unseres Theorems außer Zweifel gestellt haben, wird es nicht schwer sein, für jeden Fall, in dem die vorgelegte Funktion Φ durch eine Reihe gegeben ist, deren einzelne Terme nach den Potenzen von $\cos \phi$ fortschreiten, eine andere, die wir hier anstreben

$$A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + \text{etc},$$

zu bilden und deutlich zu zeigen, wie ihre einzelnen Terme A, B, C, D, etc ausgedrückt werden. Weil ja aber die einzelnen lateinischen Großbuchstaben von allen folgenden griechischen bis ins Unendliche abhängen, wollen wir, damit nicht aus der Ordnung dieser Buchstaben Verwirrung entsteht, anstelle der griechischen Buchstaben die folgenden Charaktere einführen

$$\Phi = (0) + (1)\cos\phi + (2)\cos^2\phi + (3)\cos^3\phi + (4)\cos^4\phi + \text{etc};$$

und so geht nun die ganze Frage darauf zurück, wie die einzelnen lateinischen Buchstaben A, B, C, D, etc aus diesen Charakteren (0), (1), (2), (3), etc bestimmt werden müssen.

§10 Wir wollen vom Buchstaben A der ersten aus anfangen, dessen Entwicklung das folgende Lemma erfordert:

LEMMA

Wenn die Integrale von $\phi = 0$ bis hin zu $\phi = \pi$ erstreckt werden, wird immer

$$\int \partial\phi \cos^\lambda \phi = \frac{\lambda-1}{\lambda} \int \partial\phi \cos^{\lambda-2} \phi$$

sein. Um das zu zeigen, setze man

$$\int \partial\phi \cos^\lambda \phi = f \sin\phi \cos^{\lambda-1} \phi + g \int \partial\phi \cos^{\lambda-2} \phi$$

und, nachdem die Differentiale genommen worden sind, wird

$$\cos^\lambda \phi = f \cos^\lambda \phi - f(\lambda-1) \sin^2 \phi \cos^{\lambda-1} \phi + g \cos^{\lambda-2} \phi$$

sein, welche Gleichung wegen $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$ diese Form annehmen wird

$$\cos^\lambda \phi = \lambda f \cos^\lambda \phi - f(\lambda-1) \cos^{\lambda-2} \phi + g \cos^{\lambda-2} \phi,$$

woher zuerst $g = f(\lambda-1)$ und $f = \frac{1}{\lambda}$ wird, und daher $g = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ und so werden wir im Allgemeinen diese Reduktion haben

$$\int \partial\phi \cos^\lambda \phi = \frac{1}{\lambda} \sin\phi \cos^{\lambda-1} \phi + \frac{\lambda-1}{\lambda} \int \partial\phi \cos^{\lambda-2} \phi,$$

welches Integral so genommen werden muss, dass es für $\phi = 0$ gesetzt verschwindet. Wenn wir deshalb $\phi = \pi$ setzen, woher $\sin\phi = 0$ wird, werden wir im Fall

$$\int \partial\phi \cos^\lambda \phi = \frac{\lambda-1}{\lambda} \int \partial\phi \cos^{\lambda-2} \phi$$

haben.

§11 Weil wir ja also, indem wir vom einfachsten Fall anfangen, haben

$$\text{I.} \quad \int \partial\phi \cos^0 \phi = \pi$$

$$\text{II.} \quad \int \partial\phi \cos^1 \phi = 0$$

haben, können wir alle folgenden Formeln angeben:

$$\begin{array}{llll}
\text{III.} & \int \partial\phi \cos^2\phi = \frac{1}{2}\pi & \text{IV.} & \int \partial\phi \cos^3\phi \quad = 0 \\
\text{V} & \int \partial\phi \cos^4\phi = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi & \text{VI.} & \int \partial\phi \cos^5\phi \quad = 0 \\
\text{VII.} & \int \partial\phi \cos^6\phi = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\pi & \text{VII.} & \int \partial\phi \cos^7\phi \quad = 0 \\
\text{IX.} & \int \partial\phi \cos^8\phi = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\pi & \text{X.} & \int \partial\phi \cos^9\phi = 0
\end{array}$$

§12 Weil wir also oben gefunden haben, dass

$$\pi A = \int \Phi\partial\phi$$

ist, liefern die gerade angegebenen Integrationen

$$\pi A = (0)\pi + (2)\frac{1}{2}\pi + (4)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi + (6)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} + (8)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\pi + \text{etc}$$

und, nachdem also die Division durch π ausgeführt worden ist, werden wir diese Bestimmung erhalten

$$A = (0) + \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(6) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}(8) + \text{etc}$$

oder eleganter

$$A = (0) + \frac{2}{4}(2) + \frac{4\cdot 3}{4\cdot 8}(4) + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}(6) + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(8),$$

welches dieselbe Reihe ist, die ich einst durch ziemlich weite Umwege erhalten habe.

§13 Mithilfe desselben Lemmas wird auch der zweite Buchstaben B bestimmt werden können. Weil wir nämlich

$$\frac{1}{2}\pi B = \int \Phi\partial\phi\cos\phi$$

gefunden haben, wenn wir anstelle von Φ die bekannte Reihe einsetzen, werden die Integrationen des Lemmas uns geben:

$$\frac{1}{2}\pi B = \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi(3) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\pi(5) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\pi(7) + \text{etc},$$

woher, indem man durch π teilt, sein wird

$$\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot(3) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(5) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}(7) + \text{etc}$$

oder

$$B = (1) + \frac{3}{4}(3) + \frac{5\cdot 4}{4\cdot 8}(5) + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}(7) + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(9) + \text{etc.}$$

§14 Für den dritten Buchstaben wird man ein eigenes Lemma brauchen, in dem

$$\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^{\lambda}\phi = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4}\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^{\lambda-2}\phi$$

ist, wenn natürlich die Integrale von $\phi = 0$ bis hin zu $\phi = \pi$ erstreckt werden. Um das zu zeigen, wollen wir setzen, dass im Allgemeinen gilt

$$\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^{\lambda}\phi = f \sin 2\phi \cos^{\lambda}\phi + g\cos 2\phi \sin\phi \cos^{\lambda-1}\phi + h\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^{\lambda-2}\phi,$$

woher Differentiation diese Gleichung liefert

$$\begin{aligned}\cos 2\phi \cos^{\lambda}\phi = 2f\cos 2\phi\cos^{\lambda}\phi &+ g\cos 2\phi\cos^{\lambda}\phi \\ &- g(\lambda-1)\cos 2\phi \sin^2\phi\cos^2\phi - \lambda f\sin 2\phi\sin\phi\cos^{\lambda-1}\phi \\ &- 2g\sin 2\phi\sin\phi\cos^{\lambda-1}\phi + h\cos 2\phi\cos^{\lambda-2}\phi.\end{aligned}$$

Hier müssen nun zuerst die Terme, die $\sin 2\phi$ enthalten, weggeschafft werden, woher $g = -\frac{\lambda f}{2}$ wird, dann wird aber diese Gleichung zurückbleiben, nachdem $1-\cos^2\phi$ anstelle von $\sin^2\phi$ geschrieben worden ist und durch $\cos 2\phi$ geteilt worden ist,

$$\cos^2\phi = -f\frac{\lambda\lambda-4}{2}\cos^{\lambda}\phi + \frac{\lambda f}{2}(\lambda-1)\cos^{\lambda-2} + h\cos^{\lambda-2}\phi,$$

woher natürlich $f = \frac{-2}{\lambda\lambda-4}$ wird und daher $h = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4}$, und so wird sich die allgemeine Reduktion so verhalten

$$\begin{aligned}\int \partial\phi\cos 2\phi\cos^{\lambda}\phi = -\frac{2}{\lambda\lambda-4}\sin 2\phi\cos^{\lambda}\phi &+ \frac{\lambda}{\lambda\lambda-4}\cos 2\phi\sin\phi\cos^{\lambda-1}\phi \\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4} f\partial\phi\cos 2\phi\cos^{\lambda-2}\phi.\end{aligned}$$

Daher wird nun für $\phi = \pi$ gesetzt gemäß des Lemmas

$$\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^{\lambda}\phi = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4}\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^{\lambda-2}\phi$$

sein.

§15 Wir wollen nun dem Exponenten λ nacheinander der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3, 4, etc zuteilen und für $\lambda = 0$ wird

$$\int \partial\phi \cos 2\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi = 0$$

sein, für den Fall $\lambda = 1$ liefert das Lemma selbst $= 0$; aber für den Fall $\lambda = 2$ versagt hingegen das Lemma; hier wird also die Formel

$$\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^2\phi$$

zu betrachten sein, die wegen $\cos^2\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi$ in diese übergeht

$$\frac{1}{2}\int \partial\phi \cos^2 2\phi,$$

die wiederum wegen $\cos^2 2\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\phi$ in

$$\frac{1}{4}\int \partial\phi(1+\cos 4\phi) = \frac{1}{4}\pi$$

übergeht und so wird für den Fall $\lambda = 2$

$$\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^2\phi = \frac{\pi}{4}$$

sein.

§16 Nachdem also diese einfacheren Fälle gefunden worden sind, werden die folgenden mithilfe des Lemmas leicht zustande gebracht, wir werden nämlich finden

1. $\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^3\phi = 0$
2. $\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^4\phi = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{4}$
3. $\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^5\phi = 0$
4. $\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^6\phi = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{4}$
5. $\int \partial\phi \cos 2\phi \cos^7\phi = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot\frac{8\cdot 7}{6\cdot 10}\cdot\frac{\pi}{4}$

etc etc

Weil wir also

$$\frac{1}{2}\pi C = \int \Phi \partial\phi \cos 2\phi$$

gefunden haben, wird man, wenn die gerade gefundenen Integrale durch π geteilt wird, finden

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}(4) + \frac{1}{4}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}(6) + \frac{1}{4}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot\frac{8\cdot 7}{6\cdot 10}(8) + \text{etc},$$

welche gefälliger auf diese Weise ausgedrückt werden kann

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(2) + \frac{3}{2\cdot 6}(4) + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 8}(6) + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10}(8) + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 12}(10) + \text{etc}$$

die noch eleganter so dargestellt werden kann

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}(4) + \frac{1}{8}\cdot\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}(6) + \frac{1}{10}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}(8) + \frac{1}{12}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(10) + \text{etc}$$

oder noch eleganter so

$$2C = (2) + \frac{4}{4}(4) + \frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}(6) + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}(8) + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(10) + \text{etc.}$$

§17 Für die folgenden Terme wollen wir dieses allgemeine Lemma aufstellen:

$$\int \partial\phi \cos i\phi \cos^\lambda \phi = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda - ii}\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{\lambda-2}\phi,$$

für welchen Beweis wir im Allgemeinen

$$\begin{aligned}\int \partial\phi \cos i\phi \cos^\lambda \phi = f \sin i\phi \cos^\lambda \phi + g \cos i\phi \sin\phi \cos^{\lambda-2}\phi \\ + h\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{\lambda-2}\phi,\end{aligned}$$

woher die Differentiation auf diese Gleichung führt

$$\begin{aligned}\cos i\phi \cos^\lambda \phi = (fi+g)\cos i\phi \cos^\lambda\phi - (\lambda f + gi)\sin i\phi \cos^{\lambda-1}\phi \\ - g(\lambda-1)\cos i\phi \sin^2\phi \cos^{\lambda-2}\phi + h\cos i\phi \cos^{\lambda-2}\phi.\end{aligned}$$

Hier müssen nun zuerst die Terme, die die Funktion $\sin i\phi$ enthalten, weggeschafft werden, woher $g = -\frac{\lambda f}{i}$ wird, nach Einsetzen welches Wertes, indem man durch $\cos i\phi$ teilt, nachdem $1-\cos^2\phi$ anstelle von $\sin^2\phi$ geschrieben worden war, aber diese Gleichung hervorgeht

$$\cos^\lambda\phi = -\frac{f(\lambda\lambda - ii)}{i}\cos^\lambda\phi + \frac{\lambda f}{i}(\lambda-1)\cos^{\lambda-2}\phi + h\cos^{\lambda-2}\phi,$$

woher natürlich $f = \frac{-i}{\lambda\lambda - ii}$ wird und daher $h = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-ii}$ und die allgemeine Reduktion wird sich so verhalten

$$\begin{aligned}\int \partial\phi \cos i\phi \cos^\lambda\phi = {} & \frac{-i}{\lambda\lambda - ii}\sin i\phi\cos^\lambda\phi \\ & + \frac{\lambda}{\lambda\lambda - ii}\cos\phi\sin i\phi\cos^{\lambda-1}\phi \\ & + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda - ii}\int\partial\phi\cos i\phi\cos^{\lambda-2}\phi,\end{aligned}$$

die oftmals einen sehr großen Nutzen haben kann; für $\phi = \pi$ gesetzt geht aber natürlich das prophezeite Lemma hervor.

§18 Nachdem dieses Lemma aufgestellt worden ist, muss für das Bestimmen des Buchstaben D $i = 3$ genommen werden und es wird

$$\int\partial\phi\cos 3\phi\cos^\lambda\phi = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-9}\int\partial\phi\cos 3\phi\cos^{\lambda-2}\phi$$

sein, woher sofort klar ist, dass in den Fällen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ diese Formel verschwindet, natürlich nachdem $\phi = \pi$ gesetzt wurde, sodass

$$\int\partial\phi\cos 3\phi = 0 \quad \text{und} \quad \int\partial\phi\cos 3\phi\cos\phi = 0$$

ist. Daher ist aber weiter klar, dass auch im Fall $\lambda = 2$

$$\int\partial\phi\cos 3\phi\cos^2\phi = 0$$

sein wird, aber für den Fall wird das Lemma in der Tat

$$\int\partial\phi\cos 3\phi\cos^3\phi = \frac{0}{0}$$

geben, welcher Wert auf eigene Weise untersucht werden muss, und hier werden in der Tat bekannte Kunstgriffe überhaupt nichts nutzen.

§19 Hier werden wir also auf die Gestalt der vorgelegten Formel

$$\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^3\phi$$

achten müssen, indem wir die Potenz $\cos^3\phi$ in diese Formel

$$\frac{\cos 3\phi + 3\cos\phi}{4}$$

auflösen; dann wird also

$$\cos 3\phi \cos^3\phi = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2\phi + \frac{3}{8}\cos 4\phi + \frac{1}{8}\cos 6\phi$$

sein, welche Form mit $\partial\phi$ multipliziert und integriert

$$\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^3\phi = \frac{1}{8}\phi + \frac{3}{10}\sin 2\phi + \frac{3}{32}\sin 4\phi + \frac{1}{48}\sin 6\phi$$

gibt, woher für $\phi = \pi$ genommen der Wert $\frac{1}{8}\pi$ entsteht, sodass

$$\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^3\phi = \frac{1}{8}\pi$$

ist.

§20 Von diesem Wert $\lambda = 3$ aber hängen die folgenden ab: $\lambda = 5$, $\lambda = 7$, $\lambda = 9$, etc, die sich also so verhalten werden

$$\begin{aligned}
\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^3\phi &= \frac{\pi}{8} \\
\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^5\phi &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{8} \\
\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^7\phi &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 8}\cdot\frac{7\cdot 6}{4\cdot 10}\cdot\frac{\pi}{8} \\
\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^9\phi &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 8}\cdot\frac{7\cdot 6}{4\cdot 10}\cdot\frac{9\cdot 8}{6\cdot 12}\cdot\frac{\pi}{8} \\
\int \partial\phi \cos 3\phi \cos^1 1\phi &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 8}\cdot\frac{7\cdot 6}{4\cdot 10}\cdot\frac{9\cdot 8}{6\cdot 12}\cdot\frac{11\cdot 10}{8\cdot 14}\cdot\frac{\pi}{8} \\
\text{etc.} &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die übrigen Fälle verschwinden hingegen alle.

§21 Weil nun

$$D = \frac{2}{\pi}\int \Phi\partial\phi\cos 3\phi$$

ist, während

$$\Phi = (0) + (1)\cos\phi + (2)\cos^2\phi + (3)\cos^3\phi + (4)\cos^4\phi + \text{etc}$$

wird, wird man, indem man die einzelnen Integralwerte zu einer Summe zusammenfasst,

$$D = \frac{1}{4}\left[1(3) + \frac{5\cdot 4}{2\cdot 2}(5) + \frac{5\cdot 4}{2\cdot 2}\cdot\frac{7\cdot 6}{4\cdot 10}(7) + \frac{5\cdot 4}{2\cdot 2}\cdot\frac{7\cdot 6}{4\cdot 10}\cdot\frac{9\cdot 8}{6\cdot 12}(9) + \text{etc}\right]$$

finden, welcher Ausdruck natürlich in viele andere Formen gebracht werden kann, deren eleganteste diese ist

$$\begin{aligned}4D = (3) &+ \frac{5}{4}(5) + \frac{7\cdot 6}{4\cdot 8}(7) + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}(9) + \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(11)\\ &+ \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}(13) + \text{etc.}\end{aligned}$$

§22 Für das Finden des Buchstabens E muss weiter $i = 4$ gesetzt werden und das Lemma wird geben

$$\int\partial\phi\cos 4\phi\cos^{\lambda}\phi = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-4)(\lambda+4)}\int\partial\phi\cos 4\phi\cos^{\lambda-2}\phi,$$

woher wiederum klar ist, dass in den Fällen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ der Wert verschwindet, was deshalb auch in den Fällen $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$ passiert; aber der Fall $\lambda = 4$ erfordert eine eigene Entwicklung. Weil wir ja vorher gesehen haben, dass $\cos^3\phi = \frac{1}{4}\cos 3\phi + \frac{3}{4}\cos\phi$ ist, wird, wenn wir erneut mit $\cos\phi$ multiplizieren, $\cos^4\phi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$ hervorgehen, welche Form weiter mit $\cos 4\phi$ multipliziert geben wird

$$\cos 4\phi\cos^4\phi = \frac{1}{16}\cos 2\phi + \frac{6}{16}\cos 4\phi + \frac{4}{16}\cos 6\phi + \frac{1}{16}\cos 8\phi.$$

Man multipliziere nun diese Form mit $\partial\phi$ und integriere, dann wird aber für $\phi = \pi$ gesetzt als gesuchter Wert $\frac{1}{16}\pi$ resultieren, der nur daher hervorging, weil die Potenz $\cos^4\phi$ durch die Auflösung $\cos 4\phi$ gegeben hatte.

§23 Weil also im Fall $\lambda = 4$ der Wert $\frac{\pi}{16}$ hervorgegangen war, werden die übrigen unabhängigen vermöge des Lemmas folgende Werte erhalten

$$\begin{aligned}
\int \partial\phi \cos 4\phi \cos^4 \phi &= \frac{\pi}{16} \\
\int \partial\phi \cos 4\phi \cos^6 \phi &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 19} \cdot \frac{\pi}{16} \\
\int \partial\phi \cos 4\phi \cos^8 \phi &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 19} \cdot \frac{8 \cdot 7}{4 \cdot 12} \cdot \frac{\pi}{16} \\
\int \partial\phi \cos 4\phi \cos^1 0\phi &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 19} \cdot \frac{8 \cdot 7}{4 \cdot 12} \cdot \frac{10 \cdot 9}{6 \cdot 14} \cdot \frac{\pi}{16} \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Weil also

$$E = \frac{2}{\pi} \int \partial\phi \cos 4\phi$$

ist, während

$$\Phi = (0) + (1)\cos\phi + (2)\cos^2\phi + (3)\cos^3\phi + (4)\cos^4\phi + \text{etc}$$

wird, werden die vorausgeschickten Reduktionen uns den folgenden Wert liefern

$$E = \frac{1}{8}\left[(4) + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 10}(6) + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 12}(8) + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 14}(10) + \text{etc}\right],$$

welche Form nicht schwer auf die folgende gebracht wird

$$8E = (4) + \frac{6}{4}(6) + \frac{8 \cdot 7}{4 \cdot 8}(8) + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 12}(10) + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}(12) + \text{etc.}$$

Nachdem diese Fälle entwickelt worden sind, können wir nun die Sache im Allgemeinen für irgendeine beliebige Zahl i verfolgen, wo sich die ganze Aufgabe nur auf den Fall $\lambda = i$ reduziert, den wir also in einem gesonderten Problem auflösen wollen.

Problem

Während i irgendeine beliebige ganze Zahl bezeichnet, ist der Wert dieser Integralformel

$$\int \partial\phi \cos i\phi \cos^i \phi$$

zu finden, wenn natürlich nach der Integration $\phi = \pi$ gesetzt wird.

LÖSUNG

§24 Um die Lösung aus den ersten Prinzipien abzuleiten, wollen wir

$$\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi = p \quad \text{und} \quad \cos\phi - \sqrt{-1}\sin\phi = q$$

setzen, und es wird zuerst $pq = 1$ sein, darauf wird aber weiter $\cos\phi = \frac{p+q}{2}$ sein, und weil weiter

$$\begin{aligned} p^n &= \cos n\phi + \sqrt{-1}\sin n\phi \\ q^n &= \cos n\phi - \sqrt{-1}\sin n\phi, \end{aligned}$$

ist, wird $\cos i\phi = \frac{p^i+q^i}{2}$ sein, außerdem aber wird $\cos^i\phi = \frac{(p+q)^i}{2}$ sein.

§25 Man entwickle nun die Potenz $(p+q)^i$ auf gewohnte Weise, stelle aber die letzten Terme mit den ersten verbunden auf diese Weise dar

$$\begin{aligned} (p+q)^i = & p^i + \frac{i}{1}p^{i-1}q + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}p^{i-2}qq + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{i-3}q^3 + \text{etc} \\ & q^i + \frac{i}{1}q^{i-1}p + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}q^{i-2}pp + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}p^3q^{i-3} + \text{etc}, \end{aligned}$$

welche Reihe, wegen $pq = 1$, in diese gefälligere Form übergeht

$$\begin{aligned} (p+q)^i = p^i + q^i + \frac{i}{1}(p^{i-2} + q^{i-2}) + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}(p^{i-4} + q^{i-4}) \\ + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(p^{i-6} + q^{i-6}) + \text{etc} \end{aligned}$$

Hier muss man nur bemerken, dass in den Fällen, in denen n eine gerade Zahl ist, ein einziger Mittelterm gegeben ist, der eine konstante Größe enthalten wird, welche es nicht erlaubt ist, sie zu verdoppeln.

§26 Weil also, indem man auf Winkel zurückgeht, im Allgemeinen $p^n + q^n = 2\cos n\phi$ ist, wird nun

$$\begin{aligned} (p+q)^i = 2\cos i\phi + \frac{2i}{1}\cos(i-2)\phi + \frac{2i(i-1)}{1\cdot 2}\cos(i-4)\phi \\ + \frac{2i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos(i-6)\phi \end{aligned}$$

sein; weil aber ja $p + q = 2\cos\phi$ ist, wird

$$2^{i-1}\cos^i\phi = \cos i\phi + \frac{i}{1}\cos(i-2)\phi + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\cos(i-4)\phi + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos(i-6)\phi + \text{etc}$$

sein. Man multipliziere nun auf beiden Seiten mit $2\cos i\phi$ und man wird durch bekannteste Reduktionen finden:

$$\begin{aligned}2^i\cos i\phi\cos^i\phi = 1 &+ \frac{i}{1}\cos 2\phi + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\cos 4\phi + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos 6\phi + \text{etc}\\ &+ \cos 2i\phi + \frac{i}{1}\cos(2i-2)\phi + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\cos(2i-4)\phi + \text{etc}\\ &+ \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos(2i-6)\phi + \text{etc.}\end{aligned}$$

§27 Man multipliziere nun auf beiden Seiten mit $\partial\phi$ und integriere, und es wird

$$\partial^i\int\partial\phi\cos i\phi\cos^i\phi = \phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi + \frac{i(i-2)}{4\cdot 2}\sin 4\phi + \text{etc}$$
$$+\frac{1}{2i}\sin 2i\phi + \frac{1}{2i-2}\sin(2i-2)\phi + \frac{i(i-2)}{4(2i-4)\cdot 2}\sin(2i-4)\phi + \text{etc}$$

hervorgehen, welche Formel nun für $\phi = 0$ gesetzt verschwindet. Man setze also $\phi = \pi$, und es wird

$$\partial^i\int\partial\phi\cos i\phi\cos^i\phi = \pi$$

hervorgehen, weshalb der im Problem gesuchte Wert gleich

$$\int\partial\phi\cos i\phi\cos^i\phi = \frac{\pi}{2i}$$

sein wird.

§28 Wenn wird also nun in der Reihe, die wir gefunden haben

$$A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + E\cos 4\phi + \text{etc}$$

setzen, dass der Koeffizient von $\cos i\phi$ I ist, sodass

$$I = \frac{2}{\pi}\int\Phi\partial\phi\cos i\phi$$

ist, während

$$\Phi = (0) + (1)\cos\phi + (2)\cos^2\phi + (3)\cos^3\phi + (4)\cos^4\phi + \text{etc}$$

wird, tritt es klar zutage, dass aus den einzelnen Anfangstermen nichts hervorgeht, bis man schließlich zu $\lambda = i$ gelangt, in welchem Fall wir ja gerade gesehen haben, dass

$$\int \partial\phi \cos i\phi \cos^i\phi = \frac{\pi}{2}$$

ist, von welchem Wert die folgenden Fälle, die um 2 aufsteigen, $\lambda = i + 2$, $\lambda = i + 4$, $\lambda = i + 6$, etc abhängen. Es wird natürlich vermöge des Lemmas sein

$$\begin{aligned}
\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{i+2}\phi &= \frac{\pi}{2i}\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-i)(\lambda+i)} = \frac{(i+2)}{4}\cdot\frac{\pi}{2i}\\
\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{i+4}\phi &= \frac{(i+4)(i+3)}{4\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2i}\\
\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{i+6}\phi &= \frac{(i+6)(i+5)(i+3)}{4\cdot 8\cdot 12}\cdot\frac{\pi}{2i}\\
\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{i+8}\phi &= \frac{(i+8)(i+7)(i+6)(i+5)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\cdot\frac{\pi}{2i}\\
\int \partial\phi \cos i\phi \cos^{i+10}\phi &= \frac{(i+10)(i+9)(i+8)(i+7)(i+6)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}\cdot\frac{\pi}{2i}\\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

§29 Indem man nun diese einzelnen Terme sammelt und mit 2^{i-1} multipliziert, wird der folgende Ausdruck entstehen

$$\begin{aligned}
2^{i-1}I = (i) + \frac{i+2}{4}(i+2) + \frac{(i+4)(i+3)}{4\cdot 8}(i+4) + \frac{(i+6)(i+5)(i+4)}{4\cdot 8\cdot 12}(i+6)\\
+ \frac{(i+8)(i+7)(i+6)(i+5)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(i+8) + \text{etc},
\end{aligned}$$

welche Form schon die Bestimmung aller Terme der Reihe enthält, in welche Formel

$$\Phi = (0) + (1)\cos\phi + (2)\cos^2\phi + (3)\cos^3\phi + (4)\cos^4\phi + \text{etc}$$

sie entwickelt werden sollte, welche wir bisher auf diese Weise dargestellt haben

$$\Phi = A + B\cos\phi + C\cos 2\phi + D\cos 3\phi + E\cos 4\phi + \text{etc},$$

deren einzelne Terme durch die folgenden Reihen ausgedrückt werden

$$
\begin{aligned}
A &= (0) + \frac{2}{4}(2) + \frac{4\cdot 3}{4\cdot 8}(4) + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}(6) + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(8) + \text{etc}\\
B &= (1) + \frac{3}{4}(3) + \frac{5\cdot 4}{4\cdot 8}(5) + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}(7) + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(9) + \text{etc}\\
2C &= (2) + \frac{4}{4}(4) + \frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}(6) + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12}(8) + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(10) + \text{etc}\\
4D &= (3) + \frac{5}{4}(5) + \frac{7\cdot 6}{4\cdot 8}(7) + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}(9) + \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(11) + \text{etc}\\
8E &= (4) + \frac{6}{4}(6) + \frac{8\cdot 7}{4\cdot 8}(8) + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12}(10) + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(12) + \text{etc}\\
16F &= (5) + \frac{7}{5}(7) + \frac{9\cdot 8}{4\cdot 8}(9) + \frac{11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}(11) + \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(13) + \text{etc}\\
&\text{etc}
\end{aligned}
$$

und im Allgemeinen wird, wenn in der gesuchten Reihe der dem Index i entsprechende Term $I \cos i\phi$ war, sein

$$
\begin{aligned}
I^{i-2} = (i) + \frac{i+2}{4}(i+2) + \frac{(i+4)(i+3)}{4\cdot 8}(i+4) + \frac{(i+6)(i+5)(i+4)}{4\cdot 8\cdot 12}(i+6)\\
+ \frac{(i+8)(i+7)(i+6)(i+5)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(i+8) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$