Ein Beispiel von Differentialgleichungen unbestimmten Grades und deren Interpolation

Leonhard Euler

§1 Wann immer Differentialgleichungen nach dem Grad der Differentiale unterschieden werden, scheint die Natur der Sache Zwischengrade auszuschließen; weil man nämlich genauso viele Integrationen braucht, kann deren Anzahl gewiss nicht ganzzahlig sein. Ich bin dennoch neulich auf eine Differentialgleichung unbestimmten Grades gestoßen, deren Exponent auch eine gebrochene Zahl sein kann, und es war mir sogar möglich, ihr Integral anzugeben; weil das der ganzen Aufmerksamkeit würdig scheint, möchte ich die ganze Analysis, die ich gebraucht habe, hier ausführlich erörtern.

§2 Nachdem ich die wundersamen Eigenschaften der Binomialkoeffizienten, welche ich mit diesem Charakter $\left(\frac{p}{q}\right)$ zu bezeichnen pflege, dessen Wert

$$\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdots \frac{p-q+1}{q}$$

ist, betrachtet hatte, kam mir die Idee, den Wert einer Formel dieser Art $\left(\frac{p}{q}\right)$ auf eine Integralformel zurückzuführen, woher auch die Fälle, in denen p und q keine ganzen Zahlen sind, angegeben werden können. Ich habe bemerkt, dass eine solche Reduktion nicht direkt gelingt, woher ich seinen reziproken Wert $\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)}$ betrachtet habe, deren Wert

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{p-1} \cdot \frac{3}{p-2} \cdots \frac{q}{p-q+1}$$

ist. Für dieses Ziel setze ich

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q \times x^p}{p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)} = s,$$

sodass für $x = 1$ gesetzt der gewünschte Wert von $1 : \binom{p}{q}$ erhalten wird.

§3 Es sei nun der Kürze wegen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q = N$, sodass man

$$s = \frac{Nx^p}{p \cdots (p-q+1)}$$

hat, bei deren Nenner festzuhalten ist, dass die Faktoren immer um die Einheit schrumpfen. Wenn also diese Formel nun differenziert wird, wird

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{Nx^{p-1}}{(p-1)\cdots(p-q+1)}$$

hervorgehen; und so ist der erste Faktor des Nenners weggeschafft worden, und nach Ausführung einer erneuten Differentiation wird

$$\frac{\partial\partial s}{\partial x^2} = \frac{Nx^{p-2}}{(p-2)\cdots(p-q+1)}$$

hervorgehen. Indem man also auf diese Weise immer weiter differentiert, werden alle Faktoren des Nenners weggeschafft werden und man wird schließlich zu dieser Gleichung gelangen:

$$\frac{\partial^q s}{\partial x^q} = Nx^{p-q}.$$

§4 Wir werden also, indem wir anstelle von N seinen Wert einsetzen, zu dieser Differentialgleichung gelangen

$$\frac{\partial^q s}{1 \cdots q \partial x^q} = x^{p-q},$$

die also sooft integriert werden müsste, wie q Einheiten enthält, und die einzelnen Integrationen sind so aufzustellen, dass für $x = 0$ alle Integrale verschwinden; und nachdem alle Integrationen ausgeführt worden waren, wird anstelle von x die Einheit geschrieben werden müssen, und auf diese

Weise wird der resultierende Wert von s den Wert der Formel $1 : \binom{p}{q}$ geben. Um aber diese Integrationen allgemeiner zu erledigen, wollen wir X anstelle von x^{p-q} schreiben, sodass wir nun diese Gleichung aufzulösen haben

$$\frac{\partial^q s}{1 \cdot 2 \cdots q \partial x^q} = X.$$

§5 Wir wollen diese Gleichung zuerst mit ∂x multiplizieren, und ihr Integral wird

$$\frac{\partial^{q-1} s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q \partial x^{q-1}} = \int X \partial x$$

geben. Diese Gleichung wollen wir mit $1 \cdot \partial x$ multiplizieren, und es wird durch Integration

$$\frac{\partial^{q-2} s}{2 \cdot 3 \cdots q \partial x^{q-2}} = \int \partial x \int X \partial x = x \int X \partial x - \int X x \partial x$$

sein. Durch bekannte Reduktionen können nämlich wiederholt Integrale solcher Art auf einfache zurückgeführt werden können. Diese Gleichung wird nun mit ∂x multipliziert und auf dieselbe Weise integriert

$$\frac{\partial^{q-3} s}{3 \cdot 4 \cdots q \partial x^{q-3}} = x^2 \int X \partial x - 2x \int X x \partial x + \int X x^2 \partial x$$

liefern. Nun wird durch Multiplizieren mit $3 \partial x$ und Integrieren

$$\frac{\partial^{q-4} s}{4 \cdot 5 \cdots \cdot q \partial x^{q-4}} = x^3 \int X \partial x - 3x^2 \int X x \partial x + 3x \int X x^2 \partial x - \int X x^3 \partial x$$

hervorgehen. Auf dieselbe Weise wird man

$$\frac{\partial^{q-5} s}{5 \cdot 6 \cdots q \partial x^{q-5}} = x^4 \int X \partial x - 4x^3 \int X x \partial x + 6x^2 \int X x^2 \partial x - 4x \int X x^3 \partial x + \int X x^4 \partial x$$

finden, und durch Benutzen unserer Charaktere wird im Allgemeinen

$$\frac{\partial^{q-n} s}{n(n+1) \cdots q \partial x^{q-n}}$$

$$= x^{n-1} \int X \partial x - \left(\frac{n-1}{n}\right) x^{n-2} \int X x \partial x + \left(\frac{n-1}{2}\right) x^{n-3} \int X x^2 \partial x$$
$$- \left(\frac{n-1}{3}\right) x^{n-4} \int X x^3 \partial x + \text{etc}$$

sein.

§6 Wir wollen nun $n = q$ setzen, und weil $\partial^0 s = s$ ist, wird diese endliche Gleichung entstehen:

$$\frac{s}{q} = x^{q-1}\int X\partial x - \left(\frac{q-1}{1}\right)x^{q-2}\int Xx\partial x + \left(\frac{q-1}{2}\right)x^{q-3}\int Xx^2\partial x - \text{etc},$$

deren einzelne Glieder so integriert werden müssen, dass sie für $x = 0$ gesetzt verschwinden, was immer passieren wird, wenn nur $q - 1 > 0$ war, weswegen nur diese Integralformeln selbst $\int X\partial x$, $\int Xx\partial x$, etc ohne Hinzufügung der Konstante integriert werden müssen. Auch wenn nämlich auf diese Weise x vielleicht in den Nenner eingeht, wird es durch eine Potenz von x, mit welcher sie multipliziert werden muss, wiederum weggeschafft werden.

§7 Nachdem diese Dinge über die einzelnen Integrale bemerkt worden sind, wird sich außerhalb der Integralzeichen nun $x = 1$ setzen lassen, welches natürlich der Fall der vorgelegten Frage ist; und so wird man

$$1 : q\left(\frac{p}{q}\right) = \int X\partial x\left[1 - \left(\frac{q-1}{1}\right)x + \left(\frac{q-1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{q-1}{3}\right)x^3 + \text{etc}\right]$$

finden, der Wert welcher Reihe natürlich $(1-x)^{q-1}$ ist, sodass wir diesen bestimmten Wert haben:

$$\frac{1}{q\left(\frac{p}{q}\right)} = \int X\partial x(1-x)^{q-1},$$

deren Wert also sogar in den Fällen, in denen q keine ganze Zahl ist, durch Quadraturen beschafft werden kann; und so haben wir das Integral einer Differentialgleichung unbestimmten Grades $\partial^q s = NX\partial x^q$ glücklich gefunden; da $X = x^{p-q}$ ist, werden alle Koeffizienten auf diese Weise auf Integralformen

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\int x^{p-q}\partial x(1-x)^{q-1}}$$

zurückgeführt werden, und weil die Exponenten von x und $1 - x$ vertauscht werden können, wird auch

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q}}$$

sein und diese Formel habe ich aus einem ganz anderen Prinzip vor nicht allzu langer Zeit erhalten.

THEOREM

§8 Der Wert dieses Charakters $\left(\frac{p}{q}\right)$ kann auf eine Integralformel zurückgeführt werden, weil

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q}}$$

ist, wenn natürlich dieses Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt wird.

KOROLLAR 1

§9 Für $p = 0$ genommen wird also

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{-q}}$$

sein. Ich habe aber einst gezeigt, dass

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^{-q} = \frac{\pi}{\sin \pi q}$$

ist, woher also

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{\sin \pi q}{\pi q}$$

werden wird.

KOROLLAR 2

§10 Darauf findet man durch eine bekannte Reduktion der Integrale

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q} = \frac{\pi}{\sin \pi q} \left(\frac{p-q}{q}\right),$$

dessen Wert also, sooft p eine ganze Zahl ist, absolut angegeben werden kann, weshalb im Allgemeinen

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\sin \pi q}{\pi q} : \left(\frac{p-q}{q}\right)$$

sein wird.

Korollar 3

§11 Weil also umgekehrt

$$\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q} = \frac{1}{q\left(\frac{p}{q}\right)}$$

ist, wenn wir f anstelle von $q-1$ schreiben und g anstelle von $p-q$, werden wir

$$\int x^f \partial x(1-x)^g = \frac{1}{(1+f)(\frac{f+g+1}{f+1})}$$

haben.

Bemerkung

§12 Weil wir ja also diese Integralformel aus einer Integralgleichung unbestimmten Grades erhalten haben, wollen wir dieselbe Untersuchung weiter im folgenden Problem ausdehnen.

Problem

§13 Nachdem diese entweder endliche oder unendliche Reihe

$$S = \frac{A}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{B}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{C}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} + \frac{D}{\left(\frac{p+3}{q}\right)} + \text{etc}$$

vorgelegt wurde, ist ihr Wert durch eine Integralformel auszudrücken.

Lösung

Wir wollen den einzelnen Termen Potenzen von x zuteilen und

$$S = \frac{Ax^p}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{Bx^{p+1}}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{Cx^{p+2}}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} + \text{etc}$$

setzen, welche Reihe also für $x=1$ gesetzt die vorgelegte Reihe selbst liefern wird. Dort ist zu bemerken, dass bei allen Termen der Buchstabe q denselben Wert beibehalten wird, der andere p aber immer um eine Einheit vermehrt wird, woher das unbestimmte Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q = N$ in allen Termen denselben Wert beibehalten wird. Weil wir daher aus der oberen Gleichung $s = \frac{x^p}{\binom{p}{q}}$ dieser Differentialgleichung unbestimmten Grades

$$\frac{\partial^q s}{\partial x^q} = N x^{p-q}$$

abgeleitet haben, wird aus den einzelnen Termen unserer Reihe dasselbe Differential resultieren, wenn wir nur den Exponenten p um eine Einheit vermehren, woher wir also

$$\frac{\partial^q S}{\partial x^q} = NAx^{p-q} + NBx^{p-q+1} + \text{etc}$$

finden werden.

§14 Wir wollen nun

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc} = V$$

setzen und es wird

$$\frac{\partial^q S}{N \partial x^q} = x^{p-q} V$$

sein; wenn wir deswegen $x^{p-q}V = X$ setzen, werden wir die schon zuvor behandelte Gleichung

$$\frac{\partial^q S}{1 \cdot 2 \cdots q \partial x^q} = X$$

haben, deren Integration q mal wiederholt uns auf diesen Ausdruck führt

$$S = q \int X \partial x (1-x)^{q-1},$$

woher wir also durch Einsetzen der Werte für X und V die gesuchte Summe S erhalten werden, natürlich

$$S = q \int x^{p-q} \partial x (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc})(1-x)^{q-1},$$

wenn nur das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt wird, oder, wie wir zuvor gefunden haben, wenn nur in der Integration keine Konstante beigefügt wird, darauf aber $x = 1$ genommen wird.

Beispiel 1

§15 Es sei $V = (1-x)^n$, sodass

$$A = 1, \quad B = -\binom{n}{1}, \quad C = +\binom{n}{2}, \quad D = -\binom{n}{3}, \quad \text{etc}$$

ist und die vorgelegte Reihe

$$s = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} - \frac{\left(\frac{n}{1}\right)}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} - \frac{\left(\frac{n}{3}\right)}{\left(\frac{p+3}{q}\right)} + \text{etc}$$

sein wird, dann wird also die Summe dieser Reihe

$$S = q \int x^{p-q} \partial x (1-x)^{q+n-1}$$

sein, oder nach Vertauschen der Exponenten von x und $1-x$ wird auch

$$S = q \int x^{q+n-1} \partial x (1-x)^{p-q}$$

sein. Nun ist aber ersichtlich, dass diese Integralformel wiederum auf den hier benutzen Charakter zurückgeführt werden kann; mit Hilfe von §11 wird nämlich $f = q+n-1$ und $g = p-q$ sein, und daher wird

$$S = \frac{q}{(q+n)\left(\frac{p+n}{q+n}\right)}$$

hervorgehen. Daher werden wir also auch durch Integralformeln die Summation dieser höchst bemerkenswerten Reihe haben

$$\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} - \frac{\left(\frac{n}{1}\right)}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} - \frac{\left(\frac{n}{3}\right)}{\left(\frac{p+3}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{n}{4}\right)}{\left(\frac{p+4}{q}\right)} - \text{etc} = \frac{q}{(q+n)\left(\frac{p+n}{q+n}\right)}.$$

Korollar 1

§16 Wenn also $n = 0$ war, entsteht natürlich die identische Gleichung $\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)}$. Aber wenn $n = 1$, geht

$$\frac{q}{(q+1)\left(\frac{p+1}{q+1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{p+1}{q}\right)}$$

hervor. Wenn $n = 2$ ist, wird

$$\frac{q}{(q+2)\binom{p+2}{q+2}} = \frac{1}{\binom{p}{q}} - \frac{2}{\binom{p+1}{q}} + \frac{1}{\binom{p+2}{q}}$$

werden.

KOROLLAR 2

§17 Damit die Übereinstimmung mit der Wahrheit klarer wird, wollen wir den bestimmten Fall entwickeln, indem $p = 3$, $q = 2$, $n = 4$ ist und es wird

$$\frac{q}{q+n} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \binom{p+n}{q+n} = \binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$$

sein. Darauf wird

$$\binom{p}{q} = \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{p+1}{q} = \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{p+2}{q} = \binom{5}{2} = 10,$$

$$\binom{p+3}{q} = \binom{6}{2} = 15$$

sein, was die Progression der Triagonalzahlen ist; dann wird aber

$$\binom{n}{1} = 4, \quad \binom{n}{2} = 6, \quad \binom{n}{3} = 4, \quad \binom{n}{1} = 1$$

sein. Nach Einsetzen dieser Werte wird also

$$\frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{3} - \frac{4}{6} + \frac{6}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{21}$$

sein, was hervorragend übereinstimmt.

BEISPIEL 2

§18 Wir wollen $V = (1+x)^{q-1}$ setzen, sodass

$$S = q \int x^{p-q} \partial x (1 - xx)^{q-1}$$

wird, dann wird aber

$$A = 1, \quad B = \binom{q-1}{1}, \quad C = \binom{q-1}{2}, \quad D = \binom{q-1}{3}, \quad \text{etc}$$

sein und so wird die vorgelegte Reihe

$$S = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{1}\right)}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{3}\right)}{\left(\frac{p+3}{q}\right)} + \text{etc}$$

sein. Es ist aber ersichtlich klar, dass diese Integralformel auch auf unsere Charaktere zurückgeführt werden kann. Wir wollen nämlich $xx = y$ setzen, es wird

$$S = \frac{q}{2}\int y^{\frac{p-q-1}{2}}\partial y(1-y)^{q-1}$$

sein, oder nach Vertauschen der Exponenten

$$S = \frac{q}{2}\int y^{q-1}\partial y(1-y)^{\frac{p-q-1}{2}},$$

die mit §11 verglichen $f = q-1$, $g = \frac{p-q-1}{2}$ gibt, nach Einsetzen welcher Werte man

$$S = \frac{q}{2q\left(\frac{\frac{p+q-1}{2}}{q}\right)} = \frac{1}{2\left(\frac{\frac{p+q-1}{2}}{q}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{1}\right)}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} + \text{etc}$$

berechnet, oder wenn man $\frac{p+q-1}{2} = r$ setzt, wird

$$S = \frac{1}{2\left(\frac{r}{q}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{1}\right)}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} + \text{etc}$$

sein.

Korollar 1

§19 Hier wird im Fall $q = 1$ die gefundene Summe dem ersten Term gleich. Wir wollen aber $q = 2$ nehmen, es wird

$$\frac{1}{2\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{q}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

sein, das heißt

$$\frac{4}{pp-1} = \frac{2}{p(p-1)} + \frac{2}{p(p+1)},$$

woher klar ist, dass diese Summation mit der Wahrheit verträglich ist, worüber weiter kein Zweifel bestehen kann, sooft q eine ganze positive Zahl ist; deswegen wollen wir bestimmte Fälle betrachten, wo sie nicht eine solche ist.

KOROLLAR 2

§20 Damit aber die Entwicklung leichter wird, wollen wir den Fall betrachten, in dem $q = r$ ist, sodass $\left(\frac{r}{q}\right) = 1$ wird; dann wird aber $p = 1 + q$ sein und daher

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + q, \quad \left(\frac{p+1}{q}\right) = \frac{q+1}{1} \cdot \frac{q+2}{2}, \quad \left(\frac{p+2}{q}\right) = \frac{q+1}{1} \cdot \frac{q+2}{2} \cdot \frac{q+3}{3},$$

nach Einsetzen welcher Reihe diese Reihe entstehen wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} =& \frac{1}{q+1} + \frac{2(q-1)}{(q+1)(q+2)} + \frac{3(q-1)(q-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} \\ &+ \frac{4(q-1)(q-2)(q-3)}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} + \text{etc},\end{aligned}$$

welche Reihe höchst bemerkenswert ist, weil ihre Summe immer $\frac{1}{2}$ ist, welcher Wert auch immer dem Buchstaben q zugeteilt werde. Wenn nämlich $q = 0$ ist, wird man

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc}$$

haben, welches die allbekannte Reihe ist. Es sei nun $q = -1$, und wegen $q + 1 = 0$ wollen wir alle Terme mit $q + 1$ multiplizieren und es wird diese Reihe hervorgehen

$$0 = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \text{etc},$$

wie durch Nehmen der Differenzen leicht klar ist. Wir wollen $q = \frac{1}{2}$ setzen und es wird diese Reihe hervorgehen

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 11} - \text{etc.}$$

Weil also

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}, \quad \frac{6}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} - \frac{3}{7}, \quad \frac{8}{7 \cdot 9} = \frac{4}{7} - \frac{4}{9}$$

und so weiter ist, wird nach Einsetzen davon diese Reihe hervorgehen

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$$

Aber wenn wir $q = -\frac{1}{2}$ nehmen, wird

$$\frac{1}{2} = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \text{etc}$$

sein, was durch Differenzen klar wird.

KOROLLAR 3

§21 Wir wollen nun $r = 0$ nehmen, sodass $p = 1 - q$ wird. Ich habe aber bewiesen, dass $\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{\sin q\pi}{q\pi}$ ist, woher

$$\frac{\pi q}{2\sin \pi q} = \frac{1}{\left(\frac{1-q}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{1}\right)}{\left(\frac{2-q}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{q-1}{2}\right)}{\left(\frac{3-q}{q}\right)} + \text{etc}$$

entstehen wird, wovon es der Mühe wert sein wird, den Fall $q = \frac{1}{2}$ entwickelt zu haben, denn die linke Seite wird nämlich $\frac{\pi}{4}$. Für die rechte Seite werden wir aber

$$\left(\frac{q-1}{1}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{q-1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \quad \left(\frac{q-1}{3}\right) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \text{etc}$$

haben, dann aber für die Nenner

$$\left(\frac{1-q}{q}\right) = 1, \quad \left(\frac{2-q}{q}\right) = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{3-q}{q}\right) = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}, \quad \left(\frac{4-q}{q}\right) = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \text{etc},$$

nach Einsetzen welcher Werte diese Reihe entstehen wird

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc},$$

welche Reihe allbekannt ist. Wir wollen aber noch $q = -\frac{1}{2}$ setzen und die linke Seite wird wie zuvor $\frac{\pi}{4}$ sein; für die rechte Seite wird aber

$$\left(\frac{q-1}{1}\right) = -\frac{3}{2}, \quad \left(\frac{q-1}{2}\right) = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}, \quad \left(\frac{q-1}{3}\right) = -\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \text{etc}$$

sein, dann

$$\left(\frac{1-q}{q}\right) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \quad \left(\frac{2-q}{q}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \left(\frac{3-q}{q}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \quad \text{etc},$$

daher

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} - \frac{4\cdot 6}{1\cdot 5} + \frac{6\cdot 8}{1\cdot 7} - \frac{8\cdot 10}{1\cdot 9} + \text{etc},$$

deren Gültigkeit so gezeigt wird. Weil

$$\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} = 3 - \frac{1}{3}, \quad \frac{4\cdot 6}{1\cdot 5} = 5 - \frac{1}{5}, \quad \frac{6\cdot 8}{1\cdot 7} = 7 - \frac{1}{7}, \quad \frac{8\cdot 10}{1\cdot 9} = 9 - \frac{1}{9}$$

ist, wird jene Reihe dieser gleich sein

$$\frac{\pi}{4} = 3 - \frac{1}{3} - 5 + \frac{1}{5} + 7 - \frac{1}{7} - 9 + \frac{1}{9} + \text{etc},$$

welche Reihe man in diese zwei aufteile

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + \text{etc} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc} \end{cases}$$

Von der oberen bemerke man, dass ihre Summe durch Differenzen mit

$$3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + \text{etc} = 1$$

gefunden wurde; die Summe der unteren Reihe wird aber aus der oberen gefunden, in welcher

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc}$$

war, es wird

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc} = \frac{\pi}{4} - 1$$

sein, woher schon klar ist, dass

$$3 - \frac{1}{3} - 5 + \frac{1}{5} + 7 - \frac{1}{7} - 9 + \frac{1}{9} + \text{etc} = 1 + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{4}$$

ist. Daher ist also klar, dass für q auch negative Zahlen und sogar gebrochene angegeben werden können.

Allgemeines Theorem

§22 Wenn X irgendeine Funktion von x bezeichnet, und diese Differentialgleichung irgendeines Grades vorgelegt war

$$\partial^q y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q X \partial x^q,$$

wo der Exponent q irgendwelche entweder gebrochenen oder ganze positive oder negative Zahlen bezeichnet, die Auflösung welcher Gleichung also genauso viele Integrationen erfordert, wird, wenn diese einzelnen von $x = 0$ begonnen werden und nach Ausführung aller $x = 1$ gesetzt wird, dann immer $y = q \int X \partial x (1-x)^{q-1}$ sein, nachdem natürlich dieses Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt wurde.