Eine analytische Übung *

Leonhard Euler

§1 Dem, der das den Kosinus eines jeden Winkels ausdrückende unendliche Produkt, welches dieses ist

$$\cos\frac{\pi}{2n}=\left(1-\frac{1}{nn}\right)\left(1-\frac{1}{9nn}\right)\left(1-\frac{1}{16nn}\right)\left(1-\frac{1}{49nn}\right)\text{ etc.}$$

betrachtet, kommt es in den Sinn, eine Methode ausfindig zu machen, mit deren Hilfe aus der natürlichen Beschaffenheit sein Wert, welchen wir wissen $=\cos\frac{\pi}{2n}$ zu sein, gefunden werden kann, bei welcher Aufgabe sich viele Kunstgriffe offenbaren, von welchen ich mir sicher bin, dass deren Erklärung den Geometern nicht unangenehm sein wird.

§2 Ich setze also

$$S=\left(1-\frac{1}{nn}\right)\left(1-\frac{1}{9nn}\right)\left(1-\frac{1}{16nn}\right)\text{ etc.}$$

und nach Nehmen von Logarithmen geht für mich hervor

$$\log S=\log\left(1-\frac{1}{nn}\right)+\log\left(1-\frac{1}{9nn}\right)+\log\left(1-\frac{1}{25nn}\right)+\text{etc.},$$

und weil gilt

*Originaltitel: "Exercitatio analytica", erstmals publiziert in „*Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 8* 1794, pp. 69-", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16,1, pp. 235 - 240 ", Eneström-Nummer E664, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$\log\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc.},$$

wird nach Ordnen der Reihe und Ändern der Vorzeichen sein

$$\begin{aligned}
-\log S = {} & \frac{1}{nn} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + \frac{1}{4n^8} + \text{etc.} \\
& + \frac{1}{9\cdot nn} + \frac{1}{2\cdot 9^2\cdot n^4} + \frac{1}{3\cdot 9^3\cdot n^6} + \frac{1}{4\cdot 9^4\cdot n^8} + \text{etc.} \\
& + \frac{1}{25\cdot nn} + \frac{1}{2\cdot 25^2\cdot n^4} + \frac{1}{3\cdot 25^3\cdot n^6} + \frac{1}{4\cdot 25^4\cdot n^8} + \text{etc.} \\
& + \frac{1}{49\cdot nn} + \frac{1}{2\cdot 49^2\cdot n^4} + \frac{1}{3\cdot 49^3\cdot n^6} + \frac{1}{4\cdot 49^4\cdot n^8} + \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

§3 Wenn wir daher nun die einzelnen Spalten der Reihe nach aufschreiben, werden wir die folgenden Reihen für $-\log S$ erhalten:

$$\begin{aligned}
-\log S = {} & \frac{1}{nn}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{2\cdot n^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{3\cdot n^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{2\cdot n^8}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Und so ist die ganze Aufgabe auf die Summation der Reihen der geraden Potenzen der harmonischen Progression $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ etc. reduziert worden.

§4 Ich habe aber einst gezeigt, nachdem der Kürze wegen $\frac{\pi}{2} = \varrho$ gesetzt worden ist, wenn die Summen dieser Potenzen auf die folgende Weise dargestellt werden

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = A\varrho^2,$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = B\varrho^4,$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = C\varrho^6$$

$$\text{etc.},$$

dass zuerst $A = \frac{1}{2}$ ist, dann aber die übrigen Buchstaben auf die folgende Weise durch die vorhergehenden bestimmt werden:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3} A^2, \\ C &= \frac{2}{5} \cdot 2AB, \\ D &= \frac{2}{7} (2AC + BB), \\ E &= \frac{2}{9} (2AD + 2BC), \\ F &= \frac{2}{11} (2AE + 2BD + CC) \end{aligned}$$

$$\text{etc.},$$

dessen Gültigkeit sich zugleich aus der wunderschönen Übereinstimmung dieser Analysis zeigen wird.

§5 Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, erlangen wir diese Reihe

$$-\log S = \frac{A\varrho^2}{nn} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B\varrho^4}{n^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C\varrho^6}{n^6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{D\varrho^8}{n^8} + \text{etc.}$$

Wenn wir daher also $\frac{\varrho}{n} = x$ setzen, dass $x = \frac{\pi}{2n}$ ist, wird diese Reihe diese Form annehmen

$$-\log S = Axx + \frac{1}{2}Bx^4 + \frac{1}{3}Cx^6 + \frac{1}{4}Dx^8 + \text{etc.}$$

Um also die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. zu entfernen, wollen wir differenzieren; und nach einer Division durch $2\partial x$ werden wir erhalten

$$-\frac{\partial S}{2S\partial x} = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

§6 Wir wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$-\frac{\partial S}{2S\partial x} = t,$$

dass wir diese Reihe haben

$$t = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.},$$

woher nach Quadrieren diese Reihe entspringen wird

$$\begin{aligned} tt = A^2xx + 2ABx^4 &+ 2ACx^6 + 2ADx^6 + 2AEx^{10} + \text{etc.},\\ &+ \;\; BB \quad + 2BC \quad + 2BD\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \;\; CC \end{aligned}$$

und so haben wir für jede Potenz von x die Formeln erlangt, in denen die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D etc. enthalten ist; es fehlen nur jene Koeffizienten $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$ etc.

§7 Aber wir werden diese Koeffizienten einführen, indem wir integrieren, nachdem wir mit $2\partial x$ multipliziert haben werden. Es wird nämlich aufgefunden werden

$$2\int tt\partial x = \frac{2}{3}A^2x^2 + \frac{2}{5}\cdot 2ABx^5 + \frac{2}{7}(2AC + BB)x^7$$
$$+\frac{2}{9}(2AD + 2BC)x^9 + \frac{2}{11}(2AE + 2BD + CC)x^{11} + \text{etc.}$$

Weil nun gilt

$$\frac{2}{3}A^2 = B, \quad \frac{2}{5}\cdot 2AB = C, \quad \frac{2}{7}(2AC + BB) = D \quad \text{etc.},$$

werden wir, nachdem diese Werte wieder eingesetzt worden sind, zu dieser Reihe gelangen

$$2\int tt\partial x = Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \text{etc.}$$

§8 Weil wir also zuvor diese Reihe gehabt haben

$$t = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.},$$

fließt daher offenbar diese Gleichung

$$t = Ax + 2\int tt\partial x,$$

welche differenziert diese gibt

$$\partial t = A\partial x + 2tt\partial x = \frac{1}{2}\partial x + 2tt\partial x \quad \text{wegen} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Daher werden wir also haben

$$2\partial t = \partial x(1 + 4tt),$$

woher wird

$$\partial x = \frac{2\partial t}{1 + 4tt},$$

deren Integral auch leicht aufzufinden ist, es ist natürlich

$$x = \arctan 2t,$$

wo die Hinzufügung einer Konstante nicht nötig ist, weil ja, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist, t schon von selbst verschwindet. Nachdem also diese Gleichung gefunden worden ist, wenn die Größe x wie ein Winkel angesehen wird, wird umgekehrt $2t = \tan x$ sein. Es war aber

$$t = -\frac{\partial S}{2S\partial x},$$

woher diese Gleichung erschlossen wird

$$-\frac{\partial S}{S\partial x} = \tan x \quad \text{und daher} \quad -\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial x \sin x}{\cos x}.$$

§9 Weil also gilt

$$\partial \sin x = -\partial \cdot \cos x,$$

wird sein

$$\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial \cdot \cos x}{\cos x}$$

und daher durch Integrieren

$$\log S = \log \cos x + C,$$

welche Konstante daher bestimmt werden muss, dass nach Setzen von $x = 0$ auch $\log S = 0$ wird. Daher wird also $C = 0$ sein, so dass gilt

$$\log S = \log \cos x,$$

und daher wird dann durch Delogarithmieren werden

$$S = \cos x.$$

§10 Wir hatten aber $x = \frac{\pi}{2n}$ gesetzt, woher offenbar der gesuchte Wert S hervorgeht als

$$S = \cos \frac{\pi}{2n},$$

vollkommen wie schon zuvor bekannt war. Diese Analysis bestätigt also in wunderschöner Art und Weise jene Relation zwischen den Buchstaben A, B, C, D etc., welche ich anderswoher in die Rechnung eingeführt habe.