Über höchst bemerkenswerte aus dem Kalkül der imaginären Grössen herstammende Integrationen *

Leonhard Euler

§1 Ich betrachte hier im Allgemeinen irgendeine Differentialformel $Z\partial z$, deren Integral sich zumindest durch Logarithmen und Kreisbogen darbieten lasse, welches ich mit dem Charakter $\triangle : z$ bezeichne, so dass ist

$$\int Z\partial z = \triangle : z.$$

Nun schreibe ich anstelle von z irgendeine imaginäre Größe, natürlich $z = x + y\sqrt{-1}$, woher die Funktion Z in die Form $M + N\sqrt{-1}$ verwandelt werde. Auf diese Weise wird die Differentialform werden

$$(\partial x + \partial y\sqrt{-1})(M + N\sqrt{-1}),$$

der Realteil welches Produktes also dieser sein wird

$$M\partial x - N\partial y,$$

der Imaginärteil wird hingegen dieser sein

$$(N\partial x + M\partial y)\sqrt{-1}.$$

*Originaltitel: "De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis", erstmals publiziert in „*Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 7 1793, pp. 99-133", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 19, pp. 1 - 44 ", Eneström-Nummer E656, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Dann wird aber das Integral selbst, welches $\triangle : (x + y\sqrt{-1})$ ist, in eine ähnliche Form $P + Q\sqrt{-1}$ verwandelt werden können. Daher, weil die reellen und imaginären Größen einzeln miteinander verglichen werden müssen, werden daraus diese zwei Integrationen entspringen:

$$\text{I.} \quad P = \int (M\partial x - N\partial y),$$
$$\text{II.} \quad Q = \int (N\partial x + M\partial y),$$

welche zwei Formeln also immer integrierbar sein werden, auch wenn sie die zwei Variablen x und y involvieren. Es wird natürlich durch das bekannte Kriterium für Integrierbarkeit $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ wie $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$ sein. Daher wird eingesehen, dass aus jeder beliebigen Differentialformel zwei umso bemerkenswertere und umso schwierigere Integrationen abgeleitet werden können, umso komplizierter das Integral war, weswegen es der Mühe wert sein wird, mehrere Fälle entwickelt zu haben.

I. Entwicklung der Differentialformel $z^n \partial z$.

§2 Weil also gilt

$$\int z^n \partial z = \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

wenn wir $x + y\sqrt{-1}$ anstelle von z schreiben, werden diese Potenzen des Binoms unter Verwendung der Charaktere, mit denen ich schon des Öfteren die Koeffizienten bezeichnet habe, entwickelt geben

$$(x+y\sqrt{-1})^n = x^n + \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y\sqrt{-1} - \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}yy - \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y^3\sqrt{-1} + \text{etc.}$$

Daher wird erschlossen, dass sein wird

$$M = x^n - \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}yy + \left(\frac{n}{4}\right)x^{n-4}y^4 - \left(\frac{n}{6}\right)x^{n-6}y^6 + \text{etc.}$$

und

$$N = \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y - \left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^3 + \left(\frac{n}{5}\right)x^{n-5}y^4 - \text{etc.}$$

Auf die gleiche Weise wird für die Integralform sein

$$\begin{aligned}
(n+1)P &= x^{n+1} - \left(\frac{n+1}{2}\right)x^{n-1}yy + \left(\frac{n+1}{4}\right)x^{n-2}y^4 - \left(\frac{n+1}{6}\right)x^{n-6}y^6 + \text{etc.},\\
(n+1)Q &= \left(\frac{n+1}{1}\right)x^n y - \left(\frac{n+1}{3}\right)x^{n-2}y^3 + \left(\frac{n+1}{5}\right)x^{n-4}y^5 - \text{etc.}
\end{aligned}$$

§3 Nachdem diese Werte bestimmt worden sind, werden sich die beiden Integrationen, welche wir daher erlangen, so verhalten:

$$P = \int \left\{ \begin{array}{l} \partial x\left(x^n - \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}y^2 + \left(\frac{n}{4}\right)x^{n-4}y^4 - \left(\frac{n}{6}\right)x^{n-6}y^6 + \text{etc.}\right) \\ -\partial y\left(\left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y - \left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^3 + \left(\frac{n}{5}\right)x^{n-5}y^5 - \text{etc.}\right) \end{array} \right\};$$

wie diese Form P selbst gleich wird, wollen wir Term für Term sehen. Aber es ist

$$\text{I.} \quad \int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

was mit dem ersten Term der in § 2 für P gefundenen Reihe übereinstimmt. Dann werde aber genommen

$$\text{II.} \quad -\int \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}y^2\partial x - \int \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y\partial y;$$

daher entspringt aus dem ersten Teil für konstant genommenes y dieses Integral

$$-\left(\frac{n}{2}\right)\frac{x^{n-1}}{n-1}yy,$$

aus dem zweiten Teil wird hingegen für konstant genommenes x entspringen

$$-\left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}\frac{yy}{2},$$

welche zwei Ausdrücke offenbar einander gleich sind, natürlich

$$= -\frac{n}{2}x^{n-1}yy.$$

Aber der zweite Teil von P ist hingegen

$$-\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)x^{n-1}yy,$$

welcher wegen

$$\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2}$$

offenbar wird

$$-\frac{n}{2}x^{n-1}yy.$$

Es werde nun genommen

$$\text{III.} \qquad \int \left(\frac{n}{4}\right)x^{n-4}y^4\partial x + \int \left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^3\partial y.$$

Hier wird aus dem ersten Teil dieses Integral erschlossen

$$\frac{1}{n-3}\left(\frac{n}{4}\right)x^{n-2}y^4,$$

aber aus dem zweiten Teil dieses

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^4.$$

Weil also ist

$$\left(\frac{n}{4}\right) = \left(\frac{n}{3}\right)\frac{n-3}{4},$$

sind diese zwei Formeln offenbar einander gleich und das Integral wird sein

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^4 = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{1}{4}x^{n-3}y^4.$$

Der dritte Teil der für P gegebenen Form ist aber

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{4}\right)x^{n-3}y^4,$$

welche wegen

$$\binom{n+1}{4} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4}$$

jener offenbar gleich ist. Auf die gleiche Weise wird die Übereinkunft der folgenden Glieder von P gezeigt und zugleich wird schnell eingesehen, dass in gleicher Weise die Übereinstimmung für die Formel Q gezeigt werden kann.

§4 Sooft also der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, fällt die Gültigkeit unserer Formeln ganz klar ins Auge. Aber wenn n eine entweder negative oder gebrochene Zahl war, dann werden die Formeln für die Buchstaben M und N, ebenso für P und Q ins Unendliche laufen; daher muss die Rechnung in diesen Fällen anders durchgeführt werden. Es wird natürlich zuträglich sein, anstelle von x und y andere Variablen in die Rechnung einzuführen, indem $\sqrt{xx+yy} = v$ und indem ein Winkel φ gesucht wird, dass $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ ist; dann wird aber sein

$$x = v \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = v \sin \varphi$$

und daher durch Differenzieren

$$\partial x = \partial v \cos \varphi - v \partial \varphi \sin \varphi$$

und

$$\partial x = \partial v \cos \varphi - v \partial \varphi \sin \varphi$$

Nachdem diese Dinge aber festgelegt worden sind, wird sein

$$(x + y\sqrt{-1})^n = v^n(\cos n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin n\varphi),$$

woher erschlossen wird

$$M = v^n \cos n\varphi \quad \text{und} \quad N = v^n \sin n\varphi.$$

Des Weiteren wird aber für das Integral sein

$$z^{n+1} = v^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin(n+1)\varphi),$$

woher man haben wird

$$P = \frac{v^{n+1}\cos(n+1)\varphi}{n+1} \quad \text{und} \quad Q = \frac{v^{n+1}\sin(n+1)\varphi}{n+1}.$$

§5 Weil wir nun gefunden haben

$$P = \int (M\partial x - N\partial y) \quad \text{und} \quad Q = \int (N\partial x + M\partial y),$$

wird nach der Substitution werden

$$P = \int (v^n\partial v\cos(n+1)\varphi - v^{n+1}\partial\varphi\sin(n+1)\varphi)$$

und

$$Q = \int (v^n\partial v\sin(n+1)\varphi + v^{n+1}\partial\varphi\cos(n+1)\varphi).$$

Aber diese beiden Formeln lassen offenbar eine Integration zu, weil aus der ersten wird

$$P = \frac{v^{n+1}}{n+1}\cos(n+1)\varphi \quad \text{und} \quad Q = \frac{v^{n+1}}{n+1}\sin(n+1)\varphi;$$

weil diese Dinge offensichtlich sind, wollen wir zu größeren voranschreiten.

II. Entwicklung der Integralformel $\frac{\partial z}{1+zz}$, deren Integral $\arctan z$ ist

§6 Weil hier ist

$$Z = \frac{1}{1+zz},$$

wird nach Setzen von $z = x + y\sqrt{-1}$ sein

$$Z = \frac{1}{1 + 2xy\sqrt{-1} + xx - yy}.$$

Hier muss vor Allem der Nenner von den imaginären Größen befreit werden, was geschieht, indem der Zähler und der Nenner mit $1 + xx - yy - 2xy\sqrt{-1}$ multipliziert werden, und es wird werden

$$Z = \frac{1+xx-yy+2xy\sqrt{-1}}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}$$

und so wird sein

$$M = \frac{1+xx-yy}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}$$

und

$$N = \frac{-2xy}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}.$$

Daher werden wir also für das Integral $P+Q\sqrt{-1}$ erlangen

$$P = \int \frac{(1+xx-yy)\partial x + 2xy\partial y}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}$$

und

$$Q = \int \frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{(1+xx-yy)^2+4xxyy};$$

und wir wissen schon sicher, dass sie integrierbar sind.

§7 Wir wollen nun genauer den Nenner betrachten, der in diese Form entwickelt wird

$$(xx+yy)^2+2(xx-yy)+1,$$

welche weiter reduziert wird auf

$$(xx+yy+1)^2-4yy,$$

welche also das Produkt aus diesen zwei Faktoren ist

$$(xx+yy+1+2y)(xx+yy+1-2y),$$

welche Faktoren also $xx+(y+1)^2$ und $xx+(y-1)^2$ sind. Dieser Sache wegen werden jene Brüche in zwei Brüche aufgelöst werden können, von denen der Nenner des einen $xx+(y+1)^2$ und des anderen $xx+(y-1)^2$ ist. Um diese Auflösung durchzuführen, wollen wir die Auflösung des allgemeinen Bruches $\frac{S}{TU}$ in diese zwei Brüche $\frac{F}{T}+\frac{G}{U}$ gebrauchen, wo der Zähler aus der Formel $\frac{S}{U}$

aufgefunden wird, indem $T = 0$ gesetzt wird; der andere G hingegen aus der Formel $\frac{S}{T}$, indem $U = 0$ gesetzt wird.

§8 Für die erste Formel wird sein

$$\begin{aligned} S &= (1 + xx - yy)\partial x + 2xy\partial y. \\ T &= xx + (y+1)^2 \quad \text{und} \quad U = xx + (y-1)^2; \end{aligned}$$

deswegen muss für den ersten Bruch $\frac{F}{T}$ der Buchstabe F aus nachstehendem Bruch definiert werden

$$\frac{(1 + xx - yy)\partial x + 2xy\partial y}{xx + (y-1)^2},$$

indem $xx + (y+1)^2 = 0$ gesetzt wird. Daher, weil daraus $xx = -(y+1)^2$ ist, wird, nachdem dieser Wert im Zähler wie im Nenner eingesetzt worden ist, wo freilich xx auftaucht, aufgefunden werden

$$\frac{-2\partial x(yy + y) + 2xy\partial y}{-4y} = \frac{1}{2}\partial x(y+1) - \frac{1}{2}x\partial y.$$

Auf die gleiche Weise muss für den Bruch $\frac{G}{U}$ der Zähler G aus diesem Bruch bestimmt werden

$$\frac{(1 + yy - yy)\partial x + 2xy\partial y}{xx + (y+1)^2},$$

indem $xx + (y-1)^2 = 0$ gesetzt wird, woher $xx = -(y-1)^2$ wird, nach Einsetzen welches Wertes aufgefunden wird

$$G = \frac{2\partial x(y - yy) + 2xy\partial y}{4y} = -\frac{1}{2}\partial x(y-1) + \frac{1}{2}x\partial y.$$

Daher werden wir also haben

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{\partial(y+1) - x\partial y}{xx + (y+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial x(y-1) - x\partial y}{xx + (y-1)^2}.$$

§9 Nun bereitet aber die Integration dieser Formeln keine weiteren Schwierigkeiten. Wenn wir nämlich für die erste $y+1 = tx$ setzen, wird $\partial y = t\partial x + x\partial t$ sein, woher diese Integralformel verwandelt werden wird in

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\partial t}{1+tt} = -\frac{1}{2}\arctan t = -\frac{1}{2}\arctan\frac{y+1}{x}.$$

Für die andere Formel werde $y-1 = ux$ gesetzt, dass $\partial y = u\partial x + x\partial u$ ist, und sie wird übergehen in

$$\frac{1}{2}\int\frac{\partial u}{1+uu} = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan\frac{y-1}{x},$$

weshalb wir den Wert des Buchstaben P erlangt haben, welcher dieser ist

$$P = \frac{1}{2}\arctan\frac{y-1}{x} - \frac{1}{2}\arctan\frac{y+1}{x}.$$

Weil nun gilt

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\frac{a-b}{1+ab},$$

wird sein

$$P = -\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{xx+yy-1}.$$

§10 Wir wollen nun auf die gleiche Weise beim Finden des Wertes Q vorgehen und es wird sein

$$S = (1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x$$

und

$$T = xx+(y+1)^2 \quad \text{und} \quad U = xx+(y-1)^2,$$

woher für den Bruch $\frac{F}{T}$ der Zähler F nachstehendem Bruch gleich werden wird

$$\frac{S}{U} = \frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{xx+(y-1)^2},$$

wenn freilich $xx + (y+1)^2 = 0$ oder $xx = -(y+1)^2$ gesetzt wird. Es wird also sein

$$F = \frac{+2\partial y(yy+y) + 2xy\partial y}{4y} = \frac{1}{2}\partial y(y+1) + \frac{1}{2}x\partial x.$$

Dann wird aber der Zähler G aus dem Bruch

$$\frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{xx+(y+1)^2},$$

indem $xx = -(y-1)^2$ gesetzt wird, auf diese Weise ausgedrückt sein

$$G = -\frac{-2\partial y(yy-y) - 2xy\partial x}{4y} = -\frac{1}{2}\partial y(y-1) - \frac{1}{2}x\partial x.$$

Daher wird also werden

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{\partial y(y+1) + x\partial x}{xx+(y+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial y(y-1) + x\partial x}{xx+(y-1)^2},$$

wo in jeder der beiden Formeln der Wert des Zählers das halbe Differential des Nenners ist, und so ist der gesuchte Wert

$$Q = \frac{1}{4}\log(xx+(y+1)^2) - \frac{1}{4}\log(xx+(y-1)^2) = \frac{1}{4}\log\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

§11 Nachdem also diese Werte für P und Q gefunden worden sind, wird der Wert des gesuchten Integrals $P + Q\sqrt{-1}$ sein, woher, weil das Integral der vorgelegten Formel $\arctan z$ ist, wir nun sicher wissen, wenn wir $x + y\sqrt{-1}$ schreiben, dass dann der Kreisbogen, dessen Tangens die imaginäre Formel $x + y\sqrt{-1}$ ist, immer dieser Formel gleich wird

$$-\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{xx+yy-1} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\log\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

§12 Und es war in dieser Tat nicht nötig, diese Werte für P und Q durch Integration zu suchen, sondern sie können unmittelbar aus dem bekannten Integral $\arctan(x + y\sqrt{-1})$ abgeleitet werden. Wenn nämlich festgelegt wird

$$P + Q\sqrt{-1} = \arctan(x + y\sqrt{-1}),$$

wird nach Ändern des Vorzeichens des Imaginärteils sein

$$P - Q\sqrt{-1} = \arctan(x - y\sqrt{-1}).$$

Nachdem diese Formeln nun addiert worden sind, geht hervor

$$\begin{aligned} 2P &= \arctan(x + y\sqrt{-1}) + \arctan(x - y\sqrt{-1}) \\ &= \arctan \frac{2x}{1 - xx - yy} \end{aligned}$$

und daher

$$P = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1 - xx - yy} = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{xx + yy - 1}.$$

Darauf liefert die Subtraktion jener Formeln

$$\begin{aligned} 2Q\sqrt{-1} &= \arctan(x + y\sqrt{-1}) - \arctan(x - y\sqrt{-1}) \\ &= \arctan \frac{2y\sqrt{-1}}{1 + xx + yy}. \end{aligned}$$

Weil aber ist

$$\arctan u\sqrt{-1} = \int \frac{\partial u\sqrt{-1}}{1 - uu} = \sqrt{-1} \cdot \int \frac{\partial u}{1 - uu} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1 + u}{1 - u},$$

wird daher, weil in unserem Fall $u = \frac{2y}{1+xx+yy}$ ist, sein

$$2Q\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{xx + (y+1)^2}{xx + (y-1)^2},$$

also

$$Q = \frac{1}{4} \log \frac{xx + (y+1)^2}{xx + (y-1)^2},$$

genauso wie wir es auch gefunden haben. Dies ist aber besonders für andere Fälle anzumerken, wo, sooft es möglich ist, das Integral $\int Z\partial z$ durch Logarithmen oder Kreisbogen auszudrücken; weil ja es ja nach Setzen von $z = x + y\sqrt{-1}$ möglich ist, diese in zwei Teile aufzulösen, einen reellen, einen einfach imaginären, werden daher die Werte der Größen P und Q angegeben werden können, wie lang und im Verborgenen liegend diese die für diese Buchstaben resultierenden Integralformlen auch immer waren.

III. Entwicklung der Differentialformel $\frac{\partial z}{1+z^3}$, deren Integral bekannt ist dieses zu sein: $\frac{1}{3}\log(1+z)-\frac{1}{3}\log\sqrt{1-z+zz}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$

§13 Wir wollen also $z=x+y\sqrt{-1}$ setzen und es wird sein

$$Z=\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{1+x^3+3xxy\sqrt{-1}-3xyy-y^3\sqrt{-1}};$$

dort, weil der Nenner dieser ist

$$1+x^3-3xyy+\sqrt{-1}(3xxy-y^3),$$

werde erweitert mit

$$1+x^3-3xyy-\sqrt{-1}(3xxy-y^3)$$

und es wird werden

$$Z=\frac{1+x^3-3xyy-\sqrt{-1}(3xxy-y^3)}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}.$$

Daher erlangen wir also

$$M=\frac{1+x^3-3xyy}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}$$

und

$$N=-\frac{3xxy-y^3}{1+2x(xx-2yy)+(xx+yy)^3}.$$

§14 Aus diesen Werten erhalten wir nun, wenn wir das gesuchte Integral mit $P+Q\sqrt{-1}$ bezeichnen, für jede der beiden Größen P und Q Integralformeln und zwar

$$P=\int\frac{(1+x^3-3xyy)\partial x+(3xxy-y^3)\partial y}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}$$

und

$$Q = \int \frac{(1+x^3-3xyy)\partial y - (3xxy-y^3)\partial x}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3},$$

welche beiden Formeln wir schon im Voraus wissen, integrierbar zu sein, obgleich die Entwicklung dieser Formeln sehr schwer ist, weil die Faktoren des Nenners nicht bekannt sind; dennoch wird es indes möglich sein, die Werte dieser Buchstaben P und Q aus dem durch z ausgedrückten anfänglichen Integral z zu derivieren.

§15 Weil ja in diesen Formeln die zwei Variablen x und y enthalten sind, wird sich nach Belieben diese eine der beiden als Konstante behandeln lassen. So, wenn wir x als konstant annehmen, werden wir, indem wir $x = a$ setzen, für die Buchstaben P und Q diese Integralformeln haben

$$P = \int \frac{(3aay-y^3)\partial y}{1+2a(aa-3yy)+(aa+yy)^3}$$

und

$$Q = \int \frac{(1+a^3-3ayy)\partial y}{1+2a(aa-3yy)+(aa+yy)^3}.$$

Wenn auf die gleiche Weise y angenommen wird, werden durch Setzen von $y = b$ für dieselben Buchstaben die folgenden Werte hervorgehen

$$P = \int \frac{(1+x^3-3bbx)\partial x}{1+2x(xx-3bb)+(bb+xx)^3}$$

und

$$Q = \int \frac{(b^3-3bxx)\partial x}{1+2x(xx-3bb)+(bb+xx)^3},$$

welche Werte, wenn die Rechnung in entsprechender Weise durchgeführt wird, übereinstimmen müssen. Aber dennoch wird es immer sicherer sein, die anfänglichen Formeln zu gebrauchen, in welche die beiden Variablen x und y eingehen, deshalb weil, wenn wir diese letzteren Formeln gebrauchten, die Hinzufügung einer Konstante zu einem Fehler verleiten könnte, wenn natürlich in der ersten der Buchstabe a, in den zweiter hingegen der Buchstabe b in die Konstante eingeführt werden würde.

§16 Wegen dieser immensen Schwierigkeiten ist es also nicht unwesentlich verwunderlich, dass die Werte dieser Integrale tatsächlich nichtsdestoweniger dargeboten werden können; denn es ist nur nötig, dass im durch z ausgedrückten Integral $x + y\sqrt{-1}$ anstelle von z geschrieben wird und die einzelnen Glieder in ihre zwei Teile aufgelöst werden, einen reellen, einen imaginären; dann werden nämlich die Realteile zusammengenommen den Wert von P, die Imaginärteile aber den Wert von Q geben werden.

§17 Weil ja nämlich im erwähnten Integral nur Logarithmen zusammen mit einem Kreisbogen auftauchen, wird es genügen, die zwei folgenden Reduktionen zu kennen:

$$\text{I.}\quad \log(p + q\sqrt{-1}) = \log\sqrt{pp + qq} + \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{q}{p}$$

und

$$\text{II.}\quad \arctan(p + q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2p}{1 - pp - qq} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\log\frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2}.$$

Daher, weil der erste Teil $\frac{1}{3}\log(1+z)$ ist, wird nach Setzen von $z = x + y\sqrt{-1}$ sein

$$\log(1 + x + y\sqrt{-1}) = \log\sqrt{(1+x)^2 + yy} + \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{y}{1+x}.$$

Für den zweiten Teil, der $-\frac{1}{6}\log(1 - z + zz)$ war, wird wegen

$$1 - z + zz = 1 - x + xx - yy + \sqrt{-1}(2xy - y),$$

also

$$p = 1 - x + xx - yy \quad \text{und} \quad q = 2xy - y,$$

sein

$$\log(1 - z + zz) = \log\sqrt{(xx + yy - x)^2 + 2xx - yy - 2x + 1}$$
$$+\sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{2xy - y}{1 - x + xx - yy}.$$

Schließlich war der dritte Teil $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$, wo also ist

$$\frac{z}{2-z} = \frac{x+y\sqrt{-1}}{2-x-y\sqrt{-1}} = \frac{2x+2y\sqrt{-1}-xx-yy}{(2-x)^2+yy},$$

woher für die obere Formel sein wird

$$p = \frac{(2x-xx-yy)\sqrt{3}}{(2-x)^2+yy} \quad \text{und} \quad q = \frac{2y\sqrt{3}}{(2-x)^2+yy}.$$

Daher wird also für diesen Teil sein

$$\arctan\frac{z\sqrt{3}}{2-z} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2(2x-xx-yy)((2-x)^2+yy)\sqrt{3}}{(2-x)^4+2yy(2-x)^2-3(2-x)^2xx+6xyy(2-x)-12yy-2y^4}$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{4}\log\frac{pp+(q+1)^2}{pp+(q-1)^2};$$

weil diese Ausdrücke dermaßen lang sind, wollten wir im letzten Teil die Buchstaben p und q beibehalten; deswegen werden wir um vieles weniger die Werte für P und Q hier darbieten, weil es genügt zu wissen, dass die Realteile zusammengenommen P, die Imaginärteile hingegen durch $\sqrt{-1}$ dividiert Q liefern; und dieses Grundes wegen ist es offenbar, warum die tatsächliche Entwicklung der oberen Formeln nicht gelungen ist.

IV. Entwicklung der Differentialformel $\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$, deren Integral überall verstreut entwickelt aufgefunden wird, wenn freilich die Exponenten m und n ganze Zahlen waren

§18 Aus den bisher angegeben Dingen wird klar verstanden, dass hier ein weit anderer Weg zu beschreiten ist. Wir wollen also festlegen

$$x = v\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = v\sin\varphi,$$

so dass wir anstelle der zwei Variablen x und y sofort die zwei anderen v und φ in die Rechnung einführen; dann wird nämlich sein

$$z^m = v^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)$$

und

$$1+z^n = 1+v^n(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi).$$

Daher wollen den vorgelegten Bruch oben und unten multiplizieren mit

$$1+v^n(\cos n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi)$$

und daher wird der Nenner als $1+2v^n\cos n\varphi + v^{2n}$ hervorgehen.

§19 Weil aber für den Zähler gilt

$$z^{m-1}\partial z = \frac{1}{m}\partial.z^m = \frac{1}{m}\partial.v^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi),$$

aber im Allgemeinen hingegen

$$\partial.(\cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega) = \partial\omega\sqrt{-1}(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega),$$

wird nach der Entwicklung sein

$$\begin{gathered} z^{m-1}\partial z = v^{m-1}\partial v(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi) \\ +v^m\partial\varphi\sqrt{-1}(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi) \end{gathered}$$

oder

$$z^{m-1}\partial z = v^{m-1}(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)(\partial v + v\partial\varphi\sqrt{-1}).$$

Diese Formel muss also darüber hinaus multipliziert werden mit

$$1+v^n(\cos n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi),$$

für welche Operation angemerkt sei, dass ist

$$\begin{gathered} (\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)(\cos\beta - \sqrt{-1}\cdot\sin\beta) \\ = \cos(\alpha-\beta) + \sqrt{-1}\cdot\sin(\alpha-\beta); \end{gathered}$$

daher wir unser Zähler also sein

$$\begin{gathered} v^{m-1}(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)(\partial v + v\partial\varphi\sqrt{-1}) \\ +v^{m+n-1}(\cos(m-n)\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin(m-n)\varphi)(\partial v + v\partial\varphi\sqrt{-1}), \end{gathered}$$

dessen Realteil also sein wird

$$v^{m-1}\partial v\cos m\varphi + v^{m+n-1}\partial v\cos(m-n)\varphi$$
$$-v^m\partial\varphi\sin m\varphi - v^{m+n}\partial\varphi\sin(m-n)\varphi;$$

der Imaginärteil wird hingegen sein

$$v^{m-1}\partial v\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi + v^m\partial\varphi\sqrt{-1}\cdot\cos m\varphi$$
$$+v^{m+n-1}\partial v\sqrt{-1}\cdot\sin(m-n)\varphi + v^{m+n}\partial\varphi\sqrt{-1}\cdot\cos(m-n)\varphi.$$

§20 Nachdem diese Dinge vorbereitet worden sind, wenn wir das gesuchte Integral unserer Differentialformel $= P + Q\sqrt{-1}$ setzen, werden wir jeden der beiden Teile durch die folgenden Integralformeln ausgedrückt finden:

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v(\cos m\varphi + v^n\cos(m-n)\varphi) - v^m\partial\varphi(\sin m\varphi + v^n\sin(m-n)\varphi)}{1+2v^n\cos n\varphi + v^{2n}},$$

$$Q = \int \frac{v^{m-1}\partial v(\sin m\varphi + v^n\sin(m-n)\varphi) + v^m\partial\varphi(\cos m\varphi + v^n\cos(m-n)\varphi)}{1+2v^n\cos n\varphi + v^{2n}}.$$

Diese Integrale werden sich also aus dem anfänglichen durch z ausgedrückten Integral derivieren lassen, wie wir schon zuvor bemerkt haben, weil ja das ganze Integral teils aus Logarithmen, teils aus Kreisbogen, deren Tangenten gegeben sind, zusammengesetzt wird. Dennoch wollen wir indes sehen, ob es möglich ist, diese Integrale mit der üblichen Methode ausfindig zu machen.

Untersuchung der Integralformel $P = \int \frac{v^{m-1}\partial v(\cos m\varphi+v^n\cos(m-n)\varphi)-v^m\partial\varphi(\sin m\varphi+v^n\sin(m-n)\varphi)}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}}$

§21 Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass vor Allem der Nenner in seine Faktoren und zwar in trinomiale aufgelöst wird, weil ja für unser Unterfangen alle Faktoren reell sein müssen. Wir wollen festlegen, dass ein Faktor dieses Nenners $1 - 2v\cos\omega + vv$ ist und es notwendig, dass, nachdem dieser Faktor $= 0$ gesetzt worden ist (woher $v = \cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega$ wird), auch der Nenner selbst verschwindet. Weil ja also daher werden wird

$$v^n \quad = \cos n\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin n\omega$$

und

$$v^{2n} = \cos 2n\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin 2n\omega,$$

wird nach Einsetzen von diesen der Nenner diese Form annehmen

$$1 + 2\cos n\varphi \cos n\omega + \cos 2n\omega + \sqrt{-1}(2\cos n\varphi \sin n\omega + \sin 2n\omega),$$

deren Real- wie Imaginärteil jeweils Null gleich werden muss. Aus dem imaginären entspringt diese Gleichung

$$2\cos n\varphi \sin n\omega + \sin 2n\omega = 0,$$

woher durch Dividieren durch $2\sin n\omega$ hervorgeht

$$\cos n\varphi + \cos n\omega = 0.$$

Aber aus dem Realteil wird hingegen abgeleitet

$$1 + 2\cos n\varphi \cos n\omega + \cos 2n\omega = 0,$$

woher, weil $1 + \cos 2n\omega = 2\cos^2 n\omega$ ist, sein wird

$$\cos n\varphi + \cos n\omega = 0,$$

genauso wie zuvor. Daher tritt es klar zu tage, dass der Winkel ω so angenommen werden muss, dass wird

$$\cos n\omega = -\cos n\varphi,$$

welcher Bedingung auf unendlich viele Weisen Genüge geleistet werden kann, indem Folgendes angenommen wird: Entweder

$$n\omega = \pi \pm n\varphi \quad \text{oder} \quad n\omega = 3\pi \pm n\varphi \quad \text{oder} \quad n\omega = 5\pi \pm n\varphi$$

und daher im Allgemeinen $n\omega = (2i+1)\pi \pm n\varphi$. Und daher werden also n verschiedene Werte für ω erhalten werden; ebenso viele brauchen wir aber, um den Nenner zu vervollständigen. Die allgemeine Form des Winkels ω wird also sein

$$\omega = \frac{(2i+1)\pi}{n} \pm \varphi;$$

und welcher Wert von dieser Art auch immer dem Winkel ω zugeteilt wird, $1-2v\cos\omega+vv$ ein Faktor sein, mit welchem zugleich der Nenner selbst verschwinden wird, und es wird natürlich $v^{2n}=-2v^n\cos n\varphi-1$ werden.

§22 Nachdem nun alle Faktoren des Nenners gefunden worden sind, wird die vorgelegte Formel selbst in ebenso viele Teile aufgelöst werden können, deren Nenner diese trinomialen Faktoren $1-2v\cos\omega+vv$ selbst sind; deswegen wird für jeden beliebigen solchen Faktoren der ihm entsprechende Bruch, das heißt sein Zähler, ausfindig gemacht werden müssen; weil dieser aus dem Zähler der vorgelegten Form selbst abgeleitet werden muss, wollen wir der Kürze wehen den Zähler der vorgelegten Integralformel wie folgt festlegen

$$R\partial v+S\partial\varphi,$$

so dass gilt

$$R=v^{m-1}(\cos m\varphi+v^n\cos(m-n)\varphi)$$

und

$$S=v^m(\sin m\varphi+v^n\sin(m-n)\varphi).$$

Nun wollen wir zuerst den nachstehenden Bruch entwickeln

$$\frac{R}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}},$$

welchen wir ansetzen wollen, diesen einfachen Bruch zu involvieren

$$\frac{r}{1-2v\cos\omega+vv},$$

für dessen Zähler r bekannt ist, dass der Wert aus diesem Bruch deriviert werden muss

$$\frac{R(1-2v\cos\omega+vv)}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}},$$

nachdem $1-2v\cos\omega+vv=0$ gesetzt worden ist, wo die Operation freilich so durchgeführt werden muss, dass für r eine ganze Größe erhalten wird.

§23 Weil ja aber im Fall $1 - 2v\cos\omega + vv = 0$ der Zähler wie der Nenner verschwindet, ist es bekannt, dass in diesem Fall dieser Bruch

$$\frac{1 - 2v\cos\omega + vv}{1 + 2v^n\cos n\varphi + v^{2n}}$$

diesem gleich wird

$$\frac{v - \cos\omega}{nv^{2n-1} + nv^{n-1}\cos n\varphi} = \frac{vv - v\cos\omega}{nv^n(v^n + \cos n\varphi)},$$

dessen Nenner wegen $v^{2n} = -2v^n\cos n\varphi - 1 \; -nv^n\cos\varphi - n$ geben wird; der Zähler wird wegen $vv = 2v\cos\omega - 1$ hingegen $v\cos\omega - 1$ sein und daher dann der Bruch selbst

$$= \frac{-v\cos\omega + 1}{n(v^n\cos n\varphi + 1)}.$$

Aus dem gleich Null gesetzten Nenner wird aber $v^n = -\cos n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$, welcher Wert in diesem Nenner eingesetzt gibt

$$\frac{1 - v\cos\omega}{-n\cos^2 n\varphi + n\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi\cos n\varphi + n} = \frac{1 - v\cos\omega}{n\sin n\varphi(\sin n\varphi + \sqrt{-1}\cos n\varphi)}.$$

Der Zähler wird hingegen für $v = \cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega$ übergehen in

$$\sin\omega(\sin\omega - \sqrt{-1}\cdot\cos\omega)$$

und so wird dieser ganze Bruch sein

$$\frac{\sin\omega(\sin\omega - \sqrt{-1}\cdot\cos\omega}{n\sin n\varphi(\sin n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\cos n\varphi)}.$$

Nun werde dieser Bruch mit $\sin n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\cos n\varphi$ multipliziert und es wird hervorgehen

$$-\frac{\sin\omega(\cos(\omega + n\varphi) + \sqrt{-1}\cdot\sin(\omega + n\varphi))}{n\sin n\varphi}.$$

Aber die imaginären Größen, welche noch übrig sind, stören unser Unternehmen ungemein. Dennoch wird dieser Umstand indes beseitigt werden können, wenn die Größe v in den Zähler eingeführt wird. Wir wollen also festlegen, dass der Zähler $Av + b$ ist, sodass A und B reelle Größen sind; daher, weil gilt

$$Av + B = A\cos\omega + B\sqrt{-1}\cdot A\sin\omega,$$

werden die Real- und Imaginärteile jeweils einander gleich und so muss sein

$$A\sin\omega = -\sin(\omega + n\varphi)\sin\omega,$$

woher wird

$$A = -\sin(\omega + n\varphi),$$

nach Einsetzen welches Wertes die Realteile geben werden

$$-\cos\omega\sin(\omega + n\varphi) + B = -\sin\omega\cos(\omega + n\varphi),$$

woher wird

$$B = \sin n\varphi,$$

und so wird unser Bruch sein

$$\frac{-v\sin(\omega + n\varphi) + \sin n\varphi}{n\sin\varphi}.$$

§24 Nun ist es also nur übrig, dass diese Formel mit R multipliziert wird, natürlich seinem Wert, welchen es annehmen wird, nachdem Nachstehendes festgelegt worden ist

$$vv - 2v\cos\omega + 1 = 0.$$

Es war aber

$$R = v^{m-1}(\cos m\varphi + v^n\cos(m-n)\varphi),$$

welche nach Setzen von $v = \cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega$ übergeht in

$$\begin{gathered}\cos m\varphi\cos(m-1)\omega + \cos(m-n)\varphi\cos(m+n-1)\omega\\ +\sqrt{-1}(\cos m\varphi\sin(m-1)\omega + \cos(m-n)\varphi\sin(m+n-1)\omega),\end{gathered}$$

an deren Stelle, um die imaginären Größen herauszunehmen, wir $Cv + D$ schreiben wollen oder

$$C\cos\omega + D + \sqrt{-1}\cdot C\sin\omega,$$

woher sein wird

$$C = \frac{\cos m\varphi \sin(m-1)\omega + \cos(m-n)\varphi \sin(m+n-1)\omega}{\sin\omega}$$

und daher

$$D = \frac{\cos m\varphi \sin(2-m)\omega + \cos(m-n)\varphi \sin(2-m-n)\omega}{\sin\omega}.$$

§25 Nachdem nun die Werte der Buchstaben A, B, C, D gefunden worden sind, wird unser gesuchter Zähler $r = (Av+B)(Cv+D)$ sein. Weil aber hier noch das Quadrat vv enthalten ist, bleibt das an seiner Stelle zu schreibende $2v\cos\omega - 1$ zurück und so wird der richtige Wert sein

$$r = 2ACv\cos\omega - AC + (AD+BC)v + BD.$$

Als logische Konsequenz wird der diesem Faktor entsprechende Anteil des Integrals für die Variable v sein

$$\int \frac{r\partial v}{1 - 2v\cos\omega + vv}.$$

Auf die gleiche Weise muss für die andere Variable φ der Partialbruch aus dem Bruch

$$\frac{S}{1 - 2v^n \cos n\varphi + v^{2n}}$$

deriviert werden; wenn dieser festgelegt wird

$$\frac{s}{1 - 2\cos\omega + vv}$$

und die Größe S auf die Form $Ev + F$ gebracht wird, wird auf die gleiche Weise aufgefunden werden

$$S = (Av+B)(Ev+F),$$

wo darüber hinaus aber $2v\cos\omega - 1$ anstelle von vv geschrieben werden muss, wonach man für die Variable φ diese Formel haben wird

$$\int \frac{s\partial\varphi}{1-2v\cos\omega+vv}.$$

§26 Wenn wir daher diese nun sammeln, wird der aus dem beliebigen Faktor $1-2v\cos\omega+vv$ herstammende Anteil des Integrals dieser sein

$$\int \frac{r\partial v+s\partial\varphi}{1-2v\cos\omega+vv};$$

dort ist es besonders anzumerken, dass hier dass allbekannte Kriterium über die Integrierbarkeit von Formeln, die zwei Variablen involvieren, sicher Geltung haben wird. Es wird aber meistens ausreichen, nur die andere der beiden Variablen betrachtet zu haben.

§27 Hier könnte freilich, um den Wert des Buchstaben P zu finden, nachstehenden Formel genügen

$$\int \frac{r\partial v}{1-2v\cos\omega+vv},$$

in welcher allein v wie eine Variable behandelt wird, deren Integral, wie bekannt ist, durch Logarithmen und Kreisbogen dargeboten werden kann. Dennoch muss indes auch dieses selbe Integral aus der anderen Formel,

$$\int \frac{s\partial\varphi}{1-2v\cos\omega+vv},$$

gefunden werden, in welcher allein der Winkel φ zusammen mit dem von ihm abhängenden Winkel ω variabel angenommen wird, welche Integration umso bemerkenswerter ist, weil mehrere Vielfachen des Winkels φ in ihr auftauchen und noch keine Methode, solche Formeln zu behandeln, hinreichend entwickelt worden ist. Aber diese Dinge sind in der Tat zu allgemein, als dass wir das, was in ihnen enthalten ist, klar erkennen können, daher wird es uns nicht unwesentlich viel an Erkenntnis verschaffen, wenn wir gewisse sehr einfache Fälle betrachten werden.

Anwendung auf die Differentialformel $\frac{\partial z}{1+z}$,

WO $m = 1$ UND $n = 1$ IST.

§28 Weil das Integral dieser Formel $\log(1+z)$ ist, wird nach Setzen von $z = x + y\sqrt{-1}$ oder besser allgemeiner, wie es im Allgemeinen gemacht haben, nach Setzen von

$$z = v(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$$

das Integral

$$\log(1 + v\cos\varphi + v\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$$

in diese Form entwickelt

$$P + Q\sqrt{-1},$$

wobei gilt

$$P = \log\sqrt{1 + 2v\cos\varphi + vv}$$

und

$$Q = \arctan\frac{v\sin\varphi}{1 + v\cos\varphi}.$$

§29 Nun wollen wir aber versuchen, dieselben Werte durch Integration zu finden. Nachdem aber $m = n = 1$ gesetzt worden ist, werden die allgemeinen für P und Q dargebotenen Formeln die folgenden Formen annehmen

$$P = \int\frac{\partial v(\cos\varphi + v) - v\partial\varphi\sin\varphi}{1 + 2v\cos\varphi + vv}$$

und

$$Q = \int\frac{\partial v\sin\varphi + v\partial\varphi\cos\varphi + vv\partial\varphi}{1 + 2v\cos\varphi + vv},$$

wo die erste Form offenbar dieses Integral hat

$$\frac{1}{2}\log(1 + 2v\cos\varphi + vv),$$

die zweite hat hingegen das Integral

$$\arctan \frac{v \sin \varphi}{1 + v \cos \varphi},$$

so wie die Differentiation offenbar aufzeigt, so dass es hier nicht nötig war, den anderen Winkel ω in die Rechnung einzuführen.

Anwendung auf die Differentialformel $\frac{\partial z}{1+zz}$, wo $m = 1$ und $n = 2$ ist

§30 Diesen Fall haben wir schon oben entwickelt, wo wir gesehen haben, dass das Integral nach Setzen von $z = x + y\sqrt{-1}$ ist

$$\arctan(x + y\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{xx + yy - 1} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{xx + (y+1)^2}{xx + (y-1)^2}.$$

Daher wird also, wenn wir festlegen

$$x = v \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = v \sin \varphi,$$

für das Integral $P + Q\sqrt{-1}$ sein

$$P = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2v \cos \varphi}{vv - 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2v \cos \varphi}{1 - vv}$$

und

$$Q = \frac{1}{4} \log \frac{1 + 2v \sin \varphi + vv}{1 - 2v \sin \varphi + vv}.$$

Wir wollen also sehen, wie wir diese Werte durch Integration finden.

§31 Weil also hier $m = 1$ und $n = 2$ ist, werden die allgemeinen Formeln liefern

$$P = \int \frac{\partial v(1 + vv) \cos \varphi - v \partial \varphi (1 - vv) \sin \varphi}{1 + 2vv \cos 2\varphi + v^4},$$

$$Q = \int \frac{\partial v(1 - vv) \sin \varphi + v \partial \varphi (1 + vv) \cos \varphi}{1 + 2vv \cos 2\varphi + v^4},$$

wo es angemerkt sei, dass die zwei Faktoren des Nenners, wegen

$\cos 2\omega = -\cos 2\varphi = \cos(\pi \pm 2\varphi)$ und daher entweder $\omega = 90^\circ + \varphi$ oder $\omega = 90^\circ - \varphi$, ist

$$1 + 2v \sin\varphi + vv \quad \text{und} \quad 1 - 2v \sin\varphi + vv.$$

Daher, um diese Auflösung zu erledigen, wollen wir im Allgemeinen diesen Bruch betrachten

$$\frac{S}{1 + 2vv \cos 2\varphi + v^4},$$

welchen wir festlegen wollen, in diese Teile aufgelöst zu werden

$$\frac{F}{1 + 2v \sin\varphi + vv} + \frac{G}{1 - 2v \sin\varphi + vv},$$

wo wir wissen, diese die Zähler so bestimmt werden, dass ist

$$F = \frac{S}{1 - 2v \sin\varphi + vv} \quad \text{nach Setzen von} \quad 1 + 2v \sin\varphi + vv = 0$$

und

$$G = \frac{S}{1 + 2v \sin\varphi + vv} \quad \text{nach Setzen von} \quad 1 - 2v \sin\varphi + vv = 0.$$

§32 Weil wir aber nun so für P wie für Q zwei Teile haben, den einen durch ∂v, den anderen hingegen durch $\partial\varphi$ gegebenen, sei zuerst

$$S = (1 + vv)\cos\varphi,$$

woher wird

$$F = \frac{(1 + vv)\cos\varphi}{1 - 2v \sin\varphi + vv} \quad \text{und nach Setzen wird} \quad 1 + vv = -2v \sin\varphi,$$

woher sofort wird

$$F = \frac{-2v \sin\varphi \cos\varphi}{-4v \sin\varphi} = \frac{1}{2}\cos\varphi;$$

und auf die gleiche Weise wird sein

$$G = \frac{(1+vv)\cos\varphi}{1+2v\sin\varphi+vv} \quad \text{nach Setzen von} \quad 1+vv=+2v\sin\varphi$$

und so wird sein

$$G = +\frac{1}{2}\cos\varphi;$$

deswegen wird für P der das Element ∂v enthaltene Teil des Integrals sein

$$P = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v\cos\varphi}{1+2v\sin\varphi+vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v\cos\varphi}{1-2v\sin\varphi+vv}.$$

§33 Für den Teil, wo φ variabel ist, werden wir haben

$$S = -v(1-vv)\sin\varphi,$$

woher werden wird

$$F = \frac{-v(1-vv)\sin\varphi}{1-2v\sin\varphi+vv} \quad \text{nach Setzen von} \quad 1+vv=-2v\sin\varphi \quad \text{und daher} \quad vv=-2v\sin\varphi-1,$$

woher wird

$$F = \frac{1}{2}(1+v\sin\varphi).$$

Auf die gleiche Weise wird sein

$$G = \frac{-v(1-vv)\sin\varphi}{1+2v\sin\varphi+vv},$$

nachdem natürlich $1+vv=2v\sin\varphi$ gesetzt worden ist, wonach wird

$$G = -\frac{1}{2}(1-v\sin\varphi).$$

Daher wird also der vollständige Wert der Größe P aus jeder der beiden Veränderlichkeiten sein

$$P = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v\cos\varphi+(1+v\sin\varphi)\partial\varphi}{1+2v\sin\varphi+vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v\cos\varphi-(1-v\sin\varphi)\partial\varphi}{1-2v\sin\varphi+vv}.$$

§34 Auf die gleiche Weise haben wir für die Größe Q

$$S = (1 - vv)\sin\varphi$$

und daher wird werden

$$F = \frac{(1 - vv)\sin\varphi}{1 - 2v\sin\varphi + vv} \quad \text{und nach Setzen von} \quad 1 + vv = -2v\sin\varphi,$$

woher wird

$$F = -\frac{1 + v\sin\varphi}{2v}.$$

Hier muss aber v aus dem Nenner herausgeworfen werden; für dieses Ziel werde mit $v + 2\sin\varphi$ erweitert, dass der Nenner $2(vv + 2v\sin\varphi) = -2$ ist; der Zähler wird aber dann sein

$$vv\sin\varphi + v + 2v\sin^2\varphi + 2\sin\varphi$$

und daher

$$F = \frac{1}{2}(v + \sin\varphi).$$

Auf die gleiche Weise wird sein

$$G = \frac{(1 - vv)\sin\varphi}{1 + 2v\sin\varphi + vv}, \quad \text{natürlich nach Setzen von} \quad 1 + vv = 2v\sin\varphi,$$

wonach wird

$$G = \frac{1 - vv}{4v},$$

und wegen $1 = 2v\sin\varphi - vv$ wird sein

$$G = \frac{1}{2}(\sin\varphi - v).$$

Und so wird der erste die Variable v enthaltene Teil für Q sein

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{\partial v(v + \sin\varphi)}{1 + 2v\sin\varphi + vv} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial v(\sin\varphi - v)}{1 - 2v\sin\varphi + vv}.$$

Für die anderen Teil, der die Variable φ hat, wird hingegen sein

$$S = v(1+vv)\cos\varphi$$

und daher wird erschlossen

$$F = \frac{v(1+vv)\cos\varphi}{1-2v\sin\varphi+vv} \quad \text{nach Setzen von} \quad 1+2v\sin\varphi+vv=0 \quad \text{oder} \quad 1+vv=-2v\sin\varphi,$$

woher wird

$$F = \frac{1}{2}v\cos\varphi;$$

dann wird aber sein

$$G = \frac{v(1+vv)cos\varphi}{1+2v\sin\varphi+vv} \quad \text{nach Setzen von} \quad 1+vv=+2v\sin\varphi$$

und daher

$$G = \frac{1}{2}v\cos\varphi$$

und so wird der vollständige Wert von Q sein

$$Q = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(v+\sin\varphi)+v\partial\varphi\cos\varphi}{1+2v\sin\varphi+vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(\sin\varphi-v)+v\partial\varphi\cos\varphi}{1-2v\sin\varphi+vv}.$$

§35 Wir wollen mit der Entwicklung des zweiten Wertes Q beginnen, die natürlich sehr leicht ist, weil ja in der der beiden Formeln der Zähler offenbar das halbe Differential des Nenners, woher sofort erhalten

$$Q = \frac{1}{4}\log\frac{1+2v\sin\varphi+vv}{1-2v\sin\varphi+vv},$$

welcher Wert vollkommen mit dem oben gegebenen übereinstimmt. Für den Buchstaben P sei aber angemerkt, dass ist

$$\int\frac{f\partial v}{1-2v\cos\omega+vv} = \frac{f}{\sin\omega}\arctan\frac{v\sin\omega}{1-v\cos\omega},$$

woher. weil für den ersten Teil ist

$$f = \cos\varphi, \quad \cos\omega = -\sin\varphi \quad \text{und} \quad \sin\omega = \cos\varphi,$$

sein wird

$$\int \frac{\partial v \cos\varphi}{1 + 2v\sin\varphi + vv} = \arctan\frac{v\cos\varphi}{1 + v\sin\varphi},$$

wenn freilich der Winkel φ wie eine Konstante behandelt wird. Aber aus seiner Veränderlichkeit geht in der Tat der andere Teil nicht hervor, welcher ist

$$\int \frac{\partial\varphi(1 + v\sin\varphi)}{1 + 2v\sin\varphi + vv},$$

sondern an seiner Stelle liefert die Differentiation

$$\frac{-v\partial\varphi\sin\varphi - vv\partial\varphi}{1 + 2v\sin\varphi + vv}.$$

Es wird also passend sein, diesen Dissens genauer zu untersuchen.

§36 Zuerst besteht freilich kein Zweifel, dass die Differentiation der Formel

$$\arctan\frac{v\cos\varphi}{1 + v\sin\varphi}$$

den ersten Teil liefert; aber dasselbe gelänge, wenn irgendeine Konstante hinzugefügt werden würde; daher, weil in dieser Integration der Winkel φ für konstant gehalten worden ist, kann diese Konstante natürlich noch den Winkel φ enthalten. Dieser Sache wegen wollen wir im Allgemeinen annehmen, dass das gesuchte Integral dieses ist

$$\arctan\frac{v\cos\varphi}{1 + v\sin\varphi} + \int \Phi\partial\varphi,$$

während Φ eine Funktion von φ ist, und nun wird das Differential dieser Formel für konstant gesetztes v sein

$$\frac{-v\partial\varphi\sin\varphi - vv\partial\varphi}{1 + 2v\sin\varphi + vv} + \Phi\partial\varphi = \partial\varphi(\Phi + 2v\Phi\sin\varphi + \Phi vv - v\sin\sin\Phi - vv);$$

wenn dort $\Phi = 1$ genommen wird, geht unser Differential selbst hervor als

$$\frac{\partial\varphi(1+v\sin\varphi)}{1+2v\sin\varphi+vv},$$

so dass dieser Teil ist

$$\arctan\frac{v\cos\varphi}{1+v\sin\varphi}+\varphi=\arctan\frac{v\cos\varphi}{1+v\sin\varphi}+\arctan\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

welche zwei Bogen zusammengezogen liefern

$$\arctan\frac{\sin\varphi+v}{\cos\varphi},$$

und diese Formel bringt differenziert das gegebene Integral selbst hervor.

§37 Für den anderen Teil von P, welcher ist

$$\int\frac{\partial v\cos\varphi-(1-v\sin\varphi)\partial\varphi}{1-2v\sin\varphi+vv},$$

weil diese Form von der ersten nur darin abweicht, dass der Winkel φ negativ genommen worden ist, wird derselbe Unterschied im Integral eingeführt geben

$$\arctan\frac{v-\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Und so wird der vollständige Wert der Größe P sein

$$P=\frac{1}{2}\arctan\frac{v+\sin\varphi}{\cos\varphi}+\frac{1}{2}\arctan\frac{v-\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

welche zwei bogen zu einem zusammengezogen geben werden

$$P=\frac{1}{2}\arctan\frac{2v\cos\varphi}{1-vv},$$

welcher Wert in gleicher Weise vollkommen mit dem oben gegebenen übereinstimmt.

ANWENDUNG AUF DEN FALL, IN DEM $m = 1$ ODER $m = 3$ IST, ODER DIE DIFFERENTIALFORMEL $\frac{\partial z}{1+z^3}$

§38 Wenn daher hier festgelegt wird

$$z = \cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$$

und das daher resultierende Integral wie folgt festgelegt wird

$$\int \frac{\partial z}{1+z^3} = p + Q\sqrt{-1},$$

wird aus den allgemeinen oben gegebenen Formel sein

$$P = \int \frac{\partial v(\cos\varphi + v^3\cos 2\varphi) - v\partial\varphi(\sin\varphi - v^3\sin 2\varphi)}{1 + 2v^3\cos 3\varphi + v^6}$$

und

$$Q = \int \frac{\partial v(\sin\varphi + v^3\sin 2\varphi) - v\partial\varphi(\cos\varphi - v^3\cos 2\varphi)}{1 + 2v^3\cos 3\varphi + v^6}.$$

§39 Hier wird also der Nenner drei trinomiale Faktoren haben; wenn deren Form als $1 - 2v\cos\omega + vv$ festgelegt wird, muss $\cos 3\omega = -\cos 3\varphi$ sein. Also wird 3ω entweder $\pi + 3\varphi$ oder $\pi - 2\varphi$ oder $3\pi - 3\varphi$ gleich werden, woher also diese drei Werte von ω entspringen:

$$\omega = 60^\circ + \varphi, \quad \omega = 60^\circ - \varphi, \quad \omega = 180^\circ - \varphi.$$

Nun wollen wir also im Allgemeinen diesen Bruch betrachten

$$\frac{S}{1 + 2v^3\cos 3\varphi + v^6},$$

von welchem ein Partialbruch dieser sei

$$\frac{F}{1 - 2v\cos\omega + vv};$$

und, wie wir oben bemerkt haben, muss der Wert von F aus dieser Form deriviert werden

$$\frac{S(1-2v\cos\omega+vv)}{1+2v^3\cos 3\varphi+v^6},$$

wenn $1-2v\cos\omega+vv=0$ gesetzt wird; dann wird aber dieser Bruch auf diesen zurückgeführt werden

$$\frac{S(vv-v\cos\omega)}{3v^6+3v^3\cos 3\varphi}.$$

Weil aber gilt

$$v^6=-2v^3\cos 3\varphi-1,$$

wird der Nenner sein

$$-3(v^3\cos 3\varphi+1),$$

der Zähler hingegen

$$S(v\cos\omega-1),$$

und so wird der aufzulösende Bruch sein

$$\frac{S(1-v\cos\omega)}{3(v^3\cos 2\varphi+1)}=F,$$

nachdem natürlich die Größe v aus dem Nenner herausgeworfen worden ist.

§40 Weil wir also nach der Annahme haben

$$v=\cos\omega+\sqrt{-1}\cdot\sin\omega,$$

wird sein

$$v^3=\cos 3\omega+\sqrt{-1}\cdot\sin 3\omega,$$

wo es angemerkt sei, dass gilt

$$\cos 3\omega=-\cos 3\varphi;$$

dann wird aber sein

$$\sin 3\omega = \pm \sin 3\varphi.$$

Natürlich wird für den ersten Wert, in dem $\omega = 60° + \varphi$ oder $3\omega = 180° + 3\varphi$ ist, $\sin 3\omega = \sin 3\varphi$ sein; für den zweiten Wert, in welchem $3\omega = 180° - 3\varphi$ ist, wird $\sin 3\omega = +\sin 3\varphi$ sein; für den dritten Fall, in welchem $3\omega = 3\pi - 3\varphi$ ist, wird auch $\sin 3\omega = +\sin 3\varphi$ sein. Nachdem aber dieser Wert festgelegt worden ist, wird unser Nenner sein

$$3(-\cos^2 3\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin 3\varphi \cos 3\varphi + 1),$$

wo freilich das obere Vorzeichen für den dritten und zweiten Wert des Winkels ω gilt, aber das untere für den ersten. Dieser Nenner kann auch auf diese Weise gefälliger ausgedrückt werden

$$3 \sin 3\varphi (\sin 3\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \cos 3\varphi).$$

§41 Nun wollen wir also so den Zähler wie Nenner mit $\sin 3\varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \cos 3\varphi$ multiplizieren und es wird sein

$$F = \frac{S(1 - v \cos \omega)(\sin 3\varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \cos 3\varphi)}{3 \sin 3\varphi}.$$

Aber wenn wir auch anstelle von v $\cos \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin \omega$ schreiben , wird werden

$$F = \frac{S \sin \omega (\sin \omega - \sqrt{-1} \cdot \cos \omega)(\sin 3\varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \cos 3\varphi)}{3 \sin 3\varphi}.$$

Daher, wenn die zwei imaginären Faktoren des Zähler miteinander multipliziert werden, wird aufgefunden werden

$$F = \frac{S \sin \omega (\mp \cos(\omega \pm 3\varphi) \mp \sqrt{-1} \cdot \sin(\omega \pm 3\varphi))}{3 \sin 3\varphi},$$

wo wir uns um die imaginären Größen nicht weiter kümmern, weil sie sich ja, wie wir oben gesehen haben, durch Einführen des Buchstaben v, vollkommen beseitigen lassen.

§41 a Nun haben wir auch für S vier Werte, um die zwei Buchstaben P und Q zu definieren. Zuerst wird nämlich für P und das Element ∂v sein

$$S = \cos\varphi + v^3 \cos 2\varphi,$$

wo wir anstelle von v^3 den schon zuvor gebrauchten Wert $-\cos 3\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin 3\varphi$ schreiben wollen, woher werden wird

$$\begin{aligned} S &= \cos\varphi - \cos 3\varphi \cos 2\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin 3\varphi \cos 2\varphi \\ &= \sin 3\varphi(\sin 2\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \cos 2\varphi), \end{aligned}$$

und so wird unser Wert sein

$$F = \frac{1}{3} \sin\omega(\sin 2\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \cos 2\varphi) \mp \cos(\omega \pm 3\varphi) \mp \sqrt{-1} \cdot \sin(\omega \pm 3\varphi)),$$

welcher Wert für die oberen Vorzeichen sein wird

$$F = +\frac{1}{3} \sin\omega(\sin(\omega + \varphi) - \sqrt{-1} \cdot \cos(\omega + \varphi)),$$

aber für die unteren Vorzeichen geht hervor

$$F = +\frac{1}{3} \sin\omega(\sin(\omega - \varphi) - \sqrt{-1} \cdot \cos(\omega - \varphi)).$$

§42 Nun ist es aber notwendig, dass die imaginären Größen hiervon ausgeschlossen werden, um was zu bewirken, wir festlegen wollen

$$\begin{aligned} \sin(\omega + \varphi) - \sqrt{-1} \cdot \cos(\omega + \varphi) &= Av + B \\ &= A\cos\omega + B + \sqrt{-1} \cdot A\sin\omega, \end{aligned}$$

woher offenbar abgeleitet wird

$$A = -\frac{\cos(\omega + \varphi)}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad B = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega},$$

und wir werden für den ersten Fall haben

$$F = -\frac{1}{3} v \cos(\omega + \varphi) + \frac{1}{3} \cos\varphi,$$

für den zweiten hingegen

$$A = -\frac{\cos(\omega - \varphi)}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad B = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega}$$

und daher

$$F = -\frac{1}{3}v\cos(\omega - \varphi) + \frac{1}{3}\cos\varphi.$$

Aber es ist nicht notwendig, weiter fortzuschreiten, weil ja die Entwicklung dieser Spezialfälle uns schon den Weg ebnet, um die allgemeine Formel zu entwickeln, welche wir also im folgenden Problem verfolgen wollen.

Allgemeines Problem

Wenn $z = v(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$ *gesetzt wird, den Wert dieser Integralformel*

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n} \quad \textit{ausfindig zu machen}$$

Lösung

§43 Weil wegen des imaginären Wertes von z das gesuchte Integral gleichermaßen imaginär sein muss, wollen wir es in der Form $P + Q\sqrt{-1}$ erfassen, so dass P und Q reelle Größen sind; dieser Sache wegen wird es nach der oben angegebenen Substitution sein

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n} = P + Q\sqrt{-1}.$$

§44 Weil weiter gilt

$$z = v(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

wird sein

$$z^n = v^n(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi)$$

und

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}.$$

Daher wird also diese vorgelegte Formel in diese übergehen

$$\frac{v^m(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)\left(\frac{\partial v}{v}+\partial\varphi\sqrt{-1}\right)}{1+v^n(\cos n\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi)},$$

wo für die folgende Rechnung angemerkt sei, dass der Nenner verschwindet, wenn festgelegt wird

$$v^n=-\frac{1}{\cos n\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi}=-\cos n\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi.$$

Um aber nun den Nenner von imaginären Größen zu befreien, werde mit $1+v^n(\cos n\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi)$ erweitert und die Differentialformel, welche wir mit ∂V bezeichnen wollen, wird sein

$$\partial V=\frac{v^m(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)\left(\frac{\partial v}{v}+\partial\varphi\sqrt{-1}\right)(1+v^n(\cos n\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi))}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}}.$$

Der Zähler kann aber auf diese Form reduziert werden

$$v^m\left(\frac{\partial v}{v}+\partial\varphi\sqrt{-1}\right)(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)+v^n(\cos(m-n)\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin(m-n)\varphi))$$

dessen Real- und Imaginärtiele voneinander getrennt werden werden, dass der Realteil dieser ist

$$v^{m-1}\partial v(\cos m\varphi+v^n\cos(m-n)\varphi)-v^m\partial\varphi(\sin m\varphi+v^n\sin(m-n)\varphi),$$

der Imaginärteil durch $\sqrt{-1}$ hingegen dieser

$$v^{m-1}\partial v(\sin m\varphi+v^n\sin(m-n)\varphi)+v^m\partial\varphi(\cos m\varphi+v^n\cos(m-n)\varphi).$$

§45 Wir wollen nun der Kürze wegen festlegen

$$R=\cos m\varphi+v^n\cos(m-n)\varphi$$

und

$$S=\sin m\varphi+v^n\sin(m-n)\varphi,$$

und die beiden gesuchten Größen P und Q werden durch die folgenden Integralformeln ausgedrückt werden:

$$P = \int \frac{Rv^{m-1}\partial v - Sv^m \partial\varphi}{1 + 2v^n \cos n\varphi + v^{2n}}$$

und

$$Q = \int \frac{Sv^{m-1}\partial v + Rv^m \partial\varphi}{1 + 2v^n \cos n\varphi + v^{2n}}.$$

Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass zuerst die trinomialen Faktoren des Nenners ausfindig gemacht werden, dann aber aus den einzelnen die Partialbrüche gefunden werden.

§46 Wir wollen also festlegen, dass irgendein Faktor des Nenners

$$1 - 2v\cos\omega + vv$$

ist, und es wird nötig sein, dass nach Setzen von $1 - 2v\cos\omega + vv = 0$ auch der Nenner verschwindet, was wir schon zuvor bemerkt haben in nachstehendem Fall zu geschehen

$$v^n = -\cos n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi.$$

Aber weil hingegen $v = \cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega$ ist, wird daher sein

$$v^n = \cos n\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin n\omega,$$

woher es offenbar ist, dass sein muss

$$\cos n\omega = -\cos n\varphi \quad \text{und} \quad \sin n\omega = +\sin n\varphi.$$

daher tritt es klar zu tage, dass die Summe der Winkel $n\omega$ und $n\varphi$ dem Winkel $i\pi$ gleich werden muss, während i irgendeine ungerade Zahl bezeichnet, so dass $n\omega = i\pi - n\varphi$ ist und daher

$$\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi.$$

Es ist aber ersichtlich, dass auf diese Weise für ω so viele verschiedene Werte aufgefunden werden, wie n Einheiten hat. Denn diese einzelnen Werte werden hervorgehen, wenn anstelle von i die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. bis hin zu $2n-1$ genommen werden; deswegen werden diese einzelnen Faktoren ebenso viele Partialbrüche hervorbringen und das für die einzelnen Teile, mit die Buchstaben P und Q ausgedrückt werden.

§47 Um aber diese Auflösung durchzuführen, wollen wir im Allgemeinen diesen Bruch betrachten

$$\frac{N}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}},$$

woher für den Faktor $1-2\cos\omega+vv$ dieser Partialbruch entspringe

$$=\frac{F}{1-2v\cos\omega+vv},$$

alle übrigen Teile mögen hingegen mit Ω bezeichnet werden, so dass gilt

$$\frac{N}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}}=\frac{F}{1-2v\cos\omega+vv}+\Omega,$$

woher wir erschließen

$$F=\frac{N(1-2v\cos\omega+vv)}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}}-\Omega(1-2v\cos\omega+vv).$$

Daher wird eingesehen, dass der Wert von F allein aus dem ersten Teil gefunden werden kann, wenn $1-2v\cos\omega+vv=0$ gesetzt wird. Aber dann wird in der Tat so der Zähler wie der Nenner des ersten Teils verschwinden, woher gemäß der allbekannten Regel die Differentiale eingesetzt werden müssen, wonach werden wird

$$F=\frac{N(2v-2\cos\omega)}{2nv^{2n-1}+2nv^{n-1}\cos n\varphi}=\frac{N(v-\cos\omega)}{nv^{n-1}(v^n+\cos n\varphi)}.$$

§48 Weil aber im Fall, in welchem dieses Verschwinden des Zählers und des Nenners passiert, dieser ist

$$v=\cos\omega+\sqrt{-1}\cdot\sin\omega$$

und

$$v^n=-\cos n\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi.$$

wird nach Einsetzen dieser Werte werden

$$F = \frac{N \sin \omega}{nv^{n-1} \sin n\varphi} = \frac{Nv \sin \omega}{nv^n \sin n\varphi}.$$

Nun ist es also nur nötig, dass anstelle von N die verschiedenen Teile, welche oben in den Zählern der Formeln P und Q aufgetaucht sind, eingesetzt werden und daher mit Hilfe der Gleichung $vv - 2v\cos\omega + 1 = 0$ die einzelnen Ausdrücke unter die zweite Potenz von v herabgesenkt werden.

§49 Für dieses Ziel werde das folgende Lemma zur Hilfe genommen:
Wenn galt

$$vv - 2v\cos\omega + 1 = 0,$$

wird immer sein

$$v^\lambda \sin\omega = v\sin\lambda\omega - \sin(\lambda-1)\omega,$$

dessen Gültigkeit leicht bewiesen wird. Es ist nur nötig, dass für den Buchstaben N zwei Werte entwickelt werden, welche $N = Rv^{m-1}$ und $N = Sv^{m-1}$ sind, denen darauf folgend entweder ∂v oder $v\partial\varphi$ hinzugefügt werden müssen wird. Es sei also zuerst

$$N = Rv^{m-1} = v^{m-1}\cos m\varphi + v^{m+n-1}\cos(m-n)\varphi$$

und es wird sein

$$F = \frac{v^{m-n}\sin\omega\cos m\varphi + v^m \sin\omega\cos(m-n)\varphi}{n\sin n\varphi},$$

woher wir nach dem Lemma haben werden

$$v^{m-n}\sin\omega = v\sin(m-n)\omega - \sin(m-n-1)\omega$$

und

$$v^m \sin\omega = v\sin m\omega - \sin(m-1)\omega,$$

woher man also dann schlussendlich erlangt

$$F = \frac{1}{n\sin n\varphi}\left\{\begin{array}{l} +v\sin(m-n)\omega\cos m\varphi - \sin(m-n-1)\omega\cos m\varphi \\ +v\sin m\omega\cos(m-n)\varphi - \sin(m-1)\omega\cos(m-n)\varphi \end{array}\right\}.$$

§50 In diesem Ausdruck wird der Buchstabe v also mit nachstehender Formel multipliziert

$$\sin(m-n)\omega\cos m\varphi+\cos(m-n)\varphi\sin m\omega,$$

für dessen Auflösung angemerkt sei, dass gilt

$$\cos n\omega=-\cos n\varphi \quad \text{und} \quad \sin n\omega=+\sin n\varphi,$$

und daher wird werden

$$\sin(m-n)\omega=-\sin m\omega\cos n\varphi-\cos m\omega\sin n\varphi,$$

dann aber

$$\cos(m-n)\varphi=\cos m\varphi\cos n\varphi+\sin m\varphi\sin n\varphi,$$

nach Einsetzen welcher Werte die dem Buchstaben v anhaftende Größe sein wird

$$-\sin n\varphi\cos m(\omega+\varphi).$$

Der übrige Teil entspringt daher aber, wenn nach Ändern des Vorzeichens anstelle von $n\omega$ $(m-1)\omega$ geschrieben wird und so wird der ganze gesuchte Wert sein

$$F=-\frac{1}{n}v\cos m(\omega+\varphi)+\frac{1}{n}\cos((m-1)\omega+m\varphi).$$

§51 Oben haben wir aber gesehen, dass $\omega+\varphi=\frac{i\pi}{n}$ und daher $m(\omega+\varphi)=\frac{mi\pi}{n}$ ist, an dessen Stelle wir ζ schreiben wollen, wonach für den gegenwärtigen Fall, in welchem $N=Rv^{m-1}$ ist, der Zähler des gesuchten Bruches sein wird

$$F=-\frac{1}{n}(v\cos\varphi-\cos(\zeta-\omega)),$$

welcher also auf zwei Weisen verwendet werden muss; denn für den Buchstaben P muss er mit ∂v, für den Buchstaben Q hingegen mit $v\partial\varphi$ multipliziert werden.

§52 Auf die gleiche Weise entspringt für den Fall

$$N = Sv^{m-1} = v^{m-1} \sin m\varphi + v^{m+n-1} \sin(m-n)\varphi$$

dieser Wert

$$F = \frac{v^{m-n} \sin\omega \sin m\varphi + v^m \sin\omega \sin(m-n)\varphi}{n \sin n\varphi}.$$

Nun wollen wir anstelle der Potenzen von v die oben angegebenen Werte schreiben und es wird hervorgehen

$$F = \frac{1}{n \sin n\omega} \left\{ \begin{array}{c} v \sin m\varphi \sin(m-n)\omega - \sin m\varphi \sin(m-n-1)\omega \\ +v \sin(m-n)\varphi \sin m\omega - \sin(m-n)\varphi \sin(m-1)\omega \end{array} \right\}.$$

Weil nun gilt

$$\sin(m-n)\omega = -\sin m\omega \cos n\varphi - \cos m\varphi \sin n\varphi$$

und

$$\sin(m-n)\varphi = \sin m\varphi \cos n\varphi - \cos m\varphi \sin n\varphi,$$

ist der Buchstabe v mit dieser Größe behaftet

$$-\sin n\varphi \sin(\varphi+\omega)m = -\sin n\varphi \sin\zeta,$$

woher der ganze Wert sein wird

$$F = -\frac{1}{n}(v \sin\zeta - \sin(\zeta-\omega)),$$

welcher Wert für P mit $-v\partial\varphi$, für Q mit $+\partial v$ multipliziert werden.

§53 Nachdem diese Werte also gefunden worden sind, werden die einzelnen Winkel ω, deren Anzahl $= n$ ist, genauso viele Teile für die gesuchten Größen P und Q geben, natürlich wir der Wert $\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi$, während $\frac{mi\pi}{n} = \zeta$ ist, geben

$$P = -\frac{1}{n} \int \frac{\partial v(v \cos\zeta - \cos(\zeta-\omega)) - v\partial\varphi(v \sin\zeta - \sin(\zeta-\omega))}{1 - 2v\cos\omega + vv}$$

und

$$Q = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v(v\sin\zeta - \sin(\zeta-\omega)) - v\partial\varphi(v\cos\zeta - \cos(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega + vv}.$$

Dort werde freilich $\partial\varphi$ noch mit vv multipliziert, an dessen Stelle $2v\cos\omega - 1$ geschrieben werden könnte; aber auch nach Weglassen dieser Substitution wird kein Fehler begangen.

§54 Wir wollen nun sehen, auf welche Weise die Integration dieser Formeln selbst durchgeführt werden kann. Und zuerst wollen wir freilich den Winkel φ für konstant halten, dass ist

$$P = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v(v\cos\zeta - \cos(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega + vv}$$

und

$$Q = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v(v\sin\zeta - \sin(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega + vv}.$$

Es werde also festgelegt

$$M = \int \frac{\partial(v\cos\zeta - \cos(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega + vv}$$

und es wird sein

$$M - \cos\zeta\log\sqrt{1-2v\cos\omega+vv}$$

$$= \int \frac{\partial v(v\cos\zeta - \cos(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega + vv} - \int \frac{(v\cos\zeta - \cos\zeta\cos\omega)\partial v}{1-2v\cos\omega + vv}$$
$$= \int \frac{\partial v(\cos\zeta\cos\omega - \cos(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega + vv} = -\int \frac{\partial v\sin\zeta\sin\omega}{1-2v\cos\omega + vv}$$

und so wird das Integral sein

$$-\sin\zeta\arctan\frac{v\sin\omega}{1-v\cos\omega}$$

und daher

$$M = \cos\zeta \log\sqrt{1-2v\cos\omega+vv} - \sin\zeta \arctan\frac{v\sin\omega}{1-v\cos\omega};$$

als logische Konsequenz werden wir haben

$$P = -\frac{\cos\zeta}{n}\log\sqrt{1-2v\cos\omega+vv} + \frac{\sin\zeta}{n}\arctan\frac{v\sin\omega}{1-v\cos\omega}.$$

§55 Nachdem dieser Wert allein aus der Veränderlichkeit von v entstanden ist, wollen wir sehen, auf welche Weise er mit dem variablen Winkel φ zusammentritt. Für dieses Ziel wollen wir diese gefundene Formel selbst differenzieren und allein den Winkel ω variabel festlegen, weil ja wegen des konstanten Winkels ζ $\partial\omega = -\partial\varphi$ ist, und das Differential wird sein

$$-\frac{1}{n}\frac{-v\partial\varphi\sin\omega\cos\zeta + v\partial\varphi(\cos\omega - v)\sin\zeta}{1-2v\cos\omega+vv} = \frac{1}{n}\frac{(v\sin\zeta - \sin(\zeta-\omega))v\partial\varphi}{1-2v\cos\omega+vv},$$

was vollkommen mit der vorgelegten Form übereinstimmt, so dass der richtige Wert von P dieser ist

$$P = -\frac{\cos\zeta}{n}\log\sqrt{1-2v\cos\omega+vv} + \frac{\sin\zeta}{n}\arctan\frac{v\sin\omega}{1-v\cos\omega}.$$

§56 Wir wollen auf dieselbe Weise für den Wert Q vorgehen und es sei

$$M = \int\frac{\partial v(v\sin\zeta - \sin(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega+vv}$$

und es wird sein

$$\begin{aligned} &M - \sin\zeta\log\sqrt{1-2v\cos\omega+vv} \\ &= \int\frac{\partial v(v\sin\zeta-\sin(\zeta-\omega))}{1-2v\cos\omega+vv} - \int\frac{(v\sin\zeta-\cos\omega\sin\zeta)\partial v}{1-2v\cos\omega+vv} \\ &= \int\frac{\partial v\cos\zeta\sin\omega}{1-2v\cos\omega+vv} = \cos\zeta\arctan\frac{v\sin\omega}{1-2v\cos\omega+vv}, \end{aligned}$$

woher offenbar erschlossen wird

$$Q = -\frac{\sin\zeta}{n}\log\sqrt{1-2v\cos\omega+vv} - \frac{\cos\zeta}{n}\arctan\frac{v\sin\omega}{1-v\cos\omega},$$

welcher Ausdruck auch mit der Veränderlichkeit von φ verträglich ist.

§57 Nun wird es also leicht möglich sein, den Fall der Formel $\frac{\partial z}{1+z^3}$, welchen wir schon zweimal vergeblich angegangen sind, zu erledigen. Weil nämlich hier $m = 1$ und $n = 3$ ist, werden für den Buchstaben i die drei Werte 1, 3 und 5 genommen werden müssen, woher für unsere Integralformeln die folgenden Werte ans Licht treten:

i	1	3	5
ω	$60° - \varphi$	$180° - \varphi$	$300° - \varphi$
$\sin\omega$	$\sin(60° - \varphi)$	$\sin\varphi$	$-\sin(60° + \varphi)$
$\cos\omega$	$\cos(60° - \varphi)$	$-\cos\varphi$	$\cos(60° + \varphi)$
ζ	$60°$	$180°$	$300°$
$\sin\zeta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\zeta$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

§58 Aus diesen drei Werten werden wir nun so für P wie für Q drei Teile erlangen, welche sein werden:

Für P

Teil I. $$-\frac{1}{6}\log\sqrt{1 - 2v\cos(60° - \varphi) + vv} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{v\sin(60° - \varphi)}{1 - v\cos(60° - \varphi)},$$

Teil II. $$+\frac{1}{3}\log\sqrt{1 + 2v\cos\varphi + vv} \qquad\qquad + 0,$$

Teil III. $$-\frac{1}{6}\log\sqrt{1 - 2v\cos(60° + \varphi) + vv} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{v\sin(60° + \varphi)}{1 - v\cos(60° + \varphi)}.$$

Dort wird es förderlich angemerkt zu haben, dass der erste und dritte Teile so zusammengenommen ausgedrückt werden können

$$-\frac{1}{12}\log\left(1 - 2v\cos\varphi + 2v\left(\frac{1}{2} + \cos 2\varphi\right) - 2v^3\cos\varphi + v^4\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2v\cos\varphi\sqrt{3} - vv\sqrt{3}}{2 - 2v\cos\varphi - vv}.$$

Für Q

$$\text{Teil I.}\qquad -\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\sqrt{1-2v\cos(60^\circ-\varphi)+vv}-\frac{1}{6}\arctan\frac{v\sin(60^\circ-\varphi)}{1-v\cos(60^\circ-\varphi)},$$

$$\text{Teil II.}\qquad -0\qquad +\frac{1}{3}\arctan\frac{v\sin\varphi}{1+v\cos\varphi},$$

$$\text{Teil III.}\qquad +\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\sqrt{1-2v\cos(60^\circ+\varphi)+vv}+\frac{1}{6}\arctan\frac{v\sin(60^\circ+\varphi)}{1-v\cos(60^\circ+\varphi)}.$$

Hier könnten wiederum der erste und der dritte Teil zusammengezogen werden, aber es wird besser sein, die zuerst gefundenen Formeln zu gebrauchen. Daher werden wir diese Behandlung nämlich mit dem folgenden Lehrsatz schließen.

Lehrsatz

§59 Wenn nach Setzen von

$$z=v(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$$

festgelegt wird

$$\int\frac{\partial z}{1+z^3}=P+Q\sqrt{-1},$$

werden die Größen P und Q so ausgedrückt werden

$$P=\left\{\begin{aligned}&+\frac{1}{6}\log\sqrt{1-2v\cos(60^\circ-\varphi)+vv}&&+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{v\sin(60^\circ-\varphi)}{1-v\cos(60^\circ-\varphi)}\\&+\frac{1}{3}\log\sqrt{1+2v\cos\varphi+vv}&&\\&-\frac{1}{6}\log\sqrt{1-2v\cos(60^\circ+\varphi)+vv}&&+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{v\sin(60^\circ+\varphi)}{1-v\cos(60^\circ+\varphi)}\end{aligned}\right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \sqrt{1 - 2v\cos(60^\circ - \varphi) + vv} & -\dfrac{1}{6} \arctan \dfrac{v \sin(60^\circ - \varphi)}{1 - v\cos(60^\circ - \varphi)} \\ & +\dfrac{1}{3} \arctan \dfrac{v \sin \varphi}{1 + v \cos \varphi} \\ +\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \sqrt{1 - 2v\cos(60^\circ + \varphi) + vv} & +\dfrac{1}{6} \arctan \dfrac{v \sin(60^\circ + \varphi)}{1 - v\cos(60^\circ + \varphi)} \end{array} \right\}$$

KOROLLAR 1

§60 Wenn wir also den Winkel $\varphi = 0$ annehmen, dass $z = v$ wird, wird für die Integralformel

$$\int \frac{\partial v}{1 + v^3} = P + Q\sqrt{-1}$$

sein

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{6} \log \sqrt{1 - v + vv} & +\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \dfrac{v\sqrt{3}}{2 - v} \\ +\dfrac{1}{3} \log(1 + v) & \\ -\dfrac{1}{6} \log \sqrt{1 - v + vv} & +\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \dfrac{v\sqrt{3}}{2 - v} \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \sqrt{1 - v + vv} & -\dfrac{1}{6} \arctan \dfrac{v\sqrt{3}}{2 - v} \\ +\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \sqrt{1 - v + vv} & +\dfrac{1}{6} \arctan \dfrac{v\sqrt{3}}{2 - v} \end{array} \right\}.$$

Und so wird $Q = 0$ sein, wie es die Natur der Sache erfordert. Denn weil die zu integrierende Formel selbst reell ist, kann auch das Integral keinen imaginären Teil enthalten. Im Übrigen ist dieses Integral selbst hinreichend bekannt.

KOROLLAR 2

§61 Wir wollen auch den Fall betrachten, in welchem $\varphi = 90^\circ$ und daher $z = v\sqrt{-1}$ ist, und die zu integrierende Formel wird diese sein

$$\int \frac{\partial v\sqrt{-1}}{1+v^3\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1};$$

die Größen P und Q werden hingegen so ausgedrückt werden:

$$P = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{1}{6}\log\sqrt{1-v\sqrt{3}+vv} & -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\dfrac{v}{2-v\sqrt{3}} \\ +\dfrac{1}{3}\log\sqrt{1+vv} & \\ -\dfrac{1}{6}\log\sqrt{1+v\sqrt{3}+vv} & +\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\dfrac{v}{2+v\sqrt{3}} \end{array}\right\},$$

$$Q = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\log\sqrt{1-v\sqrt{3}+vv} & +\dfrac{1}{6}\arctan\dfrac{v}{2-v\sqrt{3}} \\ & +\dfrac{1}{3}\arctan v \\ +\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\log\sqrt{1+v\sqrt{3}+vv} & +\dfrac{1}{6}\arctan\dfrac{v}{2+v\sqrt{3}} \end{array}\right\}.$$

KOROLLAR 3

§62 Außerdem aber auch der bemerkenswerte Fall auf, in welchem $\varphi = 60°$ und daher $z = \frac{v}{2} + \frac{v\sqrt{-3}}{2}$ und $z^3 = -v^3$ ist, so dass die zu integrierende Form diese ist

$$\frac{\partial v\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)}{1-v^3};$$

dann wird also sein

$$P = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{6}\log(1-v) \\ +\dfrac{1}{3}\log\sqrt{1+v+vv} \\ -\dfrac{1}{6}\log\sqrt{1+v+vv} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\dfrac{v\sqrt{3}}{2+v} \end{array}\right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\log(1-v) \\[2ex] +\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{v\sqrt{3}}{2+v} \\[2ex] +\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\log\sqrt{1+v+vv}+\dfrac{1}{6}\arctan\dfrac{v\sqrt{3}}{2+v} \end{array} \right\},$$

wo offenbar $P : Q = 1 : \sqrt{3}$ ist, vollkommen wie die Natur der Sache erfordert.