Über die bemerkenswerte Zahl, die bei der Summation der natürlichen harmonischen Progression auftaucht

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich einst die Summation der harmonischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{etc}$$

betrachtet hatte, habe ich deren unbestimmte Summe auf folgende Weise ausgedrückt gefunden, dass für

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{x}$$

diese Summe

$$C+\ln x+\frac{1}{2x}-\frac{\mathfrak{A}}{2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}-\frac{\mathfrak{C}}{6x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{8x^8}-\text{etc}$$

ist, wo die Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc die Bernoulli-Zahlen genannt worden sind; natürlich ist

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{6},\quad \mathfrak{B}=\frac{1}{30},\quad \mathfrak{C}=\frac{1}{42},\quad \mathfrak{D}=\frac{1}{30},\quad \mathfrak{E}=\frac{5}{66},\quad \mathfrak{F}=\frac{691}{2730},$$
$$\mathfrak{G}=\frac{7}{6},\quad \mathfrak{H}=\frac{3617}{510},\quad \mathfrak{I}=\frac{43867}{798},\quad \mathfrak{K}=\frac{173511}{330},\quad \mathfrak{L}=\frac{854513}{138}$$
$$\mathfrak{M}=\frac{236364091}{2730},\quad \mathfrak{N}=\frac{8553103}{6},\quad \mathfrak{O}=\frac{23749461029}{870},$$

$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{14322}, \quad \text{etc;}$$

dann aber bezeichnet $\ln x$ den hyperbolischen Logarithmus der Zahl x, aber der Buchstabe C, der durch Integration eingegangen ist, ist eine gewisse bestimmte aus einem speziellen Fall zu bestimmende Zahl, die ich aus dem Fall $x = 10$ gefunden habe

$$C = 0,5772156649015325$$

zu sein, welche Zahl umso bemerkenswerter scheint, weil es mir bisher auf keine Weise möglich gewesen ist, diese auf irgendeine bekannte Größe zurückzuführen.

§2 Wenn also die Zahl x als unendlich groß angenommen wird, dann wird

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} = C + \ln x$$

sein, woher sich vermuten lässt, dass diese Zahl C der hyperbolische Logarithmus einer gewissen bekannten Zahl ist, die wir gleich N setzen wollen, sodass

$$C = \ln N$$

ist und die Summe jener unendlichen Reihe gleich dem Logarithmus der Zahl Nx wird; daher wird es der Mühen Wert sein, den Wert dieser Zahl N zu untersuchen, welchen es freilich genügen wird, auf fünf oder sechs Dezimalstellen bestimmt zu haben, weil ja daher nicht schwer beurteilt werden kann, ob diese Zahl mit einer bekannten Zahl übereinstimmt oder nicht. Damit das also leichter geleistet werden kann, wollen wir eine einfachere Zahl suchen, deren Logarithmus sich wenig von C unterscheidet; eine solche findet man aber mit $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$, deren Logarithmus natürlich gleich $0,58778$ ist, also ein wenig größer als C, woher wir folgern, dass $N < \frac{9}{5}$ sein wird. Wir wollen also $N = \frac{9}{5} - w$ setzen, und weil im Allgemeinen

$$\ln(a - w) = \ln a - \frac{w}{a} - \frac{w^2}{2a^2} - \frac{w^3}{3a^3} - \frac{w^4}{4a^4} - \text{etc}$$

ist, in welchem Fall $a = \frac{9}{5}$ sein wird und daher $\frac{w}{a} = \frac{5w}{9}$, wofür wir z schreiben wollen, dass $w = \frac{9}{5}z$ wird; es wird also

$$\ln\left(\tfrac{9}{5} - w\right) = \ln\left(\tfrac{9}{5}\right) - z - \tfrac{1}{2}zz - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 - \text{etc} = \ln N = C$$

sein. Weil daher $\ln\frac{9}{5} - C = 0,01057$ ist, wird

$$z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \text{etc} = 0,01057$$

sein. Weil daher $z < 0,01057$ ist, wollen wir $z = 0,01000 + y$ nehmen; es wird $zz = 0,0001 + 0,02y$ sein, das reicht für unseren Zweck aus. Nachdem aber diese Werte eingesetzt worden sind, wird

$$0,01005 + 1,01000y = 0,01057$$

hervorgehen; daher folgert man $y = 0,00052$ und daher $z = 0,01052$; daher also $w = 0,01894$, als logische Konsequenz die gesuchte Zahl $N = 1,78106$. Daher geht die ganze Aufgabe dahin über, dass man untersucht, ob vielleicht diese Zahl N mit einer bekannten Größe in einem vorgegeben Verhältnis steht.

§3 Weil ich aber ja jenen Wert des Buchstaben C aus einer Reihe, in der sich keine bestimmte Ordnung erhält, deshalb weil die Bernoulli-Zahlen nach einem höchstgradig merkwürdigen Gesetz fortschreiten, gefolgert habe, wird es nicht unnützlich sein, eine regelmäßige Reihe zu finden, deren Summe der Zahl C gleich sein wird und die auch sehr schnell konvergiert, dass ihr Wert auch daher bestimmt werden kann; das scheint umso mehr notwendig, weil ja die Bernoulli-Zahlen bald derart wachsen, dass sie in eine sehr stark divergierende Reihe übergehen und daher mit Recht Zweifel entstehen kann, ob der gefundene Wert für hinreichend sicher gehalten werden kann oder nicht.

§4 Weil also die vorgelegte Zahl C in der Tat dieser Formel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln x$$

gleich wird, während x eine unendliche Zahl bezeichnet, durchschaut man nicht schwer, dass daher die folgende Reihe aufgestellt werden kann:

$$\begin{aligned} C = 1 &+ \frac{1}{2} - \ln\frac{2}{1} \\ &+ \frac{1}{3} - \ln\frac{3}{2} \\ &+ \frac{1}{4} - \ln\frac{4}{3} \\ &+ \frac{1}{5} - \ln\frac{5}{4} \\ &+ \frac{1}{6} - \ln\frac{6}{5} \\ &+ \frac{1}{7} - \ln\frac{7}{6} \\ &+ \text{etc} \end{aligned}$$

Es ist nämlich klar, dass, nachdem all diese Terme zu einer Summe zusammengefasst worden sind, die Formel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln x$$

selbst hervorgeht. Und so werden wir eine unendliche unserer Zahl C gleiche Reihe haben, deren beliebiger Term im Allgemeinen

$$\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}$$

sein wird, welche Formel quasi der allgemeine Term der gefundenen Reihe sein wird.

§5 Wir wollen also gründlicher diese Formel $\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}$ untersuchen, und weil

$$-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \ln\frac{n-1}{n} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ist, wird durch eine unendliche Reihe

$$-\ln\frac{n}{n-1} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} - \text{etc}$$

sein und daher

$$\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} - \text{etc},$$

woher für das Finden der Zahl C die folgende Reihe entwickelt werden muss

$$\begin{aligned}1 - C = &+ \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots + \text{etc}\\ &+ \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4\cdot 3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots + \text{etc}\\ &+ \frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{4\cdot 4^4} + \frac{1}{5\cdot 4^5} + \cdots + \text{etc}\\ &+ \frac{1}{2\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{4\cdot 5^4} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \cdots + \text{etc}\\ &+ \text{etc}\end{aligned}$$

§6 Es bezeichne für uns der Kürze wegen α die Summe der Reihe der Reziproken der Quadrate

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc}$$

und auf ähnliche Weise β die Summe der Reihe der Reziproken der Kuben, δ die Summe der Reihe der Reziproken der Biquadrate etc, und die numerischen Wert dieser Buchstaben habe ich schon einst (siehe Instit. Calculi Differentialis Seite 456) hinreichend genau angegeben; daher wird also

$$1 - C = \tfrac{1}{2}(\alpha - 1) + \tfrac{1}{3}(\beta - 1) + \tfrac{1}{4}(\gamma - 1) + \tfrac{1}{5}(\delta - 1) + \tfrac{1}{6}(\varepsilon - 1) + \text{etc}$$

sein. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\alpha-1) &= 0,3224670\\
\tfrac{1}{3}(\beta-1) &= 0,0673523\\
\tfrac{1}{4}(\gamma-1) &= 0,0205808\\
\tfrac{1}{5}(\delta-1) &= 0,0073856\\
\tfrac{1}{6}(\varepsilon-1) &= 0,0028905\\
\tfrac{1}{7}(\zeta-1) &= 0,0011928\\
\tfrac{1}{8}(\eta-1) &= 0,0005097\\
\tfrac{1}{9}(\theta-1) &= 0,0002232\\
\tfrac{1}{10}(\iota-1) &= 0,0000995\\
\tfrac{1}{11}(\kappa-1) &= 0,0000449\\
\tfrac{1}{12}(\lambda-1) &= 0,0000205\\
\tfrac{1}{13}(\mu-1) &= 0,0000094\\
\tfrac{1}{14}(\nu-1) &= 0,0000044\\
\tfrac{1}{15}(\xi-1) &= 0,0000020\\
\tfrac{1}{16}(o-1) &= 0,0000010\\
1-C &= 0,4227836
\end{aligned}$$

woher $C = 0,5772164$ hervorginge, welcher Wert aber wegen der folgenden weggelassenen Terme der Reihe auf $0,5772156$ gemindert werden muss, wo man bei der letzten Ziffer nicht einmal um eine Einheit abweicht.

§7 Für das genauere Finden desselben Wertes kann eine um Vieles schneller konvergierende Reihe gefunden werden. Weil nämlich

$$\ln\frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a} + \frac{2}{3a^3} + \frac{2}{5a^5} + \frac{2}{7a^7} + \frac{2}{9a^9} + \text{etc}$$

ist, nehme man wegen

$$\ln\frac{n}{n-1} = \ln\frac{2n}{2n-2}$$

$a = 2n-1$ und es wird

$$\ln\frac{n}{n-1} = \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(2n-1)^5} + \frac{2}{7(2n-1)^7} + \text{etc}$$

sein; wenn davon der Bruch $\frac{1}{n}$ abgezogen wird, wird der allgemeine Term unserer Reihe als

$$\ln\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(2n-1)} + \frac{2}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(2n-1)^5} + \frac{2}{7(2n-1)^7} + \text{etc}$$

hervorgehen. Wenn also anstelle von n nacheinander die Zahlen 2, 3, 4, 5, etc geschrieben werden, wird die folgende Reihe entstehen:

$$\begin{aligned}
1 - C = {} & \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} + \frac{2}{9\cdot 3^9} + \text{etc} \\
& + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \frac{2}{9\cdot 5^9} + \text{etc} \\
& + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \frac{2}{9\cdot 7^9} + \text{etc} \\
& + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \frac{2}{9\cdot 9^9} + \text{etc} \\
& + \text{etc}
\end{aligned}$$

wo die erste Spalte wegen

$$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n}$$

auf diese Reihe

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \text{etc}$$

zurückgeführt wird, deren Summe natürlich $2\ln 2 - 1$ ist; nach Hinüberbringen dieser Summe auf die andere Seite wird nun

$$\begin{aligned}
2 - 2\ln 2 - C = {} & \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} + \frac{2}{9\cdot 3^9} + \text{etc} \\
& + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \frac{2}{9\cdot 5^9} + \text{etc} \\
& + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \frac{2}{9\cdot 7^9} + \text{etc} \\
& + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \frac{2}{9\cdot 9^9} + \text{etc} \\
& + \text{etc}
\end{aligned}$$

werden. Diese Reihe konvergiert so sehr, dass ihre Summe leicht auf viele Stellen mehr gefunden werden könnte als vorher. Hier bemerke man aber, dass die Summe der ersten Reihe $\ln 2 - \frac{2}{3}$ ist; auf ähnliche Weise wird die Summe der zweiten Reihe gleich $\ln\frac{3}{2} - \frac{2}{5}$ sein, die Summe der dritten Reihe aber gleich $\ln\frac{4}{3} - \frac{2}{7}$, die Summe der folgenden Reihe gleich $\ln\frac{5}{4} - \frac{2}{9}$, der dieser folgenden gleich $\ln\frac{6}{5} - \frac{2}{11}$, welche Werte man also getrennt voneinander berechne. Nachdem also diese Werte, die in solchen Tabellen gefunden werden, berechnet wurden, ist übrig, dass die folgenden Reihen zu einer Summe zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
&+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{13^3}+\frac{1}{15^3}+\frac{1}{17^3}+\frac{1}{19^3}+\text{etc}\right)\\
&+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{13^5}+\frac{1}{15^5}+\frac{1}{17^5}+\frac{1}{19^5}+\text{etc}\right)\\
&+\frac{2}{7}\left(\frac{1}{13^7}+\frac{1}{15^7}+\frac{1}{17^7}+\frac{1}{19^7}+\text{etc}\right)\\
&+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{13^9}+\frac{1}{15^9}+\frac{1}{17^9}+\frac{1}{19^9}+\text{etc}\right)\\
&+\text{etc};
\end{aligned}$$

das wird durch Vorschriften, die ich einst über die Summation solcher Reihen gegeben habe, nicht schwer geleistet werden können.

§8 Weil wir ja über den wahren Wert unserer Zahl $C = 0,5772156649015325$ schon auf 16 Dezimalstellen sicher sind, wäre es überflüssig, diese Arbeit erneut auf sich zu nehmen; daher wollen wir andere regulärere Reihen erwägen, deren Summe dieser Zahl gleich wird; Uns zuerst wird freilich die einfachste Reihe, die das leistet, aus der anfänglichen Form

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln x$$

durch diese Auflösung gefolgert:

$$\begin{aligned} C = 1 & - \ln 2 \\ + \frac{1}{2} & - \ln \frac{3}{2} \\ + \frac{1}{3} & - \ln \frac{4}{3} \\ + \frac{1}{4} & - \ln \frac{5}{4} \\ + \cdots & \\ + \frac{1}{n} & - \ln \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Nachdem nämlich bis hin zu $\frac{1}{x}$ spaltenweise summiert wurde, geht die Summe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln(x+1)$$

hervor; weil aber $\ln x$ unendlich angenommen wird, ist $\ln(x+1)$ anzusehen von $\ln x$ nicht abzuweichen.

§9 Weil also durch eine unendliche Reihe

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \text{etc}$$

ist, wird der allgemeine Term jener Reihe gleich

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \text{etc}$$

sein, woher unsere Zahl C durch die folgende Reihe ausgedrückt werden wird:

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{2 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 1^3} + \frac{1}{4 \cdot 1^4} - \frac{1}{5 \cdot 1^5} + \text{etc} \\ & + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \text{etc} \\ & + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \text{etc} \\ & + \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{4 \cdot 4^4} - \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \text{etc} \\ & + \frac{1}{2 \cdot 5^2} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{4 \cdot 5^4} - \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \text{etc} \\ & + \text{etc} \end{aligned}$$

§10 Wenn wir also wie oben die Buchstaben α, β, γ, δ, etc als Summe der Reihen der Reziproken der Quadrate, der Kuben, der Biquadrate und der weiteren Potenzen benennen, wird durch diese unsere Zahl C so ausgedrückt werden:

$$C = \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{4}\gamma - \tfrac{1}{5}\delta + \tfrac{1}{6}\varepsilon - \tfrac{1}{7}\zeta + \text{etc.}$$

Oben aber haben wir schon diese Reihe, die dieselben Buchstaben involviert gefunden,

$$1 - C = \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{3}(\beta - 1) + \frac{1}{4}(\gamma - 1) + \frac{1}{5}(\delta - 1) + \text{etc;}$$

diese beiden Reihen sind umso bemerkenswerter, weil sie auf verschiedene Weise durch dieselben Buchstaben α, β, γ, δ, etc den Wert von C ausdrücken.

§11 Daher können auf verschiedene Arten diese zwei Reihen miteinander kombiniert werden, woher sich jede Aufmerksamkeit werte Schlussfolgerungen berechnen lassen werden. Und zuerst werden jene Reihen zueinander addiert die Summation ergeben

$$1 = \alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \quad + \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}, \quad + \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{8} - \frac{1}{9}, \quad + \text{etc,}$$

wo nur die Summen der geraden Potenzen auftauchen, die, wie ich gefunden habe, durch die Potenzen der Peripherie des Kreises – π – ausgedrückt werden können, weil

$$\alpha = \frac{\pi^2}{6}, \quad \gamma = \frac{\pi^4}{90}, \quad \varepsilon = \frac{\pi^6}{945}, \quad \eta = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \iota = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \text{etc}$$

ist. Weil daher die Summe dieser völlig einzigartigen Reihe gleich 1 ist, wird es der Mühen Wert sein, zumindest die ersten Terme durch Dezimalbrüche zu entwickeln. Es wird daher

$$\begin{aligned}
\alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} &= 0,8116007335 \\
\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} &= 0,0911616169 \\
\frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} &= 0,0295905445 \\
\frac{1}{4}\eta - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} &= 0,0149082279 \\
\frac{1}{5}\iota - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} &= 0,0092898241
\end{aligned}$$

sein, die Summe welcher 5 Terme schon gleich

$$0,9565509469$$

ist, sodass die Summe aller übrigen

$$0,0434490531$$

ergeben muss.

§12 Diese Summation ist umso bemerkenswerter, weil noch keine Reihen solcher Art in der Analysis betrachtet worden sind. Hier ist es aber natürlich nötig zu bemerken, dass die Terme dieser Reihe so aufgeteilt werden müssen, wie sie aus der Kombination der beiden vorhergehenden Reihen entstanden sind, sodass die einzelnen Terme aus drei Teilen bestehen. Wenn nämlich eines Beispiels wegen wir alle negativen Anteile auf die linke Seite hinüberbringen wollen, würde nämlich diese Gleichung hervorgehen:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{etc}=\alpha+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{4}\eta+\frac{1}{5}\iota+\text{etc},$$

woher sich natürlich nichts erkennen ließe, deshalb weil man auf jedem der beiden Seiten unendliche Größen hätte; weil ja dort die ersten Terme der Reihen α, γ, ε, etc Einheiten sind, entsteht aus diesen allein für die rechte Seite diese Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc},$$

welche Reihe selbst auf der linken gefunden wird. Aber trotzdem folgt daher nicht, dass die übrigen Terme des rechten Glieds gleich 0 sein werden, weil ja natürlich die auf der linken Seite gesetzte Reihe doppelt so viele Terme enthält, wie auf der rechten auftauchen.

§13 Nun wollen wir auch die beiden für C und $1-C$ oben in §10 ausgelegten Reihen voneinander abziehen und es wird die folgende nicht weniger bemerkenswerte Reihe hervorgehen

$$2C-1=+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\beta,\ \ +\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta,\ \ +\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}\zeta,\ \ +\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\theta,\ \ +\text{etc},$$

wo nur die Summen der ungeraden Potenzen auftauchen. Wir wissen aber, dass

$$2C-1=0,1544313298$$

ist. Wir wollen also sehen, welche numerischen Werte aus den ersten 5 Termen entstehen, und weil

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\beta &= 0,0319620646\\
\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta &= 0,0352288979\\
\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}\zeta &= 0,0214240160\\
\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\theta &= 0,0134425794\\
\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{2}{11}\kappa &= 0,0090010566
\end{aligned}$$

ist, ist, weil ja die Summe dieser 5 Terme nur $0,1110586145$ ist, diese Reihe keineswegs als geeignet anzusehen, um den wahren Wert von C zu erforschen, wenn dieser unbekannt wäre.

§14 Auf diese Weise wollen wir auch den in §7 gefundenen Ausdruck entwickeln, der nach den Spalten auf diese Weise dargestellt werde:

$$\begin{aligned}
2-2\ln 2-C = &\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{11^3}+\text{etc}\right)\\
&+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\frac{1}{11^5}+\text{etc}\right)\\
&+\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}+\frac{1}{11^7}+\text{etc}\right)\\
&+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{7^9}+\frac{1}{9^9}+\frac{1}{11^9}+\text{etc}\right)\\
&+\text{etc};
\end{aligned}$$

weil dort nur die ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen auftauchen, drücke man diese Reihen durch die oben angenommenen Buchstaben β, δ, ζ,

θ, etc aus, weil wir ja wissen, dass

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\text{etc} &= \frac{7}{8}\beta \\
1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\text{etc} &= \frac{31}{32}\delta \\
1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}+\text{etc} &= \frac{127}{128}\zeta \\
1+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{7^9}+\frac{1}{9^9}+\text{etc} &= \frac{511}{512}\theta \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

ist. Nachdem also diese Werte eingesetzt wurden, werden wir diese Reihe haben

$$2-2\ln 2-C=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\beta-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{31}{32}\delta-\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\cdot\frac{127}{128}\zeta-\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{511}{512}\theta-\frac{2}{9}+\text{etc.}$$

Gerade zuvor haben wir aber gefunden, dass

$$2C-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\beta,\quad +\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta,\quad +\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}\zeta,\quad +\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\theta,\quad +\text{etc}$$

ist, welche Reihe zu der gerade gefundenen addiert

$$1-2\ln 2+C=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3\cdot 2^3}\beta+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{2}{5\cdot 2^5}\delta+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{2}{7\cdot 2^7}+\text{etc}$$

liefert, wo die absoluten Brüche die Reihe

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\text{etc;}$$

bilden; weil die Summe davon endlich und gleich $1-\ln 2$ ist, lässt sich an ihrer Stelle sicher dieser Wert schreiben und man wird zur folgenden Summation gelangen

$$\ln 2-C=\frac{1}{3\cdot 2^2}\beta+\frac{1}{5\cdot 2^4}\delta+\frac{1}{7\cdot 2^6}\zeta+\frac{1}{9\cdot 2^8}\theta+\text{etc,}$$

welche Reihe so sehr konvergiert, dass aus ihr nicht schwer der Wert unserer Zahl C gefunden werden kann.

§15 Es wird also der Mühen Wert sein, diese Reihe sorgfältiger zu entwickeln; damit das sorgfältiger geschehen kann, weil alle Buchstaben β, δ, ζ, θ etc die Einheit enthalten, liefern die Einheiten getrennt genommen diese Reihe

$$\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}+\frac{1}{7\cdot 2^6}+\frac{1}{9\cdot 2^8}+\text{etc},$$

deren Summe $\ln 3-1$ ist, nach Einführung welches Wertes hier

$$1-\ln\frac{3}{2}-C=\frac{1}{3\cdot 2^2}(\beta-1)+\frac{1}{5\cdot 2^4}(\delta-1)+\frac{1}{7\cdot 2^6}(\zeta-1)+\frac{1}{9\cdot 2^8}(\theta-1)+\text{etc}$$

sein wird. Hier ist für die linke Seite

$$1-\ln\frac{3}{2}=0,5945348918918356,$$

für die rechte Seite aber findet man die folgenden Werte der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3\cdot 4}(\beta-1)&=0,0168380752632995\\
\frac{1}{5\cdot 4^2}(\delta-1)&=0,0004615969392921\\
\frac{1}{7\cdot 4^3}(\zeta-1)&=0,0000186367798704\\
\frac{1}{9\cdot 4^4}(\theta-1)&=0,0000008716982752\\
\frac{1}{11\cdot 4^5}(\kappa-1)&=0,0000000438732781\\
\frac{1}{13\cdot 4^6}(\mu-1)&=0,0000000023045626\\
\frac{1}{15\cdot 4^7}(\xi-1)&=0,0000000001244639\\
\frac{1}{17\cdot 4^8}(\pi-1)&=0,0000000000068550\\
\frac{1}{19\cdot 4^9}(\sigma-1)&=0,0000000000003831\\
\text{für die übrigen}&=0,0000000000000230\\
\text{Summe}&=0,0173192269903029\\
1-\ln\frac{3}{2}&=0,5945348918918356\\
C&=0,5772156649015327
\end{aligned}$$

welcher Wert, wegen der sehr kleinen nicht zu vermeidenden Fehler als mit dem einst gefundenen übereinstimmend anzusehen ist.

§16 Außer diesen Reihen aber, welche wir für die Bestimmung der Zahl C bisher gegeben haben, lassen sich unzählige andere finden. Weil nämlich im Allgemeinen

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{x+p} - \ln(x+q)$$

gesetzt werden kann, weil die Zahl x unendlich groß angenommen werden muss, wird immer derselbe Wert daher resultieren, welche Zahlen auch immer anstelle von p und q, sie seien lediglich endlich, angenommen werden. Wenn wir also gleich der Kürze wegen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p} = \Pi$$

setzen, wird

$$C = \Pi + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{2+p} + \frac{1}{3+p} + \cdots + \frac{1}{x+p} - \ln(x+q)$$

sein. Diese Form kann aber gleich in die folgende Reihe aufgelöst werden

$$\begin{aligned} \Pi - \ln q + \frac{1}{1+p} &- \ln\frac{q+1}{q} \\ + \frac{1}{2+p} &- \ln\frac{q+2}{q+1} \\ + \frac{1}{3+p} &- \ln\frac{q+3}{q+2} \\ \cdots \\ + \frac{1}{n+p} &- \ln\frac{q+n}{q+n-1} \end{aligned}$$

woher sich also unzählige verschiedene unendliche Reihen beschaffen lassen, deren Summen alle dieselbe ist, nämlich gleich C.

§17 Damit aber diese Reihe stärker konvergiert, sollte eine solche Relation zwischen p und q angenommen werden, dass, wann immer $\ln\frac{q+n}{q+n-1}$ in eine Reihe aufgelöst wird, ihr Term gleich $\frac{1}{n+p}$ selbst wird. Man hat aber hauptsächlich drei Möglichkeiten, diesen Logarithmus in eine Reihe zu verwandeln; die erste entspringt aus der allgemeinen Reihe

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \text{etc},$$

wo für

$$1 + z = \frac{q+n}{q+n-1}$$

der Ausdruck

$$z = \frac{1}{q+n-1}$$

wird; in diesem Fall sollte also $p = q - 1$ genommen werden. Wenn wir aber diese Auflösung benutzen wollen

$$\ln \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \text{etc},$$

wird für

$$\frac{1}{1-z} = \frac{q+n}{q+n-1}$$

gesetzt

$$z = \frac{1}{q+n},$$

in welchem Fall also $p = q$ genommen werden muss. Die dritte Art wird aber aus dieser Auflösung

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \frac{2}{7}z^7 + \text{etc}$$

ausgesucht; es wird also für

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{q+n}{q+n-1}$$

gesetzt

$$z = \frac{1}{2(q+n)-1}$$

sein, in welchem Fall also $p = q - \frac{1}{2}$ genommen werden muss. In diesem Fall also, dass p eine ganze Zahl wird, muss für q ein Bruch der Form $m + \frac{1}{2}$ angenommen werden; dann wird nämlich $p = m$ werden. Aber wenn q eine ganze Zahl war, wird p jedenfalls als Bruch gleich $q - \frac{1}{2}$ sein; weil aber der Wert von Π in diesem Fall nicht klar ist, muss vor allem dieser untersucht werden.

§18 Zu diesem Ziel wollen wir die folgende Reihe mit ihren Indizes betrachten

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1, & 1+\tfrac{1}{2}, & 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, & 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, & 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}, \quad \text{etc} \end{array}$$

wo dem allgemeinen Index n der Term

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

entsprechen wird; wenn dieser gleich N genannt wird, werden die folgenden Terme, die den Indizes $n+1$, $n+2$, $n+3$ entsprechen, diese sein

$$N+\frac{1}{n+1}, \quad N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}, \quad N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3},$$

wo also keine Schwierigkeit auftaucht, sooft n eine ganze Zahl war. Wir wollen daher setzen, dass dem Index $\frac{1}{2}$ der Term z entspricht, auf dessen Fund ja die gegenwärtige Angelegenheit zurückgeführt wird; wenn diese gefunden worden ist, werden die folgenden Terme auf diese Weise fortschreiten:

$$\begin{array}{cccc} \tfrac{1}{2}, & 1+\tfrac{1}{2}, & 2+\tfrac{1}{2}, & 3+\tfrac{1}{2} \\ z, & z+\tfrac{2}{3}, & z+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}, & z+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{7} \end{array}$$

und so wird im Allgemeinen dem Index $n+\frac{1}{2}$ der Term

$$z+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n+1}$$

entsprechen. Wenn daher die Zahl n unendlich groß genommen wird, in welchem Fall die Terme, die den Indizes n und $n+1$ entsprechen, sich nicht weiter voneinander unterscheiden, muss diesen auch der Mittelterm, der dem Index $n+\frac{1}{2}$ entspricht, gleich werden und aus diesem Prinzip erzeugt man die folgende Gleichung

$$z+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{2n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n},$$

wo auf jeder der beiden Seiten die Anzahl der Terme dieselbe ist; daher wird, nachdem die einzelnen Terme von der linken auf die rechte Seite gebracht worden sind und entsprechend interpoliert wurden,

$$z=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{2}{9}+\frac{1}{5}-\frac{2}{11}+\text{etc}$$

hervorgehen und so wird der Wert von z durch diese unendliche Reihe ausgedrückt werden, aus welcher, weil

$$\frac{1}{2}z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc}$$

ist, natürlich

$$\frac{1}{2}z = 1 - \ln 2 \quad \text{und daher} \quad z = 2 - 2\ln 2$$

sein wird.

§19 Wenn daher also p ein Bruch der Form $n + \frac{1}{2}$ war, werden sich die entsprechenden Werte des Buchstaben Π auf folgende Weise verhalten:

p	Π
$\frac{1}{2}$	$2 - 2\ln 2$
$1 + \frac{1}{2}$	$2 - 2\ln 2 + \frac{2}{3}$
$2 + \frac{1}{2}$	$2 - 2\ln 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$
$3 + \frac{1}{2}$	$2 - 2\ln 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}$
etc	etc
$m + \frac{1}{2}$	$2 - 2\ln 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \cdots + \frac{2}{2m+1}$

§20 Wir wollen die zweite Auflösung der Logarithmen benutzen, wo $p = q$ war und

$$\ln \frac{n+q}{n+q-1} = \frac{1}{n+q} + \frac{1}{2(n+q)^2} + \frac{1}{3(n+q)^3} + \frac{1}{4(n+q)^4} + \text{etc},$$

woher wir für unsere Zahl C diese Reihe erhalten

$$\begin{aligned} \Pi - \ln q & - \frac{1}{2(q+1)^2} - \frac{1}{3(q+1)^3} - \frac{1}{4(q+1)^4} - \frac{1}{5(q+1)^5} - \text{etc} \\ & - \frac{1}{2(q+2)^2} - \frac{1}{3(q+2)^3} - \frac{1}{4(q+2)^4} - \frac{1}{5(q+2)^5} - \text{etc} \\ & - \frac{1}{2(q+3)^2} - \frac{1}{3(q+3)^3} - \frac{1}{4(q+3)^4} - \frac{1}{5(q+3)^5} - \text{etc} \\ & - \text{etc} \end{aligned}$$

wo

$$\Pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{q}$$

ist, woher klar ist, dass je größer die Zahl q angenommen wird, diese Reihe umso stärker konvergieren wird.

§21 Wenn irgendjemand aber den Wert unserer Konstante C genauer bestimmen wollte, wird es nicht einmal nötig sein Logarithmen, die in den einzelnen Terme auftauchen, in Reihen aufzulösen. Ja es ist sogar nicht nötig, eine bestimmte Relation zwischen den beiden Zahlen p und q festzusetzen, sondern es werden sich beide nach Belieben annehmen lassen, sodass, obwohl der Wert des ersten Gliedes $\Pi - \ln q$ zugänglich war, während

$$\Pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p}$$

wird, die ganze Aufgabe auf die Summation dieser unendlichen Reihe

$$\left(\frac{1}{p+1} - \ln\frac{q+1}{q}\right) + \left(\frac{1}{p+2} - \ln\frac{q+2}{q+1}\right) + \left(\frac{1}{p+3} - \ln\frac{q+3}{q+2}\right) + \text{etc}$$

zurückgeführt wird, an deren Stelle wir diese allgemeine zu summierende Reihe

$$S = X + X' + X'' + X''' + X'''' + \text{etc}$$

betrachten wollen, wo X eine gewisse Funktion von x war, die folgenden Terme aber entstehen mögen, wenn anstelle von x nacheinander die Werte $x+1$, $x+2$, $x+3$, etc geschrieben werden; für dieses Ziel schreibe man x anstelle des Buchstaben q und weil die Differenz zwischen p und q gegeben ist, setze man $p = x + a - 1$, sodass

$$X = \frac{1}{x+a} - \ln\frac{x+1}{x} \quad \text{und} \quad X' = \frac{1}{x+a+1} - \ln\frac{x+2}{x+1}$$

ist und so weiter. Und so wird, nachdem für x eine gewisse Zahl genommen wurde, der Wert unserer Zahl C

$$C = \Pi - \ln q + S$$

sein oder

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x+a-1} - \ln x + S,$$

wobei Zahlen x und a unserem Belieben überlassen sind; weil nichts im Wege steht, wird sich in der folgenden Entwicklung die Zahl x wie eine Variable behandeln lassen.

§22 Nun wollen wir also $x+1$ anstelle von x schreiben und der Wert von S geht dann über in S', sodass

$$S' = X' + X'' + X''' + \text{etc}$$

ist, und es wird $S' - S = -X$ sein. Aber weil S eine gewisse Funktion von x ist, wird durch die altbekannte Reduktion

$$S' = S + \frac{dS}{dx} + \frac{ddS}{1 \cdot 2\, dx^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} + \text{etc}$$

sein, woher diese Gleichung entsteht

$$X + \frac{dS}{dx} + \frac{ddS}{1 \cdot 2d\, x^2} + \frac{d^3S}{1\dot{2} \cdot 3\, dx^3} + \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dx^4} + \text{etc} = 0,$$

aus deren beiden ersten Gliedern, wenn wir annehmen, dass die folgenden ununterbrochen wachsen, man folgert, dass beinahe

$$dS = -Xdx$$

sein wird und daher

$$S = -\int Xdx,$$

welches Integral so genommen werden muss, dass wenn $x = \infty$ wäre, $S = 0$ werden würde, weil ja für $x = \infty$ genommen natürlich $C = \Pi - \ln q$ sein wird.

§23 Es wird also $-\int Xdx$ der erste Term der neuen Reihe, durch welche uns vorgelegt ist, den Buchstaben S auszudrücken, sein und aus der Form der Gleichung sieht man leicht ein, dass

$$S = -\int Xdx + \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{ddX}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon\frac{d^4X}{dx^4} + \text{etc}$$

gesetzt werden muss, woher

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} &= -X + \alpha\frac{dX}{dx} + \beta\frac{ddX}{dx^2} + \gamma\frac{d^3X}{dx^3} + \delta\frac{d^4X}{dx^4} + \text{etc}\\
\frac{ddS}{dx^2} &= -\frac{dX}{dx} + \alpha\frac{ddX}{dx^2} + \beta\frac{d^3X}{dx^3} + \gamma\frac{d^4X}{dx^4} + \delta\frac{d^5X}{dx^5} + \text{etc}\\
\frac{d^3S}{dx^3} &= -\frac{ddX}{dx^2} + \alpha\frac{d^3X}{dx^3} + \beta\frac{d^4X}{dx^4} + \gamma\frac{d^5X}{dx^5} + \delta\frac{d^6X}{dx^6} + \text{etc}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

wird, nach Einsetzen welcher Werte und entsprechender Anordnung dieser man folgende Gleichung erhalten wird:

$$\begin{aligned}
0 = & X + \alpha\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \beta\frac{\mathrm{dd}X}{\mathrm{d}x^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} + \delta\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc}\\
& - X - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{dd}X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\beta}{2}\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\gamma}{2}\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc}\\
& - \frac{1}{6}\frac{\mathrm{dd}X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\alpha}{6}\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\beta}{6}\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc}\\
& - \frac{1}{24}\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\alpha}{24}\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc}\\
& - \frac{1}{120}\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc}
\end{aligned}$$

woher die folgenden Bestimmungen entstehen

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{24}, \quad \delta = -\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{6}\beta - \frac{1}{24}\alpha + \frac{1}{120}, \quad \text{etc}$$

und daher

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{12}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = \frac{1}{720}, \quad \text{etc}$$

§24 Auf diese Weise aber wird die Bestimmung der Buchstaben α, β, γ, δ, etc zu lästig; woher wir, damit wir uns die Arbeit erleichtern, die folgende Reihe betrachten wollen, wo dieselben Koeffizienten auftauchen, und man schreibe die Ableitungen auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
v &= -1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + etc\\
\frac{1}{2}vz &= -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\alpha z^2 + \frac{1}{2}\beta z^3 + \frac{1}{2}\gamma z^4 + \frac{1}{2}\delta z^5 + \text{etc}\\
\frac{1}{6}vz^2 &= -\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}\alpha z^3 + \frac{1}{6}\beta z^4 + \frac{1}{24}\beta z^5 + \text{etc}\\
\frac{1}{24}vz^3 &= -\frac{1}{24}z^3 + \frac{1}{24}\alpha z^4 + \frac{1}{6}\gamma z^5 + \text{etc}\\
\frac{1}{120}vz^4 &= -\frac{1}{120}z^4 + \frac{1}{120}\alpha z^5 + \text{etc}
\end{aligned}$$

Nachdem also diese Reihen zu einer einzigen Summe zusammengefasst wurden, wird wegen

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0, \quad \beta + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6} = 0, \quad \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{24} = 0, \quad \text{etc}$$

$$v\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{24}z^3+\frac{1}{120}z^4+\frac{1}{720}z^5+\text{etc}\right)=-1$$

entstehen. Weil also

$$e^z=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\text{etc}$$

ist, ist klar, dass die Größe u mit

$$\frac{e^z-1}{z}$$

multipliziert wird, sodass

$$v\cdot\frac{e^z-1}{z}=-1$$

ist, woher

$$v=\frac{-z}{e^z-1}$$

wird; und so ist nur nötig, dass daher der Wert von v in eine Reihe aufgelöst wird, die ja mit der angenommenen Reihe übereinstimmen muss, und so werden sich die Werte der Buchstaben α, β, γ, etc von selbst sichtbar machen.

§25 Damit wir also daher den Wert von v gut in eine Reihe verwandeln, wollen wir, weil jene Gleichung uns

$$e^z=\frac{v-z}{v}$$

liefert, $v=u+\frac{1}{2}z$ setzen, dass

$$e^z=\frac{u-\frac{1}{2}z}{u+\frac{1}{2}z}=\frac{2u-z}{2u+z}$$

hervorgeht; daher wird

$$z=\ln(2u-z)-\ln(2u+z)$$

sein und durch Differenzieren

$$\mathrm{d}z=\frac{4(z\mathrm{d}u-u\mathrm{d}z)}{4uu-zz},$$

welche Formel also andererseits so integriert werden muss, dass für $z = 0$ gesetzt $u = 1$ wird. Man setze nun $u = sz$ und für $z = 0$ genommen wird $s = \infty$ werden; dann aber wird

$$\mathrm{d}z = \frac{4\mathrm{d}s}{4ss - 1}$$

sein, aus welcher Gleichung schon eine Reihe solcher Art für s gesucht werden muss, dass für $z = 0$ genommen $s = \infty$ wird.

§26 Weil wir also daher

$$4ss - 1 = \frac{4\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}$$

haben, wollen wir für s diese Reihe ansetzen

$$2s = \frac{A}{z} + Bz + Cz^3 + Dz^5 + Ez^7 + \text{etc},$$

woher

$$\frac{2\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = -\frac{A}{zz} + B + 3Czz + 5Dz^4 + 7Ez^6 + \text{etc}$$

wird, dann aber

$$\begin{aligned} 4ss = \frac{AA}{zz} + 2AB + 2ACzz &+ 2ADz^4 + 2ARz^6 + \text{etc} \\ BBzz &+ 2BCz^4 + 2BDz^6 + \text{etc} \\ &+ CCz^6 + \text{etc} \end{aligned}$$

nach Einsetzen welcher Reihen die Gleichung

$$4ss - 1 - \frac{4\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = 0$$

diesen Ausdruck liefert

$$\begin{aligned} 0 = 2A\tfrac{1}{zz} &+ 2B - 6Czz - 10Dz^4 - 14Ez^6 - 18Fz^8 - \text{etc} \\ +AA\tfrac{1}{zz} &+ 2AB + 2ACzz + 2ADz^4 + 2AEz^6 + 2AFz^8 + \text{etc} \\ &- 1 + BBzz + 2BCz^4 + 2BDz^6 + 2BEz^8 + \text{etc} \\ &+ CCz^6 + 2CDz^8 + \text{etc} \end{aligned}$$

Daher also wird aus den ersten Termen $A = -2$; aus den folgenden schließt man weiter:

$$\begin{aligned}
2B &= 2AB - 1\\
6C &= 2AC + BB\\
10D &= 2AD + 2BC\\
14E &= 2AE + 2BD + CC\\
18F &= 2AF + 2BE + 2CD\\
22G &= 2AG + 2BF + 2CE + DD\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

§27 Weil also $A = -2$ ist, wird man die folgenden Bestimmungen erhalten

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{1}{6}, & E &= \frac{2BD + CC}{18}\\
C &= \frac{BB}{10}, & F &= \frac{2BE + 2CD}{22}\\
D &= \frac{2BC}{14}, & G &= \frac{2BF + 2CE + DD}{26}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

Damit wir also diese Gleichungen leichter angeben, wollen wir

$$B = 2\mathfrak{A}, \quad C = 2\mathfrak{B}, \quad D = 2\mathfrak{C}, \quad E = 2\mathfrak{D}, \quad \text{etc}$$

setzen; dann werden nämlich die gefundenen Bestimmungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= -\frac{1}{12}, & \mathfrak{E} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{11}\\
\mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{5} & \mathfrak{F} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{13}\\
\mathfrak{C} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{7} & \mathfrak{G} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{15}\\
\mathfrak{D} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{9} & \mathfrak{H} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{G} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{D}}{17}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

geben, welche Werte sich um Vieles leichter bestimmen lassen als die oberen α, β, γ, δ, etc.

§28 Nachdem aber die Werte dieser Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc gefunden wurden, wird zuerst

$$s = -\tfrac{1}{z} + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^3 + \mathfrak{C}z^5 + \mathfrak{D}z^7 + \mathfrak{E}z^9 + \text{etc}$$

sein, dann aber wird daher $u = sz$ sein und $v = u + \frac{1}{2}z$, woher wir für v diese Reihe erhalten haben:

$$v = -1 + \tfrac{1}{2}z + \mathfrak{A}z^2 + \mathfrak{B}z^4 + \mathfrak{C}z^6 + \mathfrak{D}z^8 + \text{etc},$$

wo man durchschaut, dass alle ungeraden Potenzen von z außer der ersten hier fehlen. Weil wir also

$$v = -1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \zeta z^6 + \text{etc}$$

gesetzt haben, ist nach der Anstellung eines Vergleiches klar, dass

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \mathfrak{A}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = \mathfrak{B}, \quad \varepsilon = 0, \quad \zeta = \mathfrak{C}, \quad \eta = 0, \quad \text{etc}$$

sein wird. Nachdem also diese Werte eingeführt wurden, wird die allgemeine oben untersuchte Summe S

$$S = -\int X dx + \frac{1}{2}X + \mathfrak{A}\frac{dX}{dx} + \mathfrak{B}\frac{d^3X}{dx^3} + \mathfrak{C}\frac{d^5X}{dx^5} + \mathfrak{D}\frac{d^7X}{dx^7} + \text{etc}$$

werden.

§29 Weil ja hier der negative Wert von $\mathfrak{A}$ gleich $-\frac{1}{12}$ ist, der folgende Buchstabe $\mathfrak{B}$ aber positiv wird, der darauf folgende $\mathfrak{C}$ wiederum negativ und so der Reihe nach abwechselnd, wollen wir, dass wir sofort das Verhältnis dieser Bedingung haben und zugleich diese Zahlen auf die, die man pflegt Bernoulli-Zahlen zu nennen, zurückführen

$$2s = -\tfrac{2}{z} - Az + Bz^3 - Cz^5 + Dz^7 - Ez^9 + \text{etc}$$

setzen, und, nachdem die Entwicklung ausgeführt wurde, findet man

$$A = \frac{1}{6}, \qquad E = \frac{2AD + 2BC}{22}$$

$$B = \frac{AA}{10}, \qquad F = \frac{2AE + 2BD + CC}{26}$$

$$C = \frac{2AC}{14}, \qquad G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{30}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{18}, \qquad \text{etc;}$$

dann wird aber

$$v = -1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}Azz + \frac{1}{2}Bz^4 - \frac{1}{2}Cz^6 + \frac{1}{2}Dz^8 - \text{etc}$$

sein; wenn diese Reihe mit der angenommenen vergleichen wird, wird

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}A, \quad \gamma = 0, \quad \delta = \frac{1}{2}B, \quad \varepsilon = 0, \quad \zeta = -\frac{1}{2}C, \quad \eta = 0, \quad \text{etc}$$

werden. Nachdem also die diese Buchstaben A, B, C, D eingeführt wurden, wird die allgemeine Summe

$$S = -\int X\mathrm{d}x + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}A\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}B\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} - \frac{1}{2}C\frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}x^5} + \text{etc}$$

sein. Wenn wir weiter $A = 2\mathfrak{A}$, $B = 2\mathfrak{B}$, $C = 2\mathfrak{C}$ etc setzen, werden sich die Relationen zwischen diesen Buchstaben so verhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{12}, & \mathfrak{E} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{11} \\ \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{5} & \mathfrak{F} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{13} \\ \mathfrak{C} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{7} & \mathfrak{G} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{15} \\ \mathfrak{D} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{9} & & \text{etc;} \end{aligned}$$

dann aber wird

$$S = -\int X\mathrm{d}x + \frac{1}{2}X - \mathfrak{A}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \mathfrak{B}\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x} - \mathfrak{C}\frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}x^5} + \text{etc}$$

sein. Aus diesen Formeln sieht man gleich ein, dass die Zahlen mit jenen verbunden sind, die in die geraden Reziproken eingehen; es wird nämlich

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{90}, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{945}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{9450}, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{93555}, \quad \text{etc}$$

sein, welche Zahlen ich schon einst bis hin zur 26. Potenz entwickelt angegeben habe.

§30 Daher wollen wir also für unsere Angelegenheit das folgende allgemeine Theorem propositionieren:

THEOREM

Wenn eine ins Unendliche laufende Reihe vorgelegt war,

$$S = X + X' + X'' + X''' + X'''' + \text{etc},$$

dann wird ihre Summe auf folgende Weise ausgedrückt werden

$$S = -\int X \mathrm{d}x + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2 \cdot 6}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2^3 \cdot 90}\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} - \frac{1}{2^5 \cdot 945}\frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}x^5}$$
$$+ \frac{1}{2^7 \cdot 9450}\frac{\mathrm{d}^7X}{\mathrm{d}x^7} - \frac{1}{2^9 \cdot 93555}\frac{\mathrm{d}^9X}{\mathrm{d}x^9} + \text{etc},$$

wo sich die folgenden Koeffizienten aus meiner "Einleitung in die Analysis des Unendlichen" (Seite 131) entnehmen lassen. Hier aber bemerke man, dass das Integral $\int X\mathrm{d}x$ so genommen werden muss, dass es für $x = \infty$ gesetzt verschwindet.

ANWENDUNG AUF UNSEREN FALL, IN DEM $X = \frac{1}{x+a} - \ln\frac{x+1}{x}$ IST

Weil also

$$X = \frac{1}{x+a} + \ln x - \ln(x+1)$$

ist, wird zuerst für unsere Integralformel

$$\int X\mathrm{d}x = \ln(x+a) + x\ln x - (x+1)\ln(x+1) + C$$

sein; weil ja diese Konstante C so genommen werden muss, dass das Integral für $x = \infty$ gesetzt verschwindet, wird dieses Integral in diese Form gebracht

$$\int X\mathrm{d}x = -x\ln\frac{x+1}{x} + \ln\frac{x+a}{x+1} + C,$$

welcher Ausdruck für $x = \infty$ gesetzt

$$\int X\mathrm{d}x = -\infty \cdot \ln\frac{\infty+1}{\infty} + \ln 1 + C = 0$$

wird, wo, weil

$$\ln\frac{\infty+1}{\infty} = \ln\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{2\cdot\infty^2} + \frac{1}{3\cdot\infty^3} - \text{etc}$$

ist,

$$\infty \cdot \ln \frac{\infty + 1}{\infty} = 1$$

sein wird und daher das Integral $C - 1 = 0$, also die Konstante $C = 1$; deswegen ist das erste Glied unseres Ausdrucks

$$\int X \mathrm{d}x = -x \ln \frac{x+1}{x} + \ln \frac{x+a}{x+1} + 1,$$

woher wir für die beiden ersten Glieder gleich

$$-\int X \mathrm{d}x + \frac{1}{2}X = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{x+1}{x} - \ln \frac{x+a}{x+1} + \frac{1}{2(x+a)} - 1$$

erhalten.

§32 Die übrigen Glieder unseres Ausdrucks bereiten keine Schwierigkeit, weil man ja durch ununterbrochene Differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\
\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} &= 1 \cdot 2 \left(-\frac{3}{(x+a)^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}x^5} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \left(-\frac{5}{(x+a)^6} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^7X}{\mathrm{d}x^7} &= 1 \cdot 2 \cdots 6 \left(-\frac{7}{(x+a)^8} + \frac{1}{x^7} - \frac{1}{(x+1)^7}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^9X}{\mathrm{d}x^9} &= 1 \cdot 2 \cdots 8 \left(-\frac{9}{(x+a)^{10}} + \frac{1}{x^9} - \frac{1}{(x+1)^9}\right) \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

findet.

§33 Aus diesen wird also die Summe unserer Reihe S berechnet

$$\begin{aligned}
S = {} & \left(x-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{x+1}{x} - \ln\frac{x+a}{x+1} + \frac{1}{2(x+a)} - 1 \\
& - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+a)^2}\right) \\
& + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+a)^4}\right) \\
& - \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5} - \frac{5}{(x+a)^6}\right) \\
& + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}\cdot\frac{3}{10}\left(\frac{1}{x^7} - \frac{1}{(x+1)^7} - \frac{7}{(x+a)^8}\right) \\
& - \frac{1}{9\cdot 10\cdot 11}\cdot\frac{5}{6}\left(\frac{1}{x^9} - \frac{1}{(x+1)^9} - \frac{9}{(x+a)^{10}}\right) \\
& + \frac{1}{11\cdot 12\cdot 13}\cdot\frac{691}{210}\left(\frac{1}{x^{11}} - \frac{1}{(x+1)^{11}} - \frac{11}{(x+a)^{12}}\right) \\
& - \frac{1}{13\cdot 14\cdot 15}\cdot\frac{35}{2}\left(\frac{1}{x^{13}} - \frac{1}{(x+1)^{13}} - \frac{13}{(x+a)^{14}}\right) \\
& + \text{etc}
\end{aligned}$$

zu sein, wo die an zweiter Stelle gesetzten Brüche

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{3}{10},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{691}{210},\quad \text{etc}$$

die Bernoulli-Zahlen genannt worden sind, die weiter so fortschreiten

$$\begin{gathered}
\frac{35}{2},\quad \frac{3617}{30},\quad \frac{43867}{42},\quad \frac{1122277}{110},\quad \frac{854513}{6} \\
\frac{1181820455}{546},\quad \frac{76977927}{2},\quad \frac{23749461029}{30} \\
\frac{8615841276005}{462},\quad \frac{84802531453387}{170} \\
\frac{90212975042845}{6},\quad \text{etc}
\end{gathered}$$

§34 Bis hierher haben wir die Zahl x wie eine Variable betrachtet, nun aber lassen sich, nachdem die Entwicklung gemacht wurde, beide Zahlen x und a nach Belieben annehmen und daher wird immer derselbe Wert für unsere Zahl C resultieren, welcher ja

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x+a-1} - \ln x + S$$

sein wird, und die Reihe S wird umso schneller konvergieren, je größere Zahlen anstelle von x und a genommen werden. Zwischen den beiden Zahlen x und a aber sollte eine Relation solcher Art angenommen werden, dass die Formel

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+a)^2}$$

näherungsweise verschwindet. Wenn z. B. $x = 10$ war, wird diese Formel

$$\frac{1}{110} - \frac{1}{(10+a)^2}$$

sehr klein, wenn entweder $a = 0$ oder $a = 1$ war; die kleinste aller wird aber für $a = \frac{1}{2}$ genommen entstehen, dann wird nämlich der Wert $\frac{1}{110} - \frac{4}{441}$ werden, woher klar ist, dass es immer nützlich ist, dass man $a = \frac{1}{2}$ nimmt. Wenn deshalb x eine ganze Zahl war, wird das erste Glied

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

sein, wie der Wert dieser Reihe gefunden werden muss, ist oben [§19] gezeigt worden; es wird natürlich

$$2 - 2\ln 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{2x-1}$$

sein. Auf diese Weise konvergiert also unser Ausdruck sehr stark, und solange die Zahl x angemessen groß angenommen wird, werden wenige Terme ausreichen, um den Wert der Zahl C hinreichend genau zu finden.

§35 Nachdem wir also den Wert unserer Zahl C durch unendliche Reihen ausgedrückt hatten, wollen wir sehen, ob er nicht auch durch endliche Integralfomeln beschafft werden kann, woher man sicherer schließen kann, zu welcher Art an Größen diese Zahl zu zählen ist. Und zuerst entsteht freilich die unbestimmte Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

aus der Entwicklung dieser Integralformel

$$\int \frac{1-x^n}{1-x} \mathrm{d}x,$$

wenn natürlich nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, wo die Zahl n gebrochen sowie ganz sein kann, und so werden wir

$$C = \int \frac{1-x^n}{1-x} \mathrm{d}x - \ln n$$

haben, wenn man natürlich anstelle von n eine unendliche Zahl annimmt. Wir wollen daher also auch eine Integralformel finden, die uns für $x = 1$ gesetzt unbestimmt $\ln n$ liefert. Weil aber für $x = 1$ gesetzt

$$\frac{1-x^n}{1-x} = n$$

wird, wird

$$\ln \frac{1-x^n}{1-x} = \ln n$$

sein; daher ist klar, wenn n eine unendliche große Zahl bezeichnet, dass dann

$$C = \int \frac{1-x^n}{1-x} \mathrm{d}x = \ln \frac{1-x^n}{1-x}$$

sein wird, wo natürlich $x = 1$ gesetzt wird.

§36 Es ist aber weiter

$$\ln(1-x^n) = -n \int \frac{x^{n-1}}{1-x^n} \mathrm{d}x$$

und

$$\ln(1-x) = -\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x},$$

nach Einsetzen welcher Werte wir lediglich durch Integralformeln

$$C = \int \frac{1-x^n}{1-x} \mathrm{d}x + n \int \frac{x^{n-1}}{1-x^n} \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$$

haben werden, welcher Ausdruck auf diese Form zurückgeführt wird

$$C = -\int \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x + n\int \frac{x^{n-1}}{1-x^n}\mathrm{d}x,$$

sodass C schon der Differenz dieser zwei Integralformeln gleich wird, wenn freilich nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, der Exponent n aber unendlich groß genommen wird; daher ist klar, dass diese Formel umso besser den wahren Wert der Formel C ausdrücken wird, je größer die Zahl n genommen wird.

§37 Aber auch diese Formeln werden sich von den unendlich großen Exponenten befreien lassen, indem man $x^n = z$ setzt, und weil ja im Fall $x = 1$ auch $z = 1$ wird, wird in den daher entstehenden Integralformeln $z = 1$ genommen werden müssen. Weil daher $nx^{n-1}\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ ist, dann aber $x = z^{\frac{1}{n}}$ und daher

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1} = \frac{z^{\frac{1}{n}}}{nz}\mathrm{d}z$$

werden unsere Formeln in die folgenden übergehen

$$C = -\frac{1}{n}\int \frac{z^{\frac{1}{n}}}{1-z^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}z + \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}.$$

Es ist aber bekannt, dass

$$\ln z = n(z^{\frac{1}{n}} - 1)$$

ist, während $n = \infty$ wird, nach Einsetzen welchen Wertes in den ersten Teil

$$C = \int \frac{\mathrm{d}z}{\ln z} + \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}$$

wird, wenn nur nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird, sodass diese Formel schon völlig vom Unendlichen befreit worden ist, die durch ein einziges Integralzeichen so ausgedrückt werden kann

$$C = \int \mathrm{d}z\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{\ln z}\right);$$

und so wird die ganze Frage über die Gestalt der Zahl C darauf zurückgeführt, dass der Wert dieser Integralformel

$$\int \mathrm{d}z\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{\ln z}\right)$$

von der Grenze $z = 0$ bis hin zu $z = 1$ erstreckt wird, welche Form jedenfalls jede Aufmerksamkeit verdient. Es ist aber klar, dass der erste Teil dieser Formel,

$$\int \frac{dz}{1-z} = -\ln(1-z),$$

in diesem Fall $+\infty$ wird. Darauf habe ich sogar gezeigt, dass der andere Teil $\int \frac{dz}{\ln z}$ unendlich Negatives liefert; daraus sieht man ein, dass beide Formeln verbunden einen bestimmten endlichen Wert erzeugen können.

§38 Weil wir oben einige außerordentliche Eigenschaften, die sich auf die Zahl C beziehen, entdeckt haben, wird es der Mühe Wert sein, diese hier gesammelt noch einmal aufgelistet zu haben. Man bemerke also, dass die Buchstaben α, β, γ, δ, etc die Summen der folgenden Reihen bezeichnen

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc}\\
\beta &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc}\\
\gamma &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc}\\
\delta &= 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{etc}\\
&\text{etc},
\end{aligned}$$

nachdem diese Werte festgesetzt worden sind, sind die folgenden Theoreme gefunden worden:

I. $1 - C = \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{3}(\beta - 1) + \frac{1}{4}(\gamma - 1) + \frac{1}{5}(\delta - 1) + \text{etc}$

II. $C = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta + \frac{1}{6}\varepsilon - \frac{1}{7}\zeta + \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{9}\omega + \text{etc}$

III. $1 = (\alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{4}\eta - \frac{1}{8} - \frac{1}{9}) + \text{etc}$

IV. $2C - 1 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\beta) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\delta) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{7}\zeta) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9}\theta) + \text{etc}$

V. $2 - 2\ln 2 - C = (\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8}\beta - \frac{2}{3}) + (\frac{2}{5} \cdot \frac{31}{32}\delta - \frac{2}{5}) + (\frac{2}{7} \cdot \frac{127}{128}\zeta - \frac{2}{7}) + (\frac{2}{9} \cdot \frac{511}{512}\theta - \frac{2}{9}) + \text{etc}$

VI. $1 - 2\ln 2 + C = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot 2^3}\beta) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5 \cdot 2^5}\delta) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{2}{7 \cdot 2^7}\zeta) + \text{etc}$

VII. $\ln 2 - C = \frac{1}{3 \cdot 2^2}\beta + \frac{1}{5 \cdot 2^4}\delta + \frac{1}{7 \cdot 2^6}\zeta + \frac{1}{9 \cdot 2^8}\theta + \frac{1}{11 \cdot 2^{10}}\kappa + \text{etc}$

VIII. $1 - \ln\frac{3}{2} - C = \frac{1}{3 \cdot 2^2}(\beta - 1) + \frac{1}{5 \cdot 2^4}(\delta - 1) + \frac{1}{7 \cdot 2^6}(\zeta - 1) + \frac{1}{9 \cdot 2^8}(\theta - 1) + \text{etc}$

Hier ist natürlich überall

$$C = 0{,}5772156649015325$$

oder

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

nachdem für n eine unendliche Zahl genommen wurde.