Über die Auflösung von transzendenten Brüchen in unendlich viele einfache Brüche *

Leonhard Euler

§1 Nachdem irgendein algebraischer Bruch vorgelegt worden ist

$$\frac{P}{Q},$$

dessen Zähler P wie Nenner Q ganz rationale Funktionen der Größe z seien, habe ich schon vor langer Zeit gezeigt, auf welche Weise er in einfache Brüche aufgelöst werden kann, deren Nenner den einfachen Faktoren des Nenners Q gleich werden, die Zähler hingegen konstant sind, wenn freilich die Variable z im Nenner Q mehr Dimensionen hat als im Zähler P hat. Ja ich habe sogar gezeigt, wie für jeden beliebigen einfachen Faktor des Nenners der entsprechende einfache Bruch aufgefunden werden kann, ohne Rücksicht auf die übrigen Faktoren zu nehmen. So, wenn bekannt ist, dass der Nenner Q den einfachen Faktor $z - a$ enthält, wird der einfache daher entstehende Bruch, welcher von dieser Form sein wird

$$\frac{\alpha}{z-a},$$

am leichtesten auf diese Weise bestimmt. Es werde festgelegt

*Originaltitel: "De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices", erstmals publiziert in „*Opuscula Analytica* 2 1785, pp. 102-137", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 621 - 660 ", Eneström-Nummer E592, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{z-a} + R,$$

wo R alle aus den übrigen entspringenden einfachen Brüche umfasse; es werde auf beiden Seiten mit $z-a$ multipliziert, dass wird

$$\frac{P(z-a)}{Q} = \alpha + R(z-a),$$

und weil α eine konstante Größe ist, wird sie immer denselben Wert beibehalten, welcher Wert auch immer der Variable z zugeteilt wird; deswegen werde überall $z=a$, dass die Beschaffenheit der übrigen Brüche aus der Rechnung herausgeht, und man wird haben

$$\alpha = \frac{P(z-a)}{Q},$$

wenn freilich in dieser Formel $z=a$ wird; dann geht aber der Zähler $P(z-a)$ ins Nichts über, weil $z-a$ ein Faktor des Nenners Q ist, wird auch der Nenner Q verschwinden. Daher werden also nach der üblichen Regel anstelle des Zählers und des Nenners ihre Differentiale eingesetzt, weil ja immer noch sein wird

$$\frac{Pdz + (z-a)dP}{dQ} = \alpha,$$

wenn hier freilich überall a anstelle von z geschrieben wird. Wir wollen also festlegen, dass in diesem Fall wird

$$P = A \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dz} = C,$$

welche Größen A und C also sehr leicht gefunden werden; dann wird also der gesuchte Zähler hervorgehen als

$$\alpha = \frac{A}{C},$$

so dass der einfache aus dem Faktor $z-a$ des Nenners herstammende Bruch dieser ist

$$= \frac{A}{C(z-a)},$$

so dass es nicht notwendig ist, die übrigen Faktoren zu kennen. Auf die gleiche Weise werden aber die den übrigen Faktoren entsprechenden einfachen Brüche bestimmt werden, die Summe all welcher dem vorgelegten Bruch $\frac{P}{Q}$ gleich werden wird, solange die Variable z weniger Dimensionen im Zähler P als im Nenner Q hat.

§2 Diesen Prinzipien folgend, wollen wir für den Nenner Q transzendente Funktionen solcher Art annehmen, welche sich in unendlich viele einfache Faktoren auflösen lassen, was passiert, wenn sie in unendlich vielen Fällen dem Nichts gleich werden. Zusätzlich ist aber aber notwendig, dass all die Faktoren einander ungleich sind, weil ja die gleichen Faktoren eine eigene Auflösung erfordern. Aber es wird besonders verlangt, dass das Produkt all solcher Faktoren die Funktion Q selbst vollkommen ausschöpft, weil sich ja irgendwann einmal imaginäre Faktoren einmischen könnten. Wie wenn beispielsweise $Q = \tan\varphi$ genommen wird, verschwindet er natürlich in all denselben Fällen wie diese Funktion $\sin\varphi$, und daher involvieren diese beiden Funktionen dieselben einfachen Faktoren, auch wenn sie einander in keinster Weise gleich sind. Des Weiteren muss aber der Zähler P so beschaffen sein, dass er mit dem Nenner Q keinen gemeinsamen Faktor hat. Es ist aber besonders darauf zu achten, dass die variable Größe im Zähler nicht zu genauso vielen oder mehr Dimensionen ansteigt wie im Nenner. Weil sie aber im Nenner anzusehen ist zu unendlich vielen Dimensionen anzusteigen, wird dieser Umstand nicht zu befürchten sein, solange die Variable im Zähler nur in einer endlichen Anzahl an Dimensionen enthalten ist. Wenn aber seine Potenzen auch ins Unendliche ansteigen, wird es oftmals sehr schwierig sein zu beurteilen, ob die Anzahl der Dimensionen größer oder kleiner als im Nenner ist. Dennoch wird indes auch in diesen Fällen der vorgelegte Bruch $\frac{P}{Q}$ alle einfachen Brüche enthalten, zu welchen unsere Methode führt. Aber es kann passieren, dass er außer ihnen auch gewisse quasi ganze Teile involviert. Nachdem diese Dinge im Voraus angemerkt worden sind, wollen wir die folgenden Fälle entwickeln.

I. Es werde $Q = \sin\varphi$ genommen, dass der Bruch $\frac{P}{\sin\varphi}$ aufzulösen ist

§3 Weil ja die Formel $\sin\varphi$, während π die halbe Peripherie des Kreises , dessen Radius $= 1$ ist, oder den zwei rechten gleichen Winkel bezeichnet, in all diesen Fällen verschwindet

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \pm\pi, \quad \varphi = \pm 2\pi, \quad \varphi = \pm 3\pi \quad \text{etc. und im Allgemeinen} \quad \varphi = i\pi,$$

werden ihre an der Zahl unendlich vielen Faktoren sein

$$\varphi, \quad (\varphi \pm \pi), \quad (\varphi \pm 2\pi), \quad (\varphi \pm 3\pi) \quad \text{und im Allgemeinen} \quad (\varphi \pm i\varphi).$$

Anderswoher ist es aber gewiss, dass diese Formel $\sin\varphi$ außer diesen Faktoren keine anderen entweder reellen oder imaginären Faktoren involviert, weil nämlich gilt

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.}$$

ist es bekannt, dass diese Reihe diesem unendlichen Produkt gleich wird

$$\varphi\left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1-\frac{\varphi}{3\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi}{3\pi}\right)\text{etc.}$$

§4 Wir wollen also irgendeinen Faktor $\varphi - i\pi$ unseres Nenners $Q = \sin\varphi$, wo i ganz und gar alle so positiven wie negativen Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bezeichne, und es sei der daher herstammende Partialbruch

$$\frac{\alpha}{\varphi - i\pi}.$$

Um also den Zähler α zu finden, werde zuerst im Zähler überall $\varphi = i\pi$ gesetzt und es sei die daher resultierende Größe $= A$; des Weiteren, weil $Q = \sin\varphi$ ist, wird sein

$$dQ = d\varphi\cos\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{dQ}{d\varphi} = \cos\varphi,$$

wo $i\pi$ anstelle von φ geschrieben muss, dass wir C erhalten, woher es klar zu tage tritt, dass sein wird

$$C = \cos i\pi,$$

so dass gilt

$$C = \pm 1,$$

wo das Vorzeichen $+$ für die geraden, das Zeichnen $-$ hingegen für die geraden anstelle von i angenommenen Zahlen gelten wird. Auf diese Weise wird also der Zähler unseres Bruches sein

$$\alpha = \pm A$$

und daher der gesuchte Bruch selbst

$$\pm \frac{A}{\varphi - i\pi}.$$

Daher lässt sich aber nicht weiter fortschreiten, solange wir den Zähler im Allgemeinen betrachten; daher wollen wir an seiner Stelle mehrere bestimmte Werte annehmen und die einzelnen in den folgenden Beispielen entwickeln.

1°. Es sei $P = 1$ und der Bruch $\frac{1}{\sin\varphi}$ vorgelegt

§5 Hier wird also immer $A = 1$ sein und irgendein einfacher Bruch

$$= \frac{\pm 1}{\varphi - i\pi},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn i eine gerade Zahl ist, das untere hingegen, wenn eine ungerade. Wir wollen also nacheinander für i der Reihe nach all seine Werte einsetzen

$$0, \quad +1, \quad -1, \quad +2, \quad -2, \quad +3, \quad -3, \quad +4, \quad -4 \quad \text{etc.}$$

und die Auflösung unseres Bruches $\frac{1}{\sin\varphi}$ in einfache Brüche wird sich so verhalten

$$\frac{1}{\sin\varphi} = +\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi - \pi} - \frac{1}{\varphi + \pi} + \frac{1}{\varphi - 2\pi} + \frac{1}{\varphi + 2\pi} - \frac{1}{\varphi - 3\pi} - \frac{1}{\varphi + 3\pi} + \text{etc.},$$

welche auf diese Form reduziert wird

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\pi - \varphi} - \frac{1}{\pi + \varphi} - \frac{1}{2\pi - \varphi} + \frac{1}{2\pi + \varphi} + \frac{1}{3\pi - \varphi} - \frac{1}{3\pi + \varphi} - \text{etc.}$$

Es werden nach dem ersten je zwei der folgenden zusammengezogen, dass wir diese Reihe erlangen

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{2\varphi}{\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{2\varphi}{4\pi\pi - \varphi\varphi} + \frac{2\varphi}{9\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{2\varphi}{16\pi\pi - \varphi\varphi} + \text{etc.},$$

woher die folgende bemerkenswerte Reihe abgeleitet wird

$$\frac{1}{2\varphi\sin\varphi} - \frac{1}{2\varphi\varphi} = \frac{1}{\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{1}{4\pi\pi - \varphi\varphi} + \frac{1}{9\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{1}{16\pi\pi - \varphi\varphi} + \text{etc.}$$

§6 Diese Reihen habe ich freilich schon vor längerer Zeit eingehend untersucht; dennoch wird es indes für die folgenden Fälle nicht unnützlich sein, die folgenden Transformationen hier zu wiederholen. Wir wollen also zuerst $\varphi = \lambda\pi$ setzen, dass der Buchstabe π aus den Reihen herausgeworfen wird, und daher werden wir erlangen

$$\frac{\pi}{\sin\lambda\pi} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda-2} + \frac{1}{\lambda+2} - \frac{1}{\lambda-3} - \frac{1}{\lambda+3} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{\pi}{2\lambda\sin\lambda\pi} - \frac{1}{2\lambda\lambda} = \frac{1}{1-\lambda\lambda} - \frac{1}{4-\lambda\lambda} + \frac{1}{9-\lambda\lambda} - \frac{1}{16-\lambda\lambda} + \text{etc.}$$

und daher werden wir durch Differentiation, indem λ als die variable Größe betrachtet wird, unendlich viele andere höchst bemerkenswerte Reihen finden können. Aus der ersten werden wir schließlich erlangen

$$\frac{\pi\pi\cos\lambda\pi}{\sin^2\lambda\pi} = \frac{1}{\lambda\lambda} - \frac{1}{(\lambda-1)^2} - \frac{1}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{(\lambda-2)^2} + \frac{1}{(\lambda+2)^2} - \frac{1}{(\lambda-3)^2} - \text{etc.}$$

Daher folgt also, wenn $\lambda = \frac{1}{2}$ ist, dass sein wird

$$0 = 1 - 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \text{etc.},$$

was freilich offenbar ist. Aber wenn $\lambda = \frac{1}{3}$ ist, wird sein

$$\frac{2\pi\pi}{27} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} + \frac{1}{169} - \text{etc.}$$

Ist $\lambda = \frac{2}{3}$, entspringt die vorhergehende Reihe

Ist $\lambda = \frac{1}{4}$, geht diese Summation hervor

$$\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{121} - \frac{1}{169} + \text{etc.}$$

Wenn wir also erneut differenzieren, wir die folgende Summation erhalten werden

$$\frac{\pi^3}{\sin^3\lambda\pi} - \frac{\pi^3}{2\sin\lambda\pi} = \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{(\lambda-1)^3} - \frac{1}{(\lambda+1)^3} + \frac{1}{(\lambda-2)^3} + \frac{1}{(\lambda+2)^3} - \text{etc.}$$

und so lässt sich ununterbrochen weiter fortschreiten.

§7 Auf die gleiche Weise wollen wir auch die andere Form differenzieren, welche reduziert liefert

$$\frac{1}{2\lambda^4} - \frac{\pi}{4\lambda^3\sin\lambda\pi} - \frac{\pi\pi\cos\lambda\pi}{4\lambda\lambda\sin^2\lambda\pi} = \frac{1}{(1-\lambda\lambda)^2} - \frac{1}{(4-\lambda\lambda)^2} + \frac{1}{(9-\lambda\lambda)^2} - \frac{1}{(16-\lambda\lambda)^2} + \text{etc.}$$

Wenn wir daher nun $\lambda = \frac{1}{2}$ nehmen, wird diese Summation hervorgehen

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{15^2} + \frac{1}{35^2} - \frac{1}{63^2} + \frac{1}{99^2} - \text{etc.},$$

welche völlig neue Reihe die ganze Aufmerksamkeit verdient; aber es ist nicht notwendig, von da aus eine neue Differentiation durchzuführen.

§8 Wir wollen aber die letzte Summation

$$\frac{\pi}{2\lambda\sin\lambda\pi} - \frac{1}{2\lambda\lambda} = \frac{1}{1-\lambda\lambda} - \frac{1}{4-\lambda\lambda} + \frac{1}{9-\lambda\lambda} - \frac{1}{16-\lambda\lambda} + \text{etc.}$$

genauer und gründlicher betrachten und wollen freilich zuerst, weil sie immer wahr sein muss, was auch immer für λ angenommen wird, $\lambda = 0$ nehmen.

Weil aber in diesem Fall die linke Seite in $\infty - \infty$ übergeht, werde λ wie eine sehr kleine Größe behandelt, und weil $\sin \lambda\pi = \lambda\pi - \frac{1}{6}\lambda^3\pi^3$ ist, wird diese Seite werden

$$\frac{\pi}{2\lambda(\lambda\pi - \frac{1}{6}\lambda^3\pi^3)} - \frac{1}{2\lambda\lambda},$$

welche Brüche auf den gemeinsamen Nenner gebracht geben

$$\frac{1 - 1 + \frac{1}{6}\lambda\lambda\pi\pi}{2\lambda\lambda(1 - \frac{1}{6}\lambda\lambda\pi\pi)} = \frac{\pi\pi}{12 - 2\lambda\lambda\pi\pi}.$$

Nun wird also nach Setzen von $\lambda = 0$ sein Faktor $= \frac{\pi\pi}{12}$ sein, aber die Reihe selbst wird in diesem Fall werden

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.},$$

deren Summe bekannt ist $\frac{\pi\pi}{12}$ zu sein.

§9 Es ist aber weiter offenbar, sooft für λ eine ganze Zahl angenommen wird, dass ein Term der Reihe und daher auch die Reihe selbst unendlich wird, was überaus mit der gefundenen Reihe übereinstimmt, weil ja in diesem Fall $\sin \lambda\pi = 0$ wird. Und daher ist diese Frage entstanden: Wenn jener ins Unendliche übergehende Term dieser Reihe auf die linke Seite gebracht wird, wie groß die Summe der übrigen Terme sein wird. Wir wollen natürlich festlegen, dass $\lambda = 1$ ist, und der erste Term der Reihe wird unendlich werden; dieser wird also auf die linke Seite hinübergebracht geben

$$\frac{\pi}{2\lambda \sin \lambda\pi} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{1 - \lambda\lambda} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{24} - \frac{1}{35} + \frac{1}{48} - \text{etc.}$$

Nun, um den Wert dieser Reihe ausfindig zu machen, werde λ der Einheit nur näherungsweise gleich gesetzt, indem $\lambda = 1 - \omega$ gesetzt wird, und es wird sein

$$\sin \lambda\pi = \sin(\pi - \pi\omega) = \sin \pi\omega;$$

es ist aber

$$\sin \pi\omega = \pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3,$$

nach Einsetzen welches Wertes hervorgehen wird

$$\frac{1}{2(1-\omega)\omega(1-\frac{1}{6}\pi^2\omega)} - \frac{1}{2(1-\omega)^2} - \frac{1}{2\omega - \omega\omega}.$$

Aber das erste Glied wird

$$\frac{1}{2(1-\omega)\omega(1-\frac{1}{6}\pi^2\omega^2)}$$

wegen

$$\frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2$$

und

$$\frac{1}{1-\frac{1}{6}\pi^2\omega^2} = 1 + \frac{1}{6}\pi^2\omega^2$$

unter Missachtung der höheren Potenzen als das Quadrat von ω in diese Form transformiert

$$\frac{1}{2\omega}\left(1 + \omega + \omega^2 + \frac{1}{6}\pi\pi\omega\omega\right);$$

aber das dritte Glied

$$-\frac{1}{2\omega(1-\frac{1}{2}\omega)}$$

geht wegen

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\omega} = 1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}\omega\omega$$

über in

$$-\frac{1}{2\omega}\left(1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}\omega\omega\right),$$

woher das erste und das dritte Glied zusammen ergeben

$$\frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{3}{4}\omega\omega + \frac{1}{6}\pi\pi\omega\omega\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\omega + \frac{1}{12}\pi\pi\omega;$$

dieser Wert wird für $\omega = 0$ gesetzt $= \frac{1}{4}$, woher das zweite Glied, welches $-\frac{1}{2}$ sein wird, hinzugefügt die ganze Summe $-\frac{1}{4}$ geben wird, so dass nach Verändern der Vorzeichen gilt

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \frac{1}{35} - \frac{1}{48} + \frac{1}{63} - \text{etc.},$$

die Begründung für welche offenbar ist, weil gilt

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right), \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right), \quad \frac{1}{15} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right), \quad \frac{1}{24} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \quad \text{etc.}$$

nachdem nämlich diese Werte eingesetzt und die sich aufhebenden Terme beseitigt worden sind, wird werden

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

§10 über diese Reihe tut sich aber diese schwerere Frage auf, in welcher die Summe der Reihe gesucht wird, wenn $\lambda\lambda$ eine negative Zahl und daher λ eine imaginäre Größe war. Es werde also festgelegt

$$\lambda\lambda = -\mu\mu \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu\sqrt{-1}$$

und die Reihe wird nichtsdestoweniger reell sein, natürlich

$$\frac{1}{1+\mu\mu} - \frac{1}{4+\mu\mu} + \frac{1}{9+\mu\mu} - \frac{1}{16+\mu\mu} + \frac{1}{25+\mu\mu} - \text{etc.};$$

Ihre Summe wird also sein

$$\frac{\pi}{2\mu\sqrt{-1} \cdot \sin \pi\mu\sqrt{-1}} + \frac{1}{2\mu\mu},$$

deren reeller Wert als gesucht wird, weil ja kein Zweifel besteht, dass der Wert reell wird.

§11 In der Lehre von Winkeln pflegt gezeigt zu werden, dass gilt

$$\sin\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Es werde also $\varphi = \mu\pi\sqrt{-1}$ und es wird sein

$$\varphi\sqrt{-1} = -\mu\pi \quad \text{und} \quad -\varphi\pi\sqrt{-1} = +\mu\pi,$$

woher erschlossen wird

$$\sin\mu\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\mu\pi} - e^{+\mu\pi}}{2\sqrt{-1}},$$

woher die gesuchte Summe sein wird

$$\frac{\pi}{\mu(e^{-\mu\pi} - e^{+\mu\pi})} + \frac{1}{2\mu\mu}.$$

Es wird also sein

$$\frac{1}{1+\mu\mu} - \frac{1}{4+\mu\mu} + \frac{1}{9+\mu\mu} - \frac{1}{16+\mu\mu} + \frac{1}{25+\mu\mu} - \text{etc.} = \frac{1}{2\mu^2} - \frac{\pi}{\mu(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}.$$

2°. Es sei $P = \varphi$ und der Bruch $\frac{\varphi}{\sin\varphi}$ vorgelegt

§12 Hier wird also wegen des Zählers $P = \varphi$ der erste Faktor φ beseitigt, so wie auch unsere Auflösung den selbigem entsprechen Zähler als dem Nichts gleich liefert. Hier wird also für den Nenner $\varphi - i\pi$ der Zähler $\frac{i\pi}{\cos i\pi}$, wo das obere Vorzeichen gilt, wenn i eine gerade Zahl, das untere, wenn es eine ungerade Zahl ist. Wenn daher also $i = 2n$ war, wird der daher entstehende Bruch sein

$$\frac{2n\pi}{\varphi - 2n\pi};$$

aber wenn $i = -2n$ ist, wird der Bruch sein

$$-\frac{2n\pi}{\varphi + 2n\pi};$$

aber wenn $i = 2n - 1$ war, wird der Bruch sein

$$-\frac{(2n-1)\pi}{\varphi - (2n-1)\pi};$$

schließlich entspringt aus $i = -2n - 1$

$$\frac{(2n-1)\pi}{\varphi + (2n-1)\pi},$$

weshalb die gefundene Reihe sein wird

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\pi}{\varphi-\pi} + \frac{\pi}{\varphi+\pi} + \frac{2\pi}{\varphi-2\pi} - \frac{2\pi}{\varphi+2\pi} - \frac{3\pi}{\varphi-3\pi} + \frac{3\pi}{\varphi+3\pi} + \frac{4\pi}{\varphi-4\pi} - \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\pi}{\pi-\varphi} + \frac{\pi}{\pi+\varphi} - \frac{2\pi}{2\pi-\varphi} - \frac{2\pi}{2\pi+\varphi} + \frac{3\pi}{3\pi-\varphi} + \frac{3\pi}{3\pi+\varphi} - \frac{4\pi}{4\pi-\varphi} - \text{etc.},$$

woher, wenn je zwei Terme zu einem zusammengezogen werden, sein wird

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\pi\pi}{\pi\pi-\varphi\varphi} - \frac{8\pi\pi}{4\pi\pi-\varphi\varphi} + \frac{18\pi\pi}{9\pi\pi-\varphi\varphi} - \frac{32\pi\pi}{16\pi\pi-\varphi\varphi} + \text{etc.},$$

welche durch $2\pi\pi$ dividiert diese Summation hervorbringt

$$\frac{\varphi}{2\pi\pi\sin\varphi} = \frac{1}{\pi\pi-\varphi\varphi} - \frac{4}{4\pi\pi-\varphi\varphi} + \frac{9}{9\pi\pi-\varphi\varphi} - \frac{16}{16\pi\pi-\varphi\varphi} + \text{etc.}$$

Und wenn $\varphi = \lambda\pi$ gesetzt wird, wird hervorgehen

$$\frac{\lambda\pi}{2\sin\lambda\pi} = \frac{1}{1-\lambda\lambda} - \frac{4}{4-\lambda\lambda} + \frac{9}{9-\lambda\lambda} - \frac{16}{16-\lambda\lambda} + \text{etc.},$$

woher, wenn war

$$\lambda\lambda = -\mu\mu \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu\sqrt{-1},$$

wegen

$$\sin\mu\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\mu\pi} - e^{+\pi\mu}}{2\sqrt{-1}}$$

sein wird

$$\frac{\mu\pi}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{1}{1+\mu\mu} - \frac{1}{4+\mu\mu} + \frac{1}{9+\mu\mu} - \frac{1}{16+\mu\mu} + \text{etc.}$$

und daher wird es möglich sein, durch Differentiation unendlich viele andere Summationen abzuleiten.

3°. Es sei $P = \varphi^2$ und der Bruch $\frac{\varphi\varphi}{\sin\varphi}$ vorgelegt

§13 Für den Nenner $\varphi - i\pi$ wird also $\pm ii\pi\pi$ sein, wo das obere Vorzeichen für eine gerade Zahl i, die untere hingegen für eine ungerade Zahl gilt. Daher, wenn anstelle von i nacheinander die nachstehenden Zahlen geschrieben werden

$$+1, \quad -1, \quad +2, \quad -2, \quad +3, \quad -3 \quad \text{etc.},$$

wird die resultierende Reihe sein

$$\frac{\varphi\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\pi\pi\varphi}{\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{8\pi\pi\varphi}{4\pi\pi - \varphi\varphi} + \frac{18\pi\pi\varphi}{9\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{32\pi\pi\varphi}{16\pi\pi - \varphi\varphi} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\varphi}{2\sin\varphi} = \frac{\pi\pi}{\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{4\pi\pi}{4\pi\pi - \varphi\varphi} + \frac{9\pi\pi}{9\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{16\pi\pi}{16\pi\pi - \varphi\varphi} + \text{etc.}$$

Wenn daher nun jeder beliebige Term dieser Reihe in zwei Teile gespalten wird, deren erster immer 1 ist, werden die zwei folgenden Reihen entsprießen

$$\frac{\varphi}{2\sin\varphi} = \left\{ \begin{array}{llllll} +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -\text{etc.} \\ +\dfrac{\varphi\varphi}{\pi\pi - \varphi\varphi} & -\dfrac{\varphi\varphi}{4\pi\pi - \varphi\varphi} & +\dfrac{\varphi\varphi}{9\pi\pi - \varphi\varphi} & -\dfrac{\varphi\varphi}{16\pi\pi - \varphi\varphi} & +\dfrac{\varphi\varphi}{25\pi\pi - \varphi\varphi} & -\text{etc.} \end{array} \right\}$$

Es ist aber bekannt, dass die Summe der Reihe

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

$= \frac{1}{2}$ ist; nachdem diese auf die andere Seite gebracht worden sind und durch $\varphi\varphi$ dividiert worden ist, wird hervorgehen

$$\frac{1}{2\varphi\sin\varphi} - \frac{1}{2\varphi\varphi} = \frac{1}{\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{1}{4\pi\pi - \varphi\varphi} + \frac{1}{9\pi\pi - \varphi\varphi} - \text{etc.},$$

welche vollkommen mit der in § 5 gefundenen Reihe übereinstimmt.

4°. Es sei $P = \varphi^\gamma$, während γ irgendeine ungerade positive Zahl bezeichnet, dass der Bruch $\frac{\varphi^\gamma}{\sin\varphi}$ vorgelegt ist

§14 Weil für den Nenner $\varphi - i\pi$ also $A = i^\gamma \pi^\gamma$ und $C = \pm 1$ wird, wird der Zähler $\pm i^\gamma \pi^\gamma$ sein, woher, weil γ eine ungerade Zahl ist, die Vorzeichen unserer Terme nach demselben Gesetz fortschreiten werden wie im Fall $P = \varphi$, wo $\gamma = 1$ ist; daher wird diese daraus entspringende Reihe sein

$$\frac{\varphi^\gamma}{\sin\varphi} = \frac{\pi^\gamma}{\pi - \varphi} + \frac{\pi^\gamma}{\pi + \varphi} - \frac{2^\gamma \pi^\gamma}{2\pi - \varphi} - \frac{2^\gamma \pi^\gamma}{2\pi + \varphi} + \frac{3^\gamma \pi^\gamma}{3\pi - \varphi} + \frac{3^\gamma \pi^\gamma}{3\pi - \varphi} - \text{etc.},$$

welche durch π^γ dividiert liefert

$$\frac{\varphi^\gamma}{\pi^\gamma \sin\varphi} = \frac{1}{\pi - \varphi} + \frac{1}{\pi + \varphi} - \frac{2^\gamma}{2\pi - \varphi} - \frac{2^\gamma}{2\pi + \varphi} + \frac{3^\gamma}{3\pi - \varphi} + \frac{3^\gamma}{3\pi - \varphi} - \text{etc.},$$

und nach Zusammenziehen von je zwei Termen wird sein

$$\frac{\varphi^\gamma}{2\pi^{\gamma+1} \sin\varphi} = \frac{1}{\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{2^\gamma}{4\pi\pi - \varphi\varphi} + \frac{3^\gamma}{9\pi\pi - \varphi\varphi} - \frac{4^\gamma}{16\pi\pi - \varphi\varphi} + \text{etc.}$$

Wir wollen $\varphi = \lambda\pi$ setzen und es wird sein

$$\frac{\lambda^\gamma}{2\sin\varphi\pi} = \frac{1}{1 - \lambda\lambda} - \frac{2^\gamma}{4 - \lambda\lambda} + \frac{3^\gamma}{9 - \lambda\lambda} - \frac{4^\gamma}{16 - \lambda\lambda} + \text{etc.}$$

§15 Daher, wenn $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ war, wird wie zuvor sein

$$\sin\mu\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\mu\pi} - e^{+\mu\pi}}{2\sqrt{-1}}.$$

Für den Wert der Potenz λ^γ müssen aber zwei Fälle entwickelt werden, je nachdem was galt:

$$\gamma = 4n + 1 \quad \text{oder} \quad \gamma = 4n - 1.$$

Für den ersten Fall wird sein

$$\lambda^\gamma = (\mu\sqrt{-1})^{4n+1} = (\mu\sqrt{-1})^{4n} \cdot \mu\sqrt{-1}.$$

Es ist aber

$$(\mu\sqrt{-1})^{4n} = \mu^{4n},$$

woher sein wird

$$\lambda^\gamma = \mu^{4n+1}\sqrt{-1},$$

und daher geht die folgende reelle Summation hervor

$$\frac{\mu^{4n+1}\pi}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{1}{1+\mu\mu} - \frac{2^{4n+1}}{4+\mu\mu} + \frac{3^{4n+1}}{9+\mu\mu} - \frac{4^{4n+1}}{16+\mu\mu} + \text{etc.}$$

Aber im anderen Fall, in welchem $\gamma = 4n-1$ ist, muss das erste Glied negativ genommen werden und es wird sein

$$-\frac{\mu^{4n-1}\pi}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{1}{1+\mu\mu} - \frac{2^{4n-1}}{4+\mu\mu} + \frac{3^{4n-1}}{9+\mu\mu} - \frac{4^{4n-1}}{16+\mu\mu} + \text{etc.}$$

Dass diese Summen aber nur wahr sein können, wenn γ eine ungerade und zwar positive Zahl ist, wird leicht klar.

5°. Es sei der Zähler $P = \varphi^\delta$, während δ eine positive gerade Zahl bezeichnet, und der Bruch sei $\frac{\varphi^\delta}{\sin\varphi}$

§15[a] Für dem Nenner $\varphi - i\pi$ wird also der Zähler $\pm i^\delta \pi^\delta$ sein, während die Mehrdeutigkeit der Vorzeichen demselben Gesetz folgt. In diesem Fall wird sich also das Verhältnis der Vorzeichen genauso verhalten wie im Fall $P = \varphi\varphi$ und es wird deshalb sein

$$\frac{\varphi^\delta}{\sin\varphi} = \frac{\pi^\delta}{\pi-\varphi} - \frac{\pi^\delta}{\pi+\varphi} - \frac{2^\delta\pi^\delta}{2\pi-\varphi} + \frac{2^\delta\pi^\delta}{2\pi+\varphi} + \frac{3^\delta\pi^\delta}{3\pi-\varphi} - \frac{3^\delta\pi^\delta}{3\pi+\varphi} - \text{etc.}$$

Daher, wenn wir $\varphi = \lambda\pi$ setzen, wird diese Reihe sein

$$\frac{\lambda^\delta\pi}{\sin\lambda\pi} = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{1+\lambda} - \frac{2^\delta}{2-\lambda} + \frac{2^\delta}{2+\lambda} + \frac{3^\delta}{3-\lambda} - \frac{3^\delta}{3+\lambda} - \text{etc.};$$

daher wird, indem je zwei Terme zu einem zusammen gezogen werden, werden

$$\frac{\lambda^{\delta-1}\pi}{2\sin\lambda\pi}=\frac{1}{1-\lambda\lambda}-\frac{2^{\delta}}{4-\lambda\lambda}+\frac{3^{\delta}}{9-\lambda\lambda}-\frac{4^{\delta}}{4-\lambda\lambda}+\text{etc.}$$

§16 Wir wollen nun auch $\lambda=\mu\sqrt{-1}$ setzen, dass ist

$$\sin\lambda\pi=\frac{e^{-\mu\pi}-e^{+\mu\pi}}{2\sqrt{-1}}.$$

Für den Wert von $\lambda^{\delta-1}$ müssen wieder zwei Fälle entwickelt werden, je nachdem ob $\delta=4n$ oder $\delta=4n+2$ war.

Im ersten Fall, in welchem $\delta=4n$ ist, wird $\lambda^{4n}=\mu^{4n}$ sein und daher

$$\lambda^{4n-1}=\frac{\mu^{4n-1}}{\sqrt{-1}};$$

und daher wird diese Summation entspringen

$$\frac{-\mu^{4n-1}\pi}{e^{\mu\pi}-e^{-\mu\pi}}=\frac{1}{1+\mu\mu}-\frac{2^{4n}}{4+\mu\mu}+\frac{3^{4n}}{9+\mu\mu}-\frac{4^{4n}}{16+\mu\mu}+\text{etc.}$$

Für den anderen Fall $\delta=4n+2$ wird sich aber die Summation so verhalten

$$\frac{\mu^{4n+1}\pi}{e^{\mu\pi}-e^{-\mu\pi}}=\frac{1}{1+\mu\mu}-\frac{2^{4n+2}}{4+\mu\mu}+\frac{3^{4n+2}}{9+\mu\mu}-\frac{4^{4n+2}}{16+\mu\mu}+\text{etc.}$$

§17 Wie aber diese Summationen nur mit der Wahrheit verträglich sein werden, wenn für die Exponenten γ und δ ganze Zahlen, wie sie definiert worden sind, angenommen werden, so hindert nichts daran, dass wie große Zahlen auch immer angenommen werden. Weil nämlich den Nenner

$$\sin\varphi=\varphi-\frac{1}{6}\varphi^{3}+\frac{1}{120}\varphi^{5}-\text{etc.}$$

zu unendlich vielen Dimensionen von φ ansteigt, solange die größte Potenz im Zähler nicht unendlich wird, führt die Auflösung in Brüche immer zur Wahrheit. Wenn aber jene Exponenten nicht ganzzahlig und positiv wären, ob gebrochen oder gar negativ, kann die Auflösung in Partialbrüche überhaupt nicht Geltung haben. Deswegen, wenn wir anstelle des Zählers P Funktionen von φ solcher Art festlegen, die auch zu einer unendlichen Anzahl an Dimensionen ansteigen, werden wir der gefundenen Summe nicht weiter sicher sein. Sondern es kann geschehen, dass zu den gefundenen Partialbrüchen darüber hinaus bestimmte ganze Anteile hinzugefügt werden müssen. Wir wollen also einige Fälle von dieser Art entwickeln.

6°. Es sei der Zähler $P = \cos\varphi$ und der Bruch $= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

§18 Weil gilt

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi\varphi + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 + \text{etc.},$$

steigen die Potenzen von φ im Zähler gleichermaßen bis ins Unendliche an wie im Nenner, woher es geschehen könnte, dass dieser Bruch einen ganzen Teil involviert; weil dieser aufgefunden wird, wenn $\varphi = \infty$ genommen wird, wäre dieser ganze Teil $= \frac{\cos\infty}{\sin\infty} = \cot\infty$, welcher aber an sich vollkommen unbestimmt ist. Dennoch kann indes, weil er in ebenso vielen Fällen positiv wie negativ werden kann, indem der Mittelwert genommen wird, der Wert zurecht als $= 0$ erscheinen; der übrige Zweifel wird durch die folgende Entwicklung beseitigt werden. Weil für den Nenner $\varphi - i\pi$ $A = \cos i\pi$ und $C = \cos i\pi$ wird, wird der Zähler dieses Bruches $= 1$ sein; daher wird also die folgenden Reihe entsprießen

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi - \pi} + \frac{1}{\varphi + \pi} + \frac{1}{\varphi - 2\pi} + \frac{1}{\varphi + 2\pi} + \text{etc.}$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\pi - \varphi} + \frac{1}{\pi - \varphi} - \frac{1}{2\pi - \varphi} + \frac{1}{2\pi + \varphi} - \text{etc.}$$

Für $\varphi = \lambda\pi$ gesetzt wird diese Reihe diese Form annehmen

$$\pi\cot\lambda\pi = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{2-\lambda} + \frac{1}{2+\lambda} - \frac{1}{3-\lambda} + \text{etc.};$$

ob diese Summation wahr ist, wollen wir in Spezialfällen untersuchen. Und zuerst wird die Gültigkeit freilich bestätigt, wenn λ eine ganze Zahl bezeichnet; es wird nämlich immer ein Term der Reihe unendlich, die Summe wird aber auch unendlich. Wir wollen aber $\lambda = \frac{1}{2}$ nehmen; es wird $\pi \cot \frac{\pi}{2}$ sein, aber die Reihe selbst geht als diese hervor

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \text{etc.},$$

wo sich alle Terme offenbar aufheben. Wir wollen darüber hinaus $\lambda = \frac{1}{4}$ nehmen und es wird hervorgehen

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \text{etc.},$$

welches die allbekannte Leibniz'sche Reihe ist. Und so verschwindet jeder Zweifel über die Gültigkeit dieser Reihe.

§19 Wir wollen je zwei Terme, abgesehen vom ersten, zu einzelnen zusammenziehen und werden erhalten

$$\pi \cot \lambda\pi = \frac{1}{\lambda} - \frac{2\lambda}{1-\lambda\lambda} - \frac{2\lambda}{4-\lambda\lambda} - \frac{2\lambda}{9-\lambda\lambda} - \frac{2\lambda}{16-\lambda\lambda} + \text{etc.},$$

welche Reihe auf diese Form reduziert wird

$$\frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{\pi\cot\lambda\pi}{2\lambda} = \frac{1}{1-\lambda\lambda} + \frac{1}{4-\lambda\lambda} + \frac{1}{9-\lambda\lambda} + \frac{1}{16-\lambda\lambda} + \text{etc.}$$

Wenn wir daher hier wiederum $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ setzen, wird wegen

$$\cos\mu\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\mu\pi} + e^{+\mu\pi}}{2}$$

und

$$\sin\mu\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\mu\pi} - e^{+\mu\pi}}{2\sqrt{-1}}$$

diese Summation erhalten werden

$$-\frac{1}{2\mu\mu} + \frac{\pi(e^{+\mu\pi} + e^{-\mu\pi})}{2\mu(e^{+\mu\pi} - e^{-\mu\pi})} = \frac{1}{1+\mu\mu} + \frac{1}{4+\mu\mu} + \frac{1}{9+\mu\mu} + \frac{1}{16+\mu\mu} + \text{etc.}$$

Nun ist es aber per se offenbar, dass durch Differentiation auf die gleiche Weise wie oben unendlich viele andere Summationen erhalten werden können.

II. Es werde $Q = \cos\zeta - \cos\varphi$ genommen, dass der Bruch $\frac{P}{\cos\zeta - \cos\varphi}$ aufzulösen ist

§20 Weil der Nenner $Q = \cos\zeta - \cos\varphi$ ist, wo der Winkel ζ als gegeben und konstant angesehen wird, verschwindet er in den folgenden Fällen

$$\varphi = \pm\zeta, \quad \varphi = \pm 2\pi \pm \zeta, \quad \varphi = \pm 4\pi \pm \zeta,$$
$$\varphi = \pm 6\pi \pm \zeta, \quad \varphi = \pm 8\pi \pm \zeta \quad \text{etc.}$$

und daher im Allgemeinen

$$\varphi = \pm i\pi \pm \zeta,$$

wo i alle geraden so negativen wie positiven Zahlen bezeichnet; daher werden die Nenner der einfachen Brüche, welche wir suchen, diese sein

$$\varphi - \zeta, \quad \varphi + \zeta, \quad \varphi - 2\pi - \zeta, \quad \varphi - 2\pi + \zeta, \quad \varphi + 2\pi - \zeta, \quad \varphi + 2\pi + \zeta \quad \text{etc.}$$

und auf diese Weise werden wir alle einfachen Brüche auffinden, die Summe all welcher dem vorgelegen Bruch gleich sein muss, also

$$\frac{P}{\cos\zeta - \cos\varphi}.$$

§21 Wir wollen nun zuerst den einfachen Nenner $\varphi - i\pi - \zeta$ betrachten und nach Setzen von $\varphi = i\pi + \zeta$ gehe der Zähler P in A über. Weil darauf aus dem Nenner $\frac{dQ}{d\varphi} = \sin\varphi$ wird, wird $C = \sin(i\pi + \zeta) = \sin\zeta$ sein, woher der Zähler dieses Bruches $\frac{A}{C} = \frac{A}{\sin\zeta}$ sein wird und daher der daraus entstehende Bruch entsprechend

$$\frac{A}{\sin\zeta(\varphi - i\pi - \zeta)}.$$

Aber für den Nenner $\varphi - i\pi + \zeta$, wenn im Zähler P $\varphi = i\pi - \zeta$ gesetzt wird, geht die Größe B hervor; aus dem Nenner wird aber $C = \sin(i\pi - \zeta) = -\sin\zeta$ werden, woher dieser Bruch entspringen wird

$$-\frac{B}{\sin\zeta(\varphi - i\pi + \zeta)}.$$

Nun ist es also nur nötig, dass anstelle von i nacheinander alle geraden so positiven wie negativen Zahlen eingesetzt werden.

1°. Der Zähler sei $P = 1$ und der Bruch $\frac{1}{\cos\zeta - \cos\varphi}$ vorgelegt

§22 Für die zwei allgemeinen Formeln wird also so $A = 1$ wie $B = 1$ sein, woher die allgemeinen Brüche diese sein werden

$$\frac{1}{\sin\zeta(\varphi - i\pi - \zeta)} - \frac{1}{\sin\zeta(\varphi - i\pi + \zeta)} = \frac{2\zeta}{\sin\zeta((\varphi - i\pi)^2 - \zeta\zeta)};$$

als logische Konsequenz werden wir daher die folgenden Summation ableiten

$$\frac{1}{\cos\zeta - \cos\varphi} = \frac{2\zeta}{\sin\zeta(\varphi\varphi - \zeta\zeta)} + \frac{2\zeta}{\sin\zeta((\varphi - 2\pi)^2 - \zeta\zeta)} + \frac{2\zeta}{\sin\zeta((\varphi + 2\pi)^2 - \zeta\zeta)}$$
$$+ \frac{2\zeta}{\sin\zeta((\varphi - 4\pi)^2 - \zeta\zeta)} + \frac{2\zeta}{\sin\zeta((\varphi + 4\pi)^2 - \zeta\zeta)} + \text{etc.}$$

oder wir werden haben

$$\frac{\sin\zeta}{2\zeta(\cos\zeta - \cos\varphi)} = \frac{1}{\varphi\varphi - \zeta\zeta} - \frac{1}{(\varphi - 2\pi)^2 - \zeta\zeta} + \frac{1}{(\varphi + 2\pi)^2 - \zeta\zeta}$$
$$+ \frac{1}{(\varphi - 4\pi)^2 - \zeta\zeta} + \frac{1}{(\varphi + 4\pi)^2 - \zeta\zeta} + \text{etc.}$$

§23 Wenn daher also $\zeta = 0$ war, wird sein

$$\frac{1}{2 - 2\cos\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{(\varphi - 2\pi)^2} + \frac{1}{(\varphi + 2\pi)^2} + \frac{1}{(\varphi - 4\pi)^2} + \frac{1}{(\varphi + 4\pi)^2} + \text{etc.}$$

Es sei nun weiter $\varphi = \frac{\pi}{2}$; die Summation wird diese sein

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \text{etc.},$$

wie freilich hinreichend bekannt ist. Wir wollen weiter $\varphi = \pi$ setzen und es wird diese Summation hervorgehen

$$\frac{\pi\pi}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{49} + \text{etc.},$$

welche Reihe mit der vorhergehenden übereinstimmt. Wenn aber $\varphi = \lambda\pi$ gesetzt wird, wird sein

$$\frac{\pi\pi}{2(1-\cos\lambda\pi})=\frac{1}{\lambda\lambda}+\frac{1}{(\lambda-2)^2}+\frac{1}{(\lambda+2)^2}+\frac{1}{(\lambda-4)^2}+\frac{1}{(\lambda+4)^2}+\text{etc.},$$

welche Summe auch ist

$$\frac{\pi\pi}{4(\sin\frac{1}{2}\lambda\pi)^2}.$$

§24 Wir wollen aber im Allgemeinen festlegen

$$\zeta = \alpha\pi \quad \text{und} \quad \varphi = \lambda\pi,$$

dass diese Summation erhalten wird

$$\frac{\pi\sin\alpha\pi}{2\alpha(\cos\alpha\pi-\cos\lambda\pi)}=\frac{1}{\lambda\lambda-\alpha\alpha}+\frac{1}{(\lambda-2)^2-\alpha\alpha}+\frac{1}{(\lambda+2)^2-\alpha\alpha}$$
$$+\frac{1}{(\lambda-4)^2-\alpha\alpha}+\frac{1}{(\lambda+4)^2-\alpha\alpha}+\text{etc.}$$

Wenn daher nun α eine imaginäre Größe oder $\alpha = \beta\sqrt{-1}$ war, wird die Summation diese sein

$$\frac{\pi(e^{+\beta\pi}-e^{-\beta\pi})}{2\beta((e^{+\beta\pi}+e^{-\beta\pi})-2\cos\lambda\pi)}=\frac{1}{\lambda\lambda+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda-2)^2+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda+2)^2+\beta\beta}$$
$$+\frac{1}{(\lambda-4)^2+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda+4)^2+\beta\beta}+\text{etc.}$$

§25 Daher, wenn dieser in eine Reihe aufzulösende Bruch vorgelegt wird

$$\frac{1}{a-\cos\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a-\cos\lambda\pi},$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden, je nachdem ob a größer oder kleiner als die Einheit war. Es sei $a < 1$, dass $a = \cos\alpha\pi$ werden kann; daher wird

$$\alpha = \frac{A\cos a}{\pi}$$

und nach Finden von α wird aufgefunden werden

$$\frac{1}{a-\cos\lambda\pi} = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{1-aa}}\left(\frac{1}{\lambda\lambda-\alpha\alpha}+\frac{1}{(\lambda-2)^2-\alpha\alpha}+\frac{1}{(\lambda+2)^2-\alpha\alpha}+\frac{1}{(\lambda-4)^2-\alpha\alpha}+\text{etc.}\right)$$

Wenn aber $a > 1$ war, muss β gesucht werden, dass wird

$$\frac{e^{+\beta\pi}+e^{-\beta\pi}}{2} = a.$$

Daher wird also $e^{+2\beta\pi}+1 = 2ae^{+\beta\pi}$ werden, woher nach Ziehen der Wurzel aufgefunden wird

$$e^{+\beta\pi} = a+\sqrt{aa-1}$$

und daher

$$e^{-\beta\pi} = a-\sqrt{aa-1},$$

woher weiter werden wird

$$\beta\pi = \log(a+\sqrt{aa-1}),$$

also

$$\beta = \frac{1}{\pi}\log(a+\sqrt{aa-1}).$$

Nachdem also diese Zahl β gefunden worden ist, liefert die Formel diese Reihe

$$\frac{\pi\sqrt{aa-1}}{2\beta(a-\cos\lambda\pi} = \frac{1}{\lambda\lambda+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda-2)^2+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda+2)^2+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda-4)^2+\beta\beta}+\text{etc.};$$

als logische Konsequenz werden wir haben

$$\frac{1}{a-\cos\lambda\pi}$$

$$= \frac{2\beta}{\pi\sqrt{aa-1}}\left(\frac{1}{\lambda\lambda+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda-2)^2+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda+2)^2+\beta\beta}+\frac{1}{(\lambda-4)^2+\beta\beta}+\text{etc.}\right).$$

Aber im mittleren Fall, in dem $a = 1$ ist, wird $\alpha = 0$; dann werde aber $a = 1 - \omega$ gesetzt und es wird sein

$$\arccos(1-\omega) = \arcsin\sqrt{2\omega-\omega\omega} = \sqrt{2\omega-\omega\omega}.$$

Es ist aber auch

$$\sqrt{1-aa} = \sqrt{2\omega-\omega\omega},$$

woher für diesen Fall die Summation der Reihe sein wird

$$\frac{1}{1-\cos\lambda\pi} = \frac{2}{\pi\pi}\left(\frac{1}{\lambda\lambda}+\frac{1}{(\lambda-2)^2}+\frac{1}{(\lambda+2)^2}+\frac{1}{(\lambda-4)^2}+\frac{1}{(\lambda+4)^2}+\text{etc.}\right).$$

Weil also gilt

$$1-\cos\lambda = 2\sin^2\frac{1}{2}\lambda\pi,$$

werden wir diese Summation haben

$$\frac{\pi\pi}{2\sin^2\frac{1}{2}\lambda\pi} = \frac{1}{\lambda\lambda}+\frac{1}{(\lambda-2)^2}+\frac{1}{(\lambda+2)^2}+\frac{1}{(\lambda-4)^2}+\text{etc.},$$

welche Reihe schon oben in § 23 gefunden worden ist.

2°. Es sei nun $P = \sin\varphi$ und der Bruch $\frac{\sin\varphi}{\cos\zeta-\cos\varphi}$ vorgelegt

§26 Weil also $P = \sin\varphi$ ist, wird nach Nehmen von $\varphi = i\pi + \zeta$ sein

$$A = \sin(i\pi+\zeta) = \sin\zeta;$$

aber nach Setzen von $\varphi = i\pi - \zeta$ geht $B = -\sin\zeta$ hervor; daher werden die beiden daraus resultieren Brüche sein

$$\frac{1}{\varphi-i\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi-i\pi+\zeta} = \frac{2\varphi-2i\pi}{(\varphi-i\pi)^2-\zeta\zeta}.$$

Daher wenn anstelle von i nacheinander all seine Werte schreiben, werden wir die folgende Reihe erlangen:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\zeta-\cos\varphi}=\frac{2\varphi}{\varphi\varphi-\zeta\zeta}+\frac{2(\varphi-2\pi)}{(\varphi-2\pi)^2-\zeta\zeta}+\frac{2(\varphi+2\pi)}{(\varphi+2\pi)^2-\zeta\zeta}+\frac{2(\varphi-2\pi)}{(\varphi-4\pi)^2-\zeta\zeta}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{\sin\varphi}{2(\cos\zeta-\cos\varphi)}=\frac{\varphi}{\varphi\varphi-\zeta\zeta}+\frac{\varphi-2\pi}{(\varphi-2\pi)^2-\zeta\zeta}+\frac{\varphi+2\pi}{(\varphi+2\pi)^2-\zeta\zeta}+\frac{\varphi-4\pi}{(\varphi-4\pi)^2-\zeta\zeta}+\text{etc.}$$

§27 Daher, wenn $\zeta=0$ war, wird sein

$$\frac{\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}+\frac{1}{\varphi+2\pi}+\frac{1}{\varphi-4\pi}+\frac{1}{\varphi+4\pi}+\text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe also diese

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi.$$

Daher, wenn wir $\varphi=\lambda\pi$ setzen, wird sein

$$\frac{1}{2}\pi\cot\frac{1}{2}\lambda\pi=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-2}+\frac{1}{\lambda+2}+\frac{1}{\lambda-4}+\frac{1}{\lambda+4}+\text{etc.}$$

und durch Zusammenziehen von je zwei Termen

$$\frac{1}{2}\pi\cot\frac{1}{2}\lambda\pi=\frac{1}{\lambda}+\frac{2\lambda}{\lambda\lambda-4}+\frac{2\lambda}{\lambda\lambda-16}+\frac{2\lambda}{\lambda\lambda-36}+\text{etc.}$$

und daher

$$\frac{1}{2\lambda\lambda}-\frac{\pi\cot\frac{1}{2}\lambda\pi}{4\lambda}=\frac{1}{4-\lambda\lambda}+\frac{1}{16-\lambda\lambda}+\frac{1}{36-\lambda\lambda}+\text{etc.}$$

Wenn wir daher hier 2λ anstelle von λ schreiben, werden wir haben

$$\frac{1}{8\lambda\lambda}-\frac{\pi\cot\lambda\pi}{8\lambda}=\frac{1}{4-4\lambda\lambda}+\frac{1}{16-4\lambda\lambda}+\frac{1}{36-4\lambda\lambda}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{2\lambda\lambda}-\frac{\pi\cot\lambda\pi}{2\lambda}=\frac{1}{1-\lambda\lambda}+\frac{1}{4-\lambda\lambda}+\frac{1}{9-\lambda\lambda}+\frac{1}{16-\lambda\lambda}+\text{etc.},$$

welche Reihe gänzlich dieselbe ist, welche wir oben in § 19 gefunden haben.

§28 Wir wollen nun wie oben festlegen

$$\zeta = \alpha\pi \quad \text{und} \quad \varphi = \lambda\pi,$$

dass die folgende Reihe erhalten wird:

$$\frac{\pi \sin \lambda\pi}{2(\cos\alpha\pi - \cos\lambda\pi)} = \frac{\lambda}{(\lambda\lambda - \alpha\alpha)} + \frac{\lambda - 2}{(\lambda-2)^2 - \alpha\alpha} + \frac{\lambda + 2}{(\lambda+2)^2 - \alpha\alpha} + \frac{\lambda - 4}{(\lambda-4)^2 - \alpha\alpha} + \text{etc.}$$

Wenn aber hier $\alpha = \beta\sqrt{-1}$ gesetzt wird, wie diese Reihe die folgende Form annehmen:

$$\frac{\pi \sin \lambda\pi}{e^{+\beta\pi} + e^{-\beta\pi} - 2\cos\lambda\pi} = \frac{\lambda}{\lambda\lambda + \beta\beta} + \frac{\lambda - 2}{(\lambda-2)^2 + \beta\beta} + \frac{\lambda + 2}{(\lambda+2)^2 + \beta\beta} + \frac{\lambda - 4}{(\lambda-4)^2 + \beta\beta} + \text{etc.}$$

§29 Wenn daher also dieser Bruch vorgelegt war

$$\frac{\sin\varphi}{a - \cos\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\lambda\pi}{a - \cos\lambda\pi},$$

müssen wiederum zwei Fälle entwickelt werden, den einen, in dem $a < 1$ ist, den anderen, in dem $a > 1$ ist.

Im ersten Fall, in dem $a < 1$ ist, werde freilich $\cos\alpha\pi = a$ gesetzt, woher wird

$$\alpha = \frac{\arccos a}{\pi},$$

nach Finden von welchem sein wird

$$\frac{\sin\lambda\pi}{a - \cos\lambda\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\lambda}{\lambda\lambda - \alpha\alpha} + \frac{\lambda - 2}{(\lambda-2)^2 - \alpha\alpha} + \frac{\lambda + 2}{(\lambda+2)^2 - \alpha\alpha} + \text{etc.}\right)$$

Wenn aber $a > 1$ war, muss ein β gesucht werden, so dass wie zuvor gilt

$$\beta = \frac{1}{\pi}\log(a + \sqrt{aa - 1}),$$

nach Finden welches Werten sein wird

$$\frac{\sin\lambda\pi}{a-\cos\lambda\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\lambda}{\lambda\lambda+\beta\beta} + \frac{\lambda-2}{(\lambda-2)^2+\beta\beta} + \frac{\lambda+2}{(\lambda+2)^2+\beta\beta} + \text{etc.}\right).$$

Wenn aber $a = 1$ war, dann wird so $\alpha = 0$ wie $\beta = 0$ und es resultiert dieselbe Reihe, welche wir oben aus dem Fall $\zeta = 0$ gefunden haben. Daher wird also, wenn $\lambda = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, diese Reihe hervorgehen

$$\frac{\pi}{2\cos\alpha\pi} = \frac{2}{1-4\alpha\alpha} - \frac{6}{9-4\alpha\alpha} + \frac{10}{25-4\alpha\alpha} - \frac{14}{49-4\alpha\alpha} + \text{etc.}$$

oder auch diese

$$\frac{\pi}{e^{+\beta\pi}-e^{-\beta\pi}} = \frac{2}{1+4\beta\beta} - \frac{6}{9+4\beta\beta} + \frac{10}{25+4\beta\beta} - \frac{14}{49+4\beta\beta} + \text{etc.}$$

Im Übrigen wird per se eingesehen, dass durch Differentiationen viele andere Reihen gebildet werden können.

III. Es sei der Bruch $\frac{1}{\cos\varphi - \cos 2\varphi}$ aufzulösen

§30 Hier muss also vor Allem gesucht werden, in welchen Fällen dieser Nenner verschwindet. Weil also im Allgemeinen $\cos\varphi = \cos(i\pi \pm \varphi)$, während i eine gerade Zahl bezeichnet, und auf die gleiche Weise $\cos 2\varphi = \cos(i' \pm 2\varphi)$ ist, werden wir $i\pi \pm \varphi = i'\pi \pm 2\varphi$ haben, woher wegen der Zweideutigkeit der Vorzeichen die folgenden Fälle gefunden werden:

$$\varphi = i\pi, \quad \varphi = \frac{i\pi}{3}.$$

Hier ist es aber sittsam zu bemerken, dass die ersten Fälle zweimal auftauchen oder die daher entstehenden Faktoren $\varphi - i\pi$ zweimal zu aufzuführen sind, so dass der Faktor des Nenners $(\varphi - i\pi)^2$ ist. Weil dies weniger klar ist, wollen wir es so zeigen: Weil ja im Allgemeinen gilt:

$$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{b-a}{2},$$

wird unser Nenner $2\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{3}{2}\varphi$ sein, welcher also verschwindet, wann immer entweder $\sin\frac{1}{2}\varphi = 0$ oder $\sin\frac{3}{2}\varphi = 0$ ist. Es wird aber $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ sein, sooft $\frac{\varphi}{2} = i\pi$, während i alle ganzen Zahlen bezeichnet, und daher $\varphi = 2i\pi$ ist. Und auf die gleiche Weise verschwindet $\sin\frac{3\varphi}{2}$, wenn $\frac{3\varphi}{2} = i\pi$ und daher $\varphi = \frac{2i\pi}{3}$ ist, welche zweite Formel, sooft $\frac{i}{3}$ eine ganze Zahl ist, die erste Fällen an die Hand gibt, und so ist es offenbar, dass in den Produkten alle Quadrate $(\varphi - i\pi)^2$ auftauchen. Die übrigen Faktoren $\varphi - \frac{2i\pi}{3}$ werden, wann immer i nicht durch 3 teilbar ist, einfach sein.

§31 Weil also die Formel $(\varphi - 2i\pi)^2$ ein Faktor unseres Nenners $\cos\varphi - \cos 2\varphi$ ist, wollen wir gemäß der Regeln für Fälle von dieser Art festlegen

$$\frac{1}{\cos\varphi - \cos 2\varphi} = \frac{\alpha}{(\varphi - 2i\pi)^2} + \frac{\beta}{\varphi - 2i\pi} + R,$$

wo R alle übrigen Brüche umfasst. Nun wollen wir auf beiden Seiten mit $(\varphi - 2i\pi)^2$ multiplizieren und wir werden haben

$$\frac{(\varphi - 2i\pi)^2}{\cos\varphi - \cos 2\varphi} = \alpha + \beta(\varphi - 2i\pi) + R(\varphi - 2i\pi)^2,$$

Wir wollen $\varphi = 2i\pi$ setzen und es wird werden

$$\alpha = \frac{(\varphi - 2i\pi)^2}{\cos\varphi - \cos 2\varphi},$$

der Zähler und Nenner welches Bruches verschwinden werden; daher wird nach Einsetzen der Differentiale werden

$$\alpha = \frac{2(\varphi - 2i\pi)}{-\sin\varphi + 2\sin 2\varphi};$$

weil dort der Zähler und der Nenner wiederum verschwinden, werden an deren Stelle die Differentiale geschrieben und es wird sein

$$\alpha = \frac{2}{-\cos\varphi + 4\cos 2\varphi}.$$

Nun wird also nach Setzen von $\varphi = 2i\pi$ $\alpha = \frac{2}{3}$ aufgefunden werden.

§32 Nun werde in der Gleichung

$$\frac{(\varphi - 2i\pi)^2}{\cos\varphi - \cos 2\varphi} = \alpha + \beta(\varphi - 2i\pi) + R(\varphi - 2i\pi)^2$$

der Term $\alpha = \frac{2}{3}$ auf die andere Seite und auf denselben Nenner gebracht und es wird diese Gleichung resultieren

$$\frac{(\varphi - 2i\pi)^2 - \frac{2}{3}(\cos\varphi - \cos 2\varphi)}{\cos\varphi - \cos 2\varphi} = \beta(\varphi - 2i\pi) + R(\varphi - 2i\pi)^2,$$

woher durch Dividieren durch $\varphi - 2i\pi$ werden wird

$$\frac{(\varphi - 2i\pi)^2 - \frac{2}{3}(\cos\varphi - \cos 2\varphi)}{(\varphi - 2i\pi)(\cos\varphi - \cos 2\varphi)} = \beta + R(\varphi - 2i\pi).$$

Wenn daher nun $\varphi = 2i\pi$ gesetzt wird, wird β dem Bruch gleich werden, von welchem so der Zähler wie der Nenner dreimal verschwindet, so dass drei Differentiationen notwendig sind.

Aber die erste Differentiation wird geben

$$\beta = \frac{2(\varphi - 2i\pi) + \frac{2}{3}(\sin\varphi - 2\sin 2\varphi)}{\cos\varphi - \cos 2\varphi - (\varphi - 2i\pi)(\sin\varphi - 2\sin 2\varphi)}$$

Die zweite Differentiation wird geben

$$\beta = \frac{2 + \frac{2}{3}(\cos\varphi - 4\cos 2\varphi)}{-2\sin\varphi + 4\sin 2\varphi - (\varphi - 2i\pi)(\cos\varphi - 4\cos 2\varphi)}.$$

Schließlich gibt die dritte Differentiation

$$\beta = \frac{-\frac{2}{3}(\sin\varphi - 8\sin 2\varphi)}{-3\cos\varphi + 12\cos 2\varphi 2\varphi + (\varphi - 2i\pi)(\sin\varphi - 8\sin 2\varphi)}.$$

Nun verschwindet der Zähler zwar wiederum, der Nenner wird hingegen 9, so dass $\beta = 0$ ist.

§33 Aber dieser Wert für β kann in der Tat leichter ohne Differentiation gefunden werden, indem $\varphi = 2i\pi + \omega$ gesetzt wird, während ω unendlich klein ist; dann wird aber sein

$$\cos\varphi = \cos\omega \quad \text{und} \quad \cos 2\varphi = \cos 2\omega;$$

aber die Gleichung wird werden

$$\frac{\omega\omega}{\cos 2\omega - \cos 2\omega} = \frac{2}{3} + \beta\omega + R\omega\omega.$$

Nun wollen wir die beiden Kosinus häherungsweise darbieten und bis hin zur vierten Potenz von ω fortschreiten, und weil gilt

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega\omega + \frac{1}{24}\omega^4$$

und

$$\cos 2\omega = 1 - 2\omega\omega + \frac{16}{24}\omega^4,$$

wird sein

$$\cos\omega - \cos 2\omega = \frac{3}{2}\omega\omega - \frac{5}{8}\omega^4 = \frac{3}{2}\omega\omega\left(1 - \frac{5}{12}\omega\omega\right),$$

nach Einsetzen welches Wertes wir haben werden

$$\frac{2}{3(1-\frac{5}{12}\omega\omega)} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{5}{12}\omega\omega\right) = \frac{2}{3} + \beta\omega + R\omega\omega,$$

und daher wird $\beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12}\omega$; und so wird für $\omega = 0$ gesetzt auch $\beta = 0$ sein.

§34 Dieser Sache wegen wird für den quadratischen Faktor des Nenners $(\varphi - 2i\pi)^2$ wegen $\alpha = \frac{2}{3}$ der daher entstehende Bruch sein

$$\frac{2}{3(\varphi - 2i\pi)^2}.$$

Für die übrigen einfachen einfachen Faktoren $\varphi - \frac{2}{3}i\pi$ wollen wir aber festlegen

$$\frac{1}{\cos\varphi - \cos 2\varphi} = \frac{\alpha}{\varphi - \frac{2}{3}i\pi} + R,$$

welche Gleichung mit $\varphi - \frac{2}{3}i\pi = \omega$ multipliziert werde, dass hervorgeht

$$\frac{\omega}{\cos\varphi - \cos 2\varphi} = \alpha + R\omega.$$

Dort sei es angemerkt, dass i nicht durch 3 teilbar ist, woher $\frac{2i\pi}{3}$ die folgenden Winkel ausdrücken wird:

$$\frac{2}{3}\pi, \quad \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{8}{3}\pi, \quad \frac{10}{3}\pi, \quad \frac{14}{3}\pi \quad \text{etc.};$$

aber die Werte des Winkels $\frac{4i\pi}{3}$ sind

$$\frac{4}{3}\pi, \quad \frac{8}{3}\pi, \quad \frac{16}{3}\pi, \quad \frac{20}{3}\pi, \quad \frac{28}{3}\pi \quad \text{etc.},$$

der Kosinus welcher Winkel derselbe, $-\frac{1}{2}$, ist. Die Sinus dieser Winkel sind aber

$$\sin\frac{2i\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn i $3n+1$ ist, das untere hingegen, wenn $i = 3n+2$ war; aber $\sin\frac{4i\pi}{3}$ ist dahingegen immer $\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$, wo wiederum das obere Vorzeichen gilt, wenn $i = 3n+1$ ist, das untere hingegen, wenn $i = 3n+2$ war. Und diese Regel gilt immer ob n eine positive oder negative Zahl ist.

§35 Nachdem diese Dinge im Voraus bemerkt worden sind, wird sein

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2}\cos\omega \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega$$

und

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{2}\cos 2\omega \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega,$$

woher wir hingegen näherungsweise haben werden

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\omega\omega\right) \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\omega$$

und

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{2}\left(1 - 2\omega\omega\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\omega,$$

wo ununterbrochen die oberen Vorzeichen gelten werden, wenn $i = 3n+1$ ist, die unteren aber, wenn $i = 3n+2$ ist. Daher wird unser Nenner also sein

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi = -\frac{3}{4}\omega\omega \mp \frac{3\sqrt{3}}{2}\omega,$$

woher wird

$$\frac{1}{-\frac{3}{4}\omega \mp \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \alpha.$$

Nach Setzen von $\omega = 0$ wird also sein

$$\alpha = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

so dass aus dem Faktor $\varphi - \frac{2i\pi}{3}$ dieser Bruch entsprießt

$$\mp\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\varphi - \frac{2i\pi}{3}} = \mp\frac{2}{(3\varphi - 2i\pi)\sqrt{3}}.$$

§36 Wir wollen also zuerst alle Terme der Reihe entwickeln, die aus den doppelten Faktoren $(\varphi - 2i\pi)^2$ entstehen, und weil der Zähler $\frac{2}{3}$ wäre, wenn wir anstelle von i nacheinander alle ganzen positiven wie negativen Zahlen schreiben, wird die folgende Reihe entspringen:

$$\frac{2}{3\varphi\varphi} + \frac{2}{3(\varphi-2\pi)^2} + \frac{2}{3(\varphi+2\pi)^2} + \frac{2}{3(\varphi-4\pi)^2} + \frac{2}{3(\varphi+4\pi)^2} + \frac{2}{3(\varphi-6\pi)^2} + \text{etc.}$$

Für die andere Reihe sei zuerst $i = 3n+1$ und daher wird der Bruch werden

$$-\frac{2}{(3\varphi - 2(3n+1)\pi)\sqrt{3}};$$

wenn aber $i = -3n-1$ ist, wird das untere Zeichen gelten und der Bruch wird dieser sein

$$+\frac{2}{(3\varphi + 2(3n+1)\pi)\sqrt{3}},$$

welche zwei Terme zusammengezogen liefern

$$-\frac{8(3n+1)\pi}{(9\varphi\varphi - 4(3n+1)^2\pi\pi)\sqrt{3}};$$

wenn aber $i = 3n+2$ war, dann aber auch $i = -3n-2$ ist, liefern je zwei Brüche zu einem zusammengezogen

$$+\frac{8(3n+2)\pi}{(9\varphi\varphi - 4(3n+2)^2\pi\pi)\sqrt{3}}.$$

Daher, weil wir die negativen Werte von i schon erfasst haben, müssen anstelle von n nur alle Positiven Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5$ etc. eingesetzt werden, woher die folgende Reihe resultieren wird:

$$-\frac{8\pi}{(\varphi\varphi-4\pi\pi)\sqrt{3}}-\frac{8\cdot 4}{(9\varphi\varphi-4\cdot 16\pi\pi)\sqrt{3}}-\frac{8\cdot 7}{(9\varphi\varphi-4\cdot 49\pi\pi)\sqrt{3}}-\text{etc.}$$
$$+\frac{8\cdot 2\pi}{(\varphi\varphi-16\pi\pi)\sqrt{3}}+\frac{8\cdot 5}{(9\varphi\varphi-4\cdot 25\pi\pi)\sqrt{3}}+\frac{8\cdot 8}{(9\varphi\varphi-4\cdot 64\pi\pi)\sqrt{3}}+\text{etc.}$$

§37 Der vorgelegte Bruch

$$\frac{1}{\cos\varphi-\cos 2\varphi}$$

wird also in diese zwei Reihen aufgelöst

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{(\varphi-2\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi+2\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi-4\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi+4\pi)^2}+\text{etc.}\right)$$

$$-\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9\varphi\varphi-4\cdot 1^2\pi\pi}+\frac{4}{9\varphi\varphi-4\cdot 4^2\pi\pi}+\frac{7}{9\varphi\varphi-4\cdot 7^2\pi\pi}+\frac{10}{9\varphi\varphi-4\cdot 10^2\pi\pi}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{9\varphi\varphi-4\cdot 2^2\pi\pi}+\frac{5}{9\varphi\varphi-4\cdot 5^2\pi\pi}+\frac{8}{9\varphi\varphi-4\cdot 8^2\pi\pi}+\frac{11}{9\varphi\varphi-4\cdot 11^2\pi\pi}+\text{etc.}\right)$$

Wenn wir daher also wie oben $\varphi=\lambda\pi$ setzen, wird der Bruch

$$\frac{\pi\pi}{\cos\lambda\pi-\cos 2\lambda\pi}=$$
$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{(\lambda-2)^2}+\frac{1}{(\lambda+2)^2}-\frac{1}{(\lambda-4)^2}+\frac{1}{(\lambda+4)^2}+\frac{1}{(\lambda-6)^2}+\frac{1}{(\lambda+6)^2}+\text{etc.}\right)$$

$$-\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9\lambda\lambda-4\cdot 1^2}+\frac{4}{9\lambda\lambda-4\cdot 4^2}+\frac{7}{9\lambda\lambda-4\cdot 7^2}+\frac{10}{9\lambda\lambda-4\cdot 10^2}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{9\lambda\lambda-4\cdot 2^2}+\frac{5}{9\lambda\lambda-4\cdot 5^2}+\frac{8}{9\lambda\lambda-4\cdot 8^2}+\frac{11}{9\lambda\lambda-4\cdot 11^2}+\text{etc.}\right)$$

§38 Um ein Beispiel anzuführen, sei $\lambda = \frac{1}{3}$, dass $9\lambda\lambda = 1$ wird, und es wird diese Summation hervorgehen

$$\pi\pi = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{1^2} + \frac{9}{5^2} + \frac{9}{7^2} + \frac{9}{11^2} + \frac{9}{13^2} + \frac{9}{17^2} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{4}{4 \cdot 4^2 - 1} + \frac{7}{4 \cdot 7^2 - 1} + \frac{10}{4 \cdot 10^2 - 1} + \frac{13}{4 \cdot 13^2 - 1} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{4 \cdot 2^2 - 1} + \frac{5}{4 \cdot 5^2 - 1} + \frac{8}{4 \cdot 8^2 - 1} + \frac{11}{4 \cdot 11^2 - 1} + \frac{14}{4 \cdot 14^2 - 1} + \text{etc.}\right),$$

welche Summation auch auf diese Weise dargestellt werden kann

$$\pi\pi = 6\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{2^2 - 1} - \frac{4}{4^2 - 1} + \frac{8}{8^2 - 1} - \frac{10}{10^2 - 1} + \frac{14}{14^2 - 1} - \frac{16}{16^2 - 1} + \text{etc.}\right);$$

eleganter wird aber die folgende Form sein:

$$\pi\pi = 6\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.}\right).$$

§39 Weil ja in diesem Fall Quadrate aufgetaucht sind, werden wir auch Brüche solcher Art auflösen können, deren Nenner selbst Quadrate sind und daher einfache Quadrate involvieren. Und daher wird sich diese Auflösung auf kubische Nenner und solche höherer Potenzen ausdehnen lassen, wenn nur die Vorschriften zur Hilfe genommen werden, die ich für Auflösungen dieser Art schon einst gegeben habe.

IV. Es sei der Bruch $\frac{1}{\sin^2 \varphi}$ vorgelegt und aufzulösen

§40 Weil also hier alle quadratischen Faktoren in dieser Form enthalten sind

$$\frac{1}{(\varphi - i\pi)^2},$$
während i alle ganzen so positiven wie negativen Zahlen bezeichnet, wollen wir für die allgemeine Auflösung festlegen

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{\alpha}{(\varphi - i\pi)^2} + \frac{\beta}{\varphi - i\pi} + R,$$
wo R alle übrigen Brüche umfasst. Daher wird durch Multiplizieren mit $(\varphi - i\pi)^2$ sein

$$\frac{(\varphi - i\pi)^2}{\sin^2 \varphi} = \alpha + \beta(\varphi - i\pi) + R(\varphi - i\pi)^2.$$
Nun werde $\varphi = i\pi$, und weil ja in diesem Fall der Zähler und der Nenner unseres Bruches verschwinden, wollen wir $\varphi - i\pi = \omega$ setzen und es wird sein

$$\sin \varphi = \sin(i\pi + \omega) = \sin i\pi \cos \omega + \sin \omega \cos i\pi = \pm \sin \omega$$
- wegen $\sin i\pi = 0$ und $\cos i\pi = \pm 1$; dort gilt das obere Vorzeichen, wenn i eine gerade Zahl ist, das untere, wenn es eine ungerade Zahl ist, welcher Unterschied hier dennoch nicht eingeht, weil $\sin^2 \varphi = \sin^2 \omega$ ist. Daher wird also sein

$$\frac{\omega\omega}{\sin^2 \omega} = \alpha + \beta\omega + R\omega\omega.$$
Weil also gilt

$$\sin \omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 = \omega\left(1 - \frac{1}{6}\omega\omega\right),$$

wird sein

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}\omega\omega\right)^2} = 1 + \frac{1}{3}\omega\omega = \alpha + \beta\omega + R\omega\omega,$$
woher sofort $\alpha = 1$ wird. Dann wird aber die Gleichung sein

$$\frac{1}{3}\omega = \beta + R\omega$$
und so wird für $\omega = 0$ gesetzt $\beta = 0$; als logische Konsequenz entspringt aus dem Faktor des Nenners $(\varphi - i\pi)^2$ dieser Bruch $\frac{1}{(\varphi - i\pi)^2}$.

§41 Es werden nun i alle entsprechenden Werte zugeteilt und es wird diese Reihe aufgefunden werden

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\varphi\varphi}+\frac{1}{(\varphi-\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi+\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi-2\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi+2\pi)^2}+\frac{1}{(\varphi-3\pi)^2}+\text{etc.};$$

diese Reihe hätte freilich aus § 18 abgeleitet werden können, wo wir gefunden haben

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi-\pi}+\frac{1}{\varphi+\pi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}+\frac{1}{\varphi+2\pi}+\text{etc.},$$

woher durch Differentiation nach Verändern der Vorzeichen die Reihe selbst entspringt, die wir hier gefunden haben.

§42 Wenn daher dieser Bruch vorgelegt worden wäre

$$\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

und die Auflösung auf dieselbe Weise durchgeführt, wäre wegen

$$\cos(i\pi+\omega))\pm\cos\omega$$

und daher

$$\cos^2\varphi=\cos^2\omega=1-\omega\omega,$$

weil ja die zweiten Potenzen von ω nicht in diese Rechnung eingehen, der Zähler wäre wie im vorhergehenden Fall $=1$ und daher wäre vollkommen dieselbe Reihe hervorgegangen, was natürlich absurd wäre. Aber wir haben schon oben angemerkt, dass Auflösungen von dieser Art nur mit der Wahrheit verträglich sind, wenn die Variable φ in Zähler weniger Dimensionen hat als im Nenner, weil andernfalls außer der Reihe der Brüche ganze Teile hinzukämen, was in diesem Fall offenbar passiert, weil gilt

$$\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\varphi}-1,$$

so dass der ganze Teil in diesem Fall $=-1$ ist.

V. Es sei der Bruch $\frac{1}{\sin^3\varphi}$ aufzulösen

§43 Für diesen Fall wird also festgelegt werden müssen

$$\frac{1}{\sin^3\varphi}=\frac{\alpha}{(\varphi-i\pi)^3}+\frac{\beta}{(\varphi-i\pi)^2}+\frac{\gamma}{\varphi-\pi}+R.$$

Wir wollen nun wiederum $\varphi=i\pi+\omega$ setzen, und weil gilt

$$\frac{1}{\sin^3\varphi}=\pm\frac{1}{\omega^3}\left(1+\frac{1}{2}\omega\omega\right),$$

wo das Verhältnis der Vorzeichen dem oben gegebenen Gesetz folgt, resultiert diese Gleichung, nachdem mit ω^3 multipliziert worden ist,

$$\pm\frac{\omega^3\left(1+\frac{1}{3}\omega\omega\right)}{\omega^3}=\alpha+\beta\omega+\gamma\omega\omega+R\omega^3=\pm\left(1+\frac{1}{2}\omega\omega\right),$$

woher offenbar $\alpha=\pm1$ wird, dann aber auch

$$\beta+\gamma\omega+R\omega\omega=\pm\frac{1}{2}\omega$$

und so wird $\beta=0$ und $\gamma=\pm\frac{1}{2}$ sein. Auf diese Weise werden aus dem kubischen Faktor des Nenners $(\varphi-i\pi)^2$ diese zwei Brüche entsprießen

$$\pm\frac{1}{(\varphi-i\pi)^3}\pm\frac{1}{2(\varphi-i\pi)}.$$

§44 Wir wollen also dem Buchstaben i nacheinander alle positiven wie negativen Werte zuteilen und wir werden die folgende Auflösung haben

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^3\varphi}=\frac{1}{\varphi^3}&-\frac{1}{(\varphi-\pi)^3}-\frac{1}{(\varphi+\pi)^3}+\frac{1}{(\varphi-2\pi)^3}+\frac{1}{(\varphi+2\pi)^3}-\text{etc.}\\&+\frac{1}{2\varphi}-\frac{1}{2(\varphi-\pi)}-\frac{1}{2(\varphi+\pi)}+\frac{1}{2(\varphi-2\pi)}+\frac{1}{2(\varphi+2\pi)}-\text{etc.}\end{aligned}$$

Hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass die untere Reihe schon oben [§ 5] im ersten Beispiel gefunden worden ist; daher sehen wir ein, dass die Summe dieser Reihe sein wird

$$= \frac{1}{2\sin\varphi};$$

deswegen wird die obere Reihe der Kuben allein dieser Formel gleich werden

$$\frac{1}{\sin^3\varphi} - \frac{1}{2\sin\varphi}.$$

§45 Diese stimmt auch überaus mit den oben aufgestellten Prinzipien überein, aus welchen wir durch Differentiation ununterbrochen neue andere Reihen zu finden gelehrt haben. Weil nämlich gilt

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi - \pi} - \frac{1}{\varphi + \pi} + \frac{1}{\varphi - 2\pi} + \frac{1}{\varphi + 2\pi} - \text{etc.},$$

wird daher durch Differenzieren abgeleitet

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{(\varphi-\pi)^2} + \frac{1}{(\varphi+\pi)^2} + \frac{1}{(\varphi-2\pi)^2} + \frac{1}{(\varphi+2\pi)^2} + \text{etc.}$$

und daher durch erneutes Differenzieren

$$\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi} = \frac{2}{\varphi^3} - \frac{2}{(\varphi-\pi)^3} - \frac{2}{(\varphi+\pi)^3} + \frac{2}{(\varphi-2\pi)^3} + \frac{2}{(\varphi+2\pi)^3} - \text{etc.},$$

welche auf diese Form reduziert wird

$$\frac{2}{\sin^3\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi},$$

was hervorragend mit dem vorhergehenden Wert übereinstimmt.

VI. Es sei der Bruch $\frac{1}{\tan\varphi - \sin\varphi}$ vorgelegt und aufzulösen

§46 Dieser Nenner $\tan\varphi - \sin\varphi$ verschwindet offenbar in den Fällen, in denen $\varphi = i\pi$ ist, wobei i alle ganzen so positiven wie negativen Zahlen bezeichnet, woher die einfachen Brüche, deren Nenner diesen Faktor $\varphi - i\pi$ enthalten, im Fall $\varphi = i\pi$ unendlich werden, während die übrigen Brüche einen endlichen Wert beibehalten. Und diese Betrachtung eröffnet uns eine neue Methode, die einfachen Brüche ausfindig zu machen. Denn für jeden solchen verschwindenden Faktor werde der Wert des vorgelegten Bruches gesucht; weil dieser unendlich wird, werden ihm die Terme der Reihe gleich sein müssen, welche in demselben Fall verschwinden. Dieser Sache wegen wird $\varphi - i\pi = \omega$ sein müssen, während ω einen unendlich kleinen Winkel bezeichnet, Danach wird der vorgelegte Bruch eine gewisse Funktion von ω werden, welche nach seinen Dimensionen entwickelt werden müssen wird.

§47 Nach dieser Idee müssen wir die folgenden zwei Fällen unterscheiden, je nachdem ob i eine gerade oder ungerade Zahl war, weil ja im ersten Fall $\sin\varphi = \sin\omega$ wird, in zweiten Fall wird hingegen $\sin\varphi = -\sin\omega$, während in jedem der beiden Fälle gilt

$$\tan\varphi = \tan\omega.$$

Es sei also i zuerst eine ungerade Zahl und im Fall $\varphi = i\pi$ wird unser Bruch sein

$$\frac{1}{\tan\omega + \sin\omega}.$$

Es ist aber näherungsweise

$$\tan\omega = \omega + \frac{1}{3}\omega^3 \quad \text{und} \quad \sin\omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3,$$

woher dieser Bruch werden wird

$$\frac{1}{2\omega + \frac{1}{6}\omega^3} = \frac{1}{2\omega\left(1 + \frac{1}{12}\omega\omega\right)} = \frac{1}{2\omega}\left(1 - \frac{1}{12}\omega\omega\right).$$

Dieser Ausdruck liefert schon von selbst diese zwei Brüche $\frac{1}{2\omega} - \frac{1}{24}\omega$, woher wegen $\omega = \varphi - i\pi$ für diesen Faktor dieser einfache Bruch entspringt

$$\frac{1}{2(\varphi - i\pi)},$$

weil der andere Teil verschwindet. Daher, wenn wir nun anstelle von i der Reihe nach die ungeraden Zahlen schreiben, werden wir die folgende Reihe an Brüchen erlangen

$$\frac{1}{2(\varphi-\pi)}+\frac{1}{2(\varphi+\pi)}+\frac{1}{2(\varphi-3\pi)}+\frac{1}{2(\varphi+3\pi)}+\frac{1}{2(\varphi-5\pi)}+\text{etc.}$$

§48 Es sei nun auch i eine gerade Zahl, woher wird

$$\tan\varphi=\tan\omega \quad \text{und} \quad \sin\varphi=\sin\omega;$$

daher wird unser Bruch sein

$$\frac{1}{\tan\omega-\sin\omega},$$

wo sich nach der Entwicklung die ersten Terme ω aufheben, so dass in diesem Nenner die unterste Potenz von ω von ω^3 sein wird. Und dieses Grundes wegen muss die Approximation weiter fortgeführt werden als im vorhergehenden Fall. Für dieses Ziel wollen wir anstelle von $\tan\omega$ schreiben

$$\frac{\sin\omega}{\cos\omega},$$

dass unser Bruch ist

$$\frac{\cos\omega}{\sin\omega-\sin\omega\cos\omega}.$$

Weil nun gilt

$$\sin\omega\cos\omega=\frac{1}{2}\sin 2\omega,$$

wird durch eine Reihe sein

$$\sin\omega=\omega-\frac{1}{6}\omega^3+\frac{1}{120}\omega^5$$

und

$$\sin 2\omega=2\omega-\frac{8}{6}\omega^3+\frac{32}{120}\omega^5,$$

woher der ganze Nenner sein wird

$$+\frac{1}{2}\omega^3-\frac{1}{8}\omega^5=\frac{1}{2}\omega^3\left(1-\frac{1}{4}\omega\omega\right);$$

der Zähler ist hingegen $\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega\omega$, woher unser ganzer Bruch sein wird

$$\frac{1-\frac{1}{2}\omega\omega}{\frac{1}{4}\omega^3\left(1-\frac{1}{4}\omega\omega\right)} = \frac{1-\frac{1}{4}\omega\omega}{\frac{1}{2}\omega^3};$$

und daher werden die resultierenden Teile sein

$$\frac{2}{\omega^3} - \frac{1}{2\omega},$$

welche beide im Fall $\omega = 0$ unendlich werden. Es wird aber leicht klar, wenn wir die Approximation weiter fortgesetzt hätten, dass im folgenden Term der Buchstabe ω schon in den Zähler übergegangen wäre. Es werde also $\varphi - i\pi$ anstelle von ω geschrieben und die aus diesem Faktor des Nenners herstammenden Teile werden sein

$$\frac{2}{(\varphi-i\pi)^2} - \frac{1}{2(\varphi-i\pi)},$$

woher, indem anstelle von i nacheinander alle geraden Zahlen geschrieben werden, diese zwei Reihen hervorgehen werden

$$\frac{2}{\varphi^3} + \frac{2}{(\varphi-2\pi)^3} + \frac{2}{(\varphi+2\pi)^3} + \frac{2}{(\varphi-4\pi)^3} + \frac{2}{(\varphi+4\pi)^3} + \frac{2}{(\varphi-6\pi)^3} + \text{etc.}$$
$$-\frac{1}{2\varphi} - \frac{1}{2(\varphi-2\pi)} - \frac{1}{2(\varphi+2\pi)} - \frac{1}{2(\varphi-4\pi)} - \frac{1}{2(\varphi+4\pi)} + \text{etc.}$$

§49 Wir wollen also diese aus jedem der beiden Fälle abgeleiteten Reihen verbinden und der vorgelegte Bruch

$$\frac{1}{\tan\varphi - \sin\varphi}$$

wird aufgefunden, in die folgenden drei Reihen aufgelöst werden:

$$\begin{array}{llllll}
\dfrac{1}{2(\varphi-\pi)} + \dfrac{1}{2(\varphi+\pi)} & + \dfrac{1}{2(\varphi-3\pi)} + \dfrac{1}{2(\varphi+3\pi)} + \dfrac{1}{2(\varphi-5\pi)} + \text{etc.,} \\
- \dfrac{1}{2\varphi} & - \dfrac{1}{2(\varphi-2\pi)} - \dfrac{1}{2(\varphi+2\pi)} - \dfrac{1}{2(\varphi-4\pi)} - \dfrac{1}{2(\varphi+4\pi)} - \text{etc.} \\
+ \dfrac{2}{\varphi^3} & + \dfrac{2}{(\varphi-2\pi)^3} + \dfrac{2}{(\varphi+2\pi)^3} + \dfrac{2}{(\varphi-4\pi)^3} + \dfrac{2}{(\varphi+4\pi)^3} + \text{etc.}
\end{array}$$

§50 Jeder wird hier leicht bemerken, dass diese Methode jener nicht um weniges vorauseilt, welche wir zuvor gebraucht haben, weil wir ja auf diese Weise sofort die aus jedem beliebigen Faktor des Nenners herstammenden Brüche erlangt haben und es es nicht notwendig war, deren Zähler mit unbestimmten Buchstaben zu bezeichnen. Zusätzlich war es mit dieser Methode auch nicht nötig, gewissenhaft zu untersuchen, wie oft die einfachen Faktoren im Nenner enthalten waren, weil unsere Methode diese ja von selbst zeigt.

§51 Aber bei allgemeinen Reihen dieser Art, wo die Nenner gewisser Terme in einem bestimmten Fall verschwinden und diese Terme ins Unendliche wachsen, pflegt gefragt zu werden, wie groß die Summe der übrigen Terme nach Beseitigen dieser Terme sein wird. So wird für den Fall, in dem i eine ungerade Zahl ist, der Term

$$\frac{1}{2(\varphi-i\pi)}$$

im Fall $\varphi = i\pi$ unendlich. Nachdem dieser Term gestrichen worden ist, wird also gefragt, wie groß die Summe der übrigen Terme im Fall $\varphi = i\pi$ sein wird. Um diese Frage aufzulösen, werde $\varphi - i\pi = \omega$ gesetzt und aus § 47 tritt es klar zu tage, dass sein wird

$$\frac{1}{2\omega} - \frac{1}{24}\omega = \frac{1}{2(\varphi-i\pi)} + R,$$

wo R alle übrigen Terme umfasst, deren Summe im Fall $\varphi = i\pi$ verlangt wird. Also werde der Term

$$\frac{1}{2(\varphi-i\pi)} = \frac{1}{2\omega}$$

auf die andere Seite gebracht und es wird sich sofort zeigen, dass sein wird

$$R = -\frac{1}{24}\omega = 0 \quad \text{wegen} \quad \omega = 0,$$

so dass nach Weglassen jenes unendlichen Termes diese Summe alle übrigen im Fall $\varphi = i\pi$ immer 0 ist.

§52 Wann immer aber i eine gerade Zahl ist, wird dieselbe Schlussweise Geltung haben, um was zu zeigen, es notwendig ist, die verwendete Approximation weiter fortzusetzen. Dann wird aber der Zähler sein

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega\omega + \frac{1}{24}\omega^4;$$

für den Nenner gilt hingegen

$$\sin\omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5 - \frac{1}{5040}\omega^7$$

und

$$\sin 2\omega = 2\omega - \frac{8}{6}\omega^3 + \frac{32}{120}\omega^5 - \frac{128}{5040}\omega^7,$$

woher der Nenner selbst wird

$$\frac{1}{2}\omega^3 - \frac{1}{8}\omega^5 + \frac{1}{80}\omega^7 = \frac{1}{2}\omega^3\left(1 - \frac{1}{4}\omega\omega + \frac{1}{4}\omega^4\right);$$

daher liefert der zweite Faktor auf den Zähler übertragen

$$1 + \frac{1}{4}\omega\omega + \frac{3}{80}\omega^4$$

und daher wird der ganze Bruch schon sein

$$\frac{1 - \frac{1}{4}\omega\omega - \frac{11}{240}\omega^4}{\frac{1}{2}\omega^3},$$

welcher für $\varphi = i\pi$ gesetzt gleich werden muss, das heißt den gefundenen Termen

$$\frac{2}{(\varphi - i\pi)^3} - \frac{1}{2(\varphi - i\pi)}$$

mit allen übrigen R, woher $R = -\frac{11}{120}\omega = 0$ gefunden wird; daher tritt es klar zu tage, dass auch in diesen Fällen die Summe aller übrigen Terme $= 0$ ist.

§53 Wenn wir daher also $\varphi = 0$ nehmen und die ins Unendliche wachsenden Terme streichen, werden die zurückbleibenden Terme sein

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{6\pi} + \frac{1}{6\pi} - \frac{1}{10\pi} + \frac{1}{10\pi} - \text{etc.}\\
&+\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} - \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{12\pi} - \frac{1}{12\pi} + \text{etc.}\\
&-\frac{2}{8\pi^3} + \frac{2}{8\pi^3} - \frac{2}{64\pi^3} + \frac{2}{64\pi^3} - \frac{2}{216\pi^3} + \frac{2}{216\pi^3} - \text{etc.},
\end{aligned}$$

wo sich alle Terme offenbar aufheben, was auch in allen übrigen Fällen, in denen $\varphi = i\pi$ gesetzt wird, gelingt.

§54 Wenn wir aber je zwei benachbarte zusammengezogen hätten, wären diese Reihen hervorgegangen

$$-\frac{1}{2\varphi} + \frac{\varphi}{\varphi\varphi - \pi\pi} - \frac{\varphi}{\varphi\varphi - 4\pi\pi} + \frac{\varphi}{\varphi\varphi - 9\pi\pi} - \frac{\varphi}{\varphi\varphi - 16\pi\pi} + \frac{\varphi}{\varphi\varphi - 25\pi\pi} - \text{etc.}$$

$$+\frac{2}{\varphi^3} + \frac{4\varphi(\varphi\varphi + 3\cdot 4\pi\pi)}{(\varphi\varphi - 4\pi\pi)^3} + \frac{4\varphi(\varphi\varphi + 3\cdot 16\pi\pi)}{(\varphi\varphi - 16\pi\pi)^3} + \frac{4\varphi(\varphi\varphi + 3\cdot 36\pi\pi)}{(\varphi\varphi - 36\pi\pi)^3} + \text{etc.}$$

die Summe welcher Reihen ja diese ist

$$\frac{1}{\tan\varphi - \sin\varphi}.$$

Wenn wir daher hier nun $\varphi = 0$ oder $\varphi = \omega$, weil ja alle Terme durch $\varphi = 0$ und deren Summe aber als $-\frac{11}{120}\omega$ gefunden worden ist, wenn wir auf beiden Seiten durch ω teilen, wird $= -\frac{11}{120}$ sein; diese Reihen selbst werden aber werden

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} - \frac{1}{9\pi\pi} + \frac{1}{16\pi\pi} - \frac{1}{25\pi\pi} + \text{etc.}\\
&-\frac{3\cdot 4}{(4\pi\pi)^2} - \frac{3\cdot 4}{(16\pi\pi)^2} - \frac{3\cdot 4}{(36\pi\pi)^2} - \frac{3\cdot 4}{(64\pi\pi)^2} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

§55 Nach Verändern der Vorzeichen und Reduzieren der Terme auf die einfachste Form werden wir diese Summation erlangen

$$\begin{aligned}\frac{11}{120} &= \frac{1}{\pi\pi}\left(1-\frac{1}{4}\ +\frac{1}{9}\ -\frac{1}{16}\ +\frac{1}{25}\ -\frac{1}{36}\ +\text{etc.}\right)\\ &= \frac{3}{4\pi^4}\left(1-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}-\frac{1}{36^2}+\text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Es ist aber bekannt, dass gilt

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{12}$$

und

$$1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{36^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{90},$$

woher diese Gleichheit offenbar ins Auge fällt.