Über die Bildung von Kettenbrüchen *

Leonhard Euler

§1 Ein allgemeines zu Kettenbrüchen führendes Prinzip wird in der unendlichen Reihe der nachstehenden Größen aufgefunden

$$A, \quad B, \quad C \quad \text{etc.},$$

von welchen je drei aufeinander folgende nach einem gewissen Bildungsgesetz, ob einem konstantem oder einem irgendwie variablen, so von einander abhängen, dass gilt

$$fA = gB + hC, \quad f'B = g'C + h'D, \quad f''C = g''D + h''E,$$
$$f'''D = g'''E + h'''F \quad \text{etc.}$$

Daher werden nämlich die folgenden Gleichheiten abgeleitet:

*Originaltitel: "De formaione fractionum continuarum", erstmals publiziert in „*Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 3* 1782, pp. 3-29", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 314 - 337 ", Eneström-Nummer E522, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$\begin{aligned}
\frac{fA}{B} &= g + \frac{hC}{B} = g + \frac{f'h}{f'B:C}\,, \\
\frac{f'B}{C} &= g' + \frac{h'D}{C} = g' + \frac{f''h'}{f''C:D}\,, \\
\frac{f''C}{D} &= g'' + \frac{h''E}{D} = g'' + \frac{f'''h''}{f'''D:E}\,, \\
\frac{f'''D}{E} &= g''' + \frac{h'''F}{E} = g''' + \frac{f''''h'''}{f''''E:F}
\end{aligned}$$

etc.

Wenn daher nun die letzten Werte ununterbrochen in den ersten eingesetzt werden, wird von selbst der folgende Kettenbruch ans Licht treten

$$\frac{fA}{B} = g + \cfrac{f'h}{g' + \cfrac{f''h'}{g'' + \cfrac{f'''h''}{g''' + \cfrac{f''''h'''}{g'''' + \text{etc.}}}}}$$

dessen Wert also allein durch die zwei ersten Terme A und B der Reihe bestimmt wird.

§2 Sooft man also eine solche Progression der Größen A, B, C, D, E etc. hat, deren Bildungsgesetz so beschaffen war, dass je drei ihrer aufeinander folgenden Terme nach irgendeinem Gesetz voneinander abhängen, sooft wird daher ein Kettenbruch abgeleitet, dessen Wert angegeben werden kann. Deswegen, wenn irgendeine Formel so beschaffen war, dass ihre Entwicklung zu einer dieser Art Reihe von Größen A, B, C, D, E etc. führt, von welchen jeder Term durch die zwei vorhergehenden bestimmt wird, werden daher Kettenbrüche deriviert werden können; wie das geschieht, wird am besten durch einige Beispiele gezeigt werden können.

I. Entwicklung der Formel $s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma xx)$

§3 In dieser Formel wird der Exponent n als unbestimmt angesehen, dabei nacheinander all diese Werte erhaltend

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6 \quad \text{etc.}$$

woher, solange $n > 0$ war, diese Gleichung nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, dann aber auch verschwindet, nachdem Nachstehendes angenommen worden ist

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta\beta + 4\alpha\gamma}}{2\gamma}.$$

Nachdem diese Dinge bemerkt worden sind, werde diese Formel differenziert, dass wird

$$ds = n\alpha x^{n-1}dx - (n+1)\beta x^n dx - (n+2)\gamma x^{n+1}dx,$$

woher, indem termweise integriert und die Integration nur angezeigt wird, werden wird

$$n\alpha \int x^{n-1}dx = (n+1)\beta \int x^n dx + (n+2)\gamma \int x^{n+1}dx + s.$$

Daher, wenn nach jeder so durchgeführten Integration, dass das Integral nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, festgelegt wird

$$n\alpha \int x^{n-1}dx = (n+1)\beta \int x^n dx + (n+2)\gamma \int x^{n+1}dx,$$

welches eine Relation von solcher Art zwischen drei aufeinander folgenden Integralformeln ist, wie wir sie für die Bildung eines Kettenbruches wünschen;

weil ja diese Integralformeln, wenn anstelle von n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. geschrieben werden, uns die Größen A, B, C, D etc. an die Hand geben.

§4 Wir wollen also anstelle von n der Reihe nach die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc schreiben, dass diese Relationen hervorgehen:

$$\begin{aligned}
\alpha \int dx \quad &= 2\beta \int xdx \ + 3\gamma \int xxdx,\\
2\alpha \int xdx \ &= 3\beta \int xxdx + 4\gamma \int x^3dx,\\
3\alpha \int xxdx &= 4\beta \int x^3dx \ + 5\gamma \int x^4dx,\\
4\alpha \int x^3dx &= 5\beta \int x^4dx \ + 6\gamma \int x^6dx
\end{aligned}$$

etc.

Daher werden wir also haben

$$\begin{aligned}
A &= \int dx = x = \tfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta\beta+4\alpha\gamma}}{2\gamma},\\
B &= \int xdx = \tfrac{1}{2}xx = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta\beta+4\alpha\gamma}}{2\gamma}\right)^2\\
C &= \int xxdx = \tfrac{1}{3}x^3,\\
D &= \int x^3dx = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

etc.

Dann wird man aber für die Buchstaben f, g, h diese Werte haben:

$$\begin{array}{llllll} f=\alpha, & f'=2\alpha, & f''=3\alpha, & f'''=4\alpha & \text{etc.;} \\ g=2\beta, & g'=3\beta, & g''=4\beta, & g'''=5\beta & \text{etc.;} \\ h=3\gamma, & g'=4\gamma, & g''=5\gamma, & g'''=6\gamma & \text{etc.;} \end{array}$$

aus diesen Werten resultiert der folgende Kettenbruch

$$\frac{\alpha A}{B}=2\beta+\cfrac{6\alpha\gamma}{3\beta+\cfrac{12\alpha\gamma}{4\beta+\cfrac{20\alpha\gamma}{5\beta+\cfrac{30\alpha\gamma}{6\beta+\text{etc.}}}}}$$

dessen Wert also dieser ist

$$\frac{4\alpha\gamma}{-\beta+\sqrt{\beta\beta+4\alpha\gamma}}=\beta+\sqrt{\beta\beta+4\alpha\gamma}.$$

§5 Um diesen Kettenbruch gefälliger zu machen, wollen wir anstelle von $\alpha\gamma$ $\frac{1}{2}\delta$ schreiben und es wird hervorgehen

$$\beta+\sqrt{\beta\beta+2\delta}=2\beta+\cfrac{3\delta}{3\beta+\cfrac{6\delta}{4\beta+\cfrac{10\delta}{5\beta+\cfrac{15\delta}{6\beta+\text{etc.}}}}}$$

Weil ja aber dieser Ausdruck sein Kopf abgeschnitten worden zu sein scheint, wollen wir nach Hinzufügen dieses Kopfes setzen

$$s=\beta+\cfrac{\delta}{2\beta+\cfrac{3\delta}{3\beta+\cfrac{6\delta}{4\beta+\cfrac{10\delta}{5\beta+\text{etc.}}}}}$$

und es wird sein

$$s=\beta+\frac{\delta}{\beta+\sqrt{\beta\beta+2\delta}},$$

welcher Ausdruck auf diesen zurückgeführt wird

$$s=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\sqrt{\beta\beta+2\delta}.$$

§6 Dieser Kettenbruch kann aber noch weiter vereinfacht werden, wenn wir anstelle von δ ε schreiben, dass ist

$$\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\sqrt{\beta\beta+4\varepsilon}=\beta+\cfrac{3\varepsilon}{2\beta+\cfrac{6\varepsilon}{3\beta+\cfrac{12\varepsilon}{4\beta+\cfrac{20\varepsilon}{5\beta+\text{etc.}}}}}$$

Wenn daher nun der erste Bruch durch 2 geteilt wird, der zweite durch 3, der dritte durch 4, der vierte durch 5 etc., wird die folgende Form hervorgehen

$$\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\sqrt{\beta\beta+4\varepsilon}=\beta+\cfrac{\varepsilon}{\beta+\cfrac{\varepsilon}{\beta+\cfrac{\varepsilon}{\beta+\cfrac{\varepsilon}{\beta+\text{etc.}}}}}$$

welches die einfachste ist; wenn deren Summe als unbekannt angesehen wird und $= z$ genannt wird, wird natürlich $z = \beta + \frac{\varepsilon}{z}$ und daher $zz = \beta z + \varepsilon$ sein, woher wird

$$z = \frac{\beta + \sqrt{\beta\beta + 4\varepsilon}}{2},$$

welches dieselbe ist.

§7 Aber diese sehr einfache Summe kann unmittelbar aus der anfangs angenommenen Formel selbst abgeleitet werden

$$s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma xx),$$

weil wir ja welche gleich Null gesetzt haben, wird natürlich sein

$$\alpha = \beta x + \gamma xx$$

und auf dieselbe Weise

$$\alpha x = \beta xx + \gamma x^3, \quad \alpha xx = \beta x^3 + \gamma x^4 \quad \text{etc.},$$

sodass wir für die Reihe A, B, C, D etc. diese einfache Reihe der Potenzen haben

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3 \quad x^4, \quad \text{etc.};$$

dann werden aber alle Buchstaben f, g, h etc. α, β, γ etc., woher dieser Kettenbruch entspringt

$$\frac{\alpha}{x} = \beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \text{etc.}}}}$$

wobei gilt

$$\frac{1}{x} = \frac{\beta + \sqrt{\beta\beta + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Der Wert dieses Bruches ist also

$$\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{\beta\beta + 4\alpha\gamma}$$

wie zuvor wegen $\alpha\gamma = \varepsilon$.

II. ENTWICKLUNG DER FORMEL $s = x^n(a - x)$

§8 Diese Formel verschwindet also, indem $x = a$ gesetzt wird; daher wird aber

$$ds = nax^{n-1}dx - (n+1)x^n dx,$$

welcher Ausdruck, weil er nur aus zwei Termen besteht, auf einen Bruch zurückgeführt werde, dessen Nenner $\alpha + \beta x$ sei, sodass wird

$$ds = \frac{na\alpha x^{n-1}dx + (\beta na - \alpha(n+1))x^n dx - \beta(n+1)x^{n+1}dx}{\alpha + \beta x}.$$

Nachdem diese Glieder einzeln integriert worden sind, wird werden

$$s = na\alpha \int \frac{x^{n-1}dx}{\alpha + \beta x} + (n\beta a - (n+1)\alpha) \int \frac{x^n dx}{\alpha + \beta x} - \beta(n+1) \int \frac{x^{n+1}dx}{\alpha + \beta x};$$

daher, wenn wir nach den einzelnen Integrationen $x = a$ setzen, dass $s = 0$ wird, werden wir diese Reduktion haben

$$na\alpha \int \frac{x^{n-1}dx}{\alpha + \beta x} = ((n+1)\alpha - n\beta a) \int \frac{x^n dx}{\alpha + \beta x} + (n+1)\beta \int \frac{x^{n+1}dx}{\alpha + \beta x}.$$

§9 Anstelle von n wollen wir nun nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. einsetzen und nach Anstellen eines Vergleiches mit den allgemeinen Formeln werden wir haben

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta x}, \quad B = \int \frac{xdx}{\alpha + \beta x}, \quad C = \int \frac{xxdx}{\alpha + \beta x} \quad \text{etc.},$$

wo freilich nach der Integration $x = a$ werden muss. Außerdem werden wir aber haben

$$\begin{aligned}
&f = a\alpha, \quad f' = 2a\alpha, \quad f'' = 3a\alpha, \quad f''' = 4a\alpha \quad \text{etc.};\\
&g = 2\alpha - \beta a, \quad g' = 3\alpha - 2\beta a, \quad g'' = 4\alpha - 3\beta a \quad \text{etc.};\\
&h = 2\beta, \quad g' = 3\beta, \quad h'' = 4\beta, \quad g''' = 5\beta \quad \text{etc.};
\end{aligned}$$

und aus diesen entspringt der folgende Kettenbruch

$$\frac{\alpha a A}{B} = (2\alpha - \beta a) + \cfrac{4a\alpha\beta}{(3\alpha - 2\beta a) + \cfrac{9a\alpha\beta}{(4\alpha - 3\beta a) + \cfrac{16a\alpha\beta}{(5\alpha - 4\beta a) + \text{etc.}}}}$$

§10 Nachdem aber die Integration durchgeführt worden ist, wird

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta} = \log\frac{\alpha+\beta x}{\alpha},$$

weil die Integrale nach Setzen von $x = 0$ verschwinden müssen. Nun werde also

$$x = a$$

und es wird sein

$$A = \frac{1}{\beta}\log\frac{\alpha+\beta x}{\alpha}.$$

Weiter

$$\int \frac{xdx}{\alpha+\beta x} = \frac{1}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\log\frac{\alpha+\beta x}{\alpha}\right)$$

und nach Setzen von $x = a$ wird werden

$$B = \frac{a}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta\beta}\log\frac{\alpha+\beta a}{\alpha},$$

weswegen der Wert unseres Kettenbruches sein wird

$$\frac{\alpha a\beta\log\frac{\alpha+\beta a}{\alpha}}{a\beta - \alpha\log\frac{\alpha+\beta a}{\alpha}};$$

es ist aber offensichtlich, dass nichts von der Allgemeinheit verloren geht, auch wenn $a = 1$ genommen wird; dann wird nämlich sein

$$\frac{\alpha\beta\log\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha\log\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = (2\alpha - \beta) + \cfrac{4\alpha\beta}{(3\alpha - 2\beta) + \cfrac{9\alpha\beta}{(4\alpha - 3\beta) + \text{etc.}}}$$

§11 Aber dieser ganze Ausdruck hängt offenbar einzig vom Verhältnis der Zahlen α und β ab; daher wollen wir $\alpha = 1$ und $\beta = n$ nehmen und es wird dieser Kettenbruch entspringen

$$\frac{n\log(1+n)}{n - \log(1+n)} = (2-n) + \cfrac{4n}{(3-2n) + \cfrac{9n}{(4-3n) + \cfrac{16n}{(5-4n) + \text{etc.}}}}$$

wenn wir diesem gemäß des Bildungsgesetzes $1+n$ voranstellen und die Summe $= s$ setzen, dass ist

$$s = 1 + \cfrac{n}{(2-n) + \cfrac{4n}{(3-2n) + \cfrac{9n}{(4-3n) + \cfrac{16n}{(5-4n) + \text{etc.}}}}}$$

wird sein

$$s = \frac{n(n - \log(1+n))}{n\log(1+n)} = 1 + \frac{n - \log(1+n)}{\log(1+n)} = \frac{n}{\log(1+n)}.$$

§12 Wir wollen einige Beispiele durchgehen und es sei zuerst $n = 1$; es wird sein

$$\frac{1}{\log 2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{etc.}}}}}$$

Nach Setzen von $n = 2$ wird aber sein

$$\frac{2}{\log 3} = 1 + \cfrac{2}{0 + \cfrac{8}{-1 + \cfrac{18}{-2 + \cfrac{32}{-3 + \cfrac{50}{-4 + \text{etc.}}}}}}$$

welcher Ausdruck wegen der negativen Größen aber nicht sehr angenehm ist; weil dies passiert, wann immer $n > 1$ ist, wird es der Mühe wert sein, die Fälle zu entwickeln, in denen n kleiner als die Einheit angenommen wird.

§13 Damit dies leichter geschehen kann, wollen wir zu dem die Buchstaben α und β enthaltenden Ausdruck zurückkehren und nach Hinzufügen des Kopfes, der fehlte, geht diese Form hervor

$$\frac{\beta}{\log \frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \alpha + \cfrac{\alpha\beta}{(2\alpha - \beta) + \cfrac{4\alpha\beta}{(3\alpha - 2\beta) + \cfrac{9\alpha\beta}{(4\alpha - 3\beta) + \text{etc.}}}}$$

Wir wollen nun festlegen

$$\alpha = n - m \quad \text{und} \quad \beta = 2m,$$

dass wir die folgende Form erhalten

$$\frac{2m}{\log\frac{n+m}{n-m}} = n - m + \cfrac{2m(n-m)}{2n - 4m + \cfrac{8m(n-m)}{3n - 7m + \cfrac{18m(n-m)}{4n - 10m + \text{etc.}}}}$$

woher die folgenden Spezialfälle abgeleitet werden.

Wenn $m = 1$ und $n = 3$ ist, wird sein

$$\frac{2}{\log 2} = 2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{16}{2 + \cfrac{36}{2 + \cfrac{64}{2 + \text{etc.}}}}}$$

welcher Bruch durch 2 geteilt und reduziert diesen liefert

$$\frac{1}{\log 2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{etc.}}}}}$$

welcher schon oben gefunden worden ist.

Es sei $m = 1$ und $n = 4$; es wird sein

$$\frac{2}{\log\frac{5}{3}} = 3 + \cfrac{6}{24 + \cfrac{24}{5 + \cfrac{54}{6 + \cfrac{96}{7 + \text{etc.}}}}} = 3 + \cfrac{6\cdot 1}{4 + \cfrac{6\cdot 4}{5 + \cfrac{6\cdot 9}{6 + \cfrac{6\cdot 16}{7 + \text{etc.}}}}}$$

Es sei $m = 1$ und $n = 5$; es wird sein

$$\frac{2}{\log\frac{3}{2}} = 4 + \cfrac{8}{6 + \cfrac{32}{8 + \cfrac{72}{10 + \cfrac{128}{12 + \text{etc.}}}}}$$

oder

$$\frac{1}{\log\frac{3}{2}} = 2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{8}{4 + \cfrac{18}{5 + \cfrac{32}{6 + \text{etc.}}}}} = 2 + \cfrac{2\cdot 1}{3 + \cfrac{2\cdot 4}{4 + \cfrac{2\cdot 9}{5 + \cfrac{2\cdot 16}{6 + \text{etc.}}}}}$$

III. Entwicklung der Formel $s = x^n(1 - x^2)$

§14 Diese Formel verschwindet also in den Fällen $x = 0$ und $x = 1$. Weil ja aber daher wird

$$ds = nx^{n-1}dx - (n+2)x^{n+1}dx,$$

werde dieses Differential auf den Nenner $\alpha + \beta xx$ gebracht und es wird werden

$$ds = \frac{n\alpha x^{n-1}dx + (n\beta - (n+2)\alpha)x^{n+1}dx - (n+2)\beta x^{n+2}dx}{\alpha + \beta xx}.$$

Daher wird nun, indem wiederum integriert wird,

$$s = n\alpha \int \frac{x^{n-1}dx}{\alpha + \beta xx} + (n\beta - (n+2)\alpha) \int \frac{x^{n+1}dx}{\alpha + \beta xx} - (n+2)\beta \int \frac{x^{n+3}dx}{\alpha + \beta xx}.$$

Wenn daher nun nach den Integrationen $x = 1$ gesetzt wird, wird diese Reduktion der Integrale hervorgehen

$$n\alpha \int \frac{x^{n-1}dx}{\alpha + \beta xx} = ((n+2)\alpha - n\beta) \int \frac{x^{n+1}dx}{\alpha + \beta xx} + (n+2)\beta \int \frac{x^{n+3}dx}{\alpha + \beta xx}.$$

§15 Weil ja hier die Potenzen von x um zwei vermehrt werden, wollen wir dem Exponenten nacheinander die Werte 1, 3, 5, 7, 9 etc. zuteilen und es werde festgelegt

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta xx}, \quad B = \int \frac{xxdx}{\alpha + \beta xx}, \quad C = \int \frac{x^4dx}{\alpha + \beta xx} \quad \text{rtc.}$$

Darauf werden aber die Buchstaben f, g, h mit ihren derivierten sein

$$\begin{array}{lllll}
f = \alpha, & f' = 3\alpha, & f'' = 5\alpha, & f''' = 7\alpha & \text{etc.;} \\
g = 3\alpha - \beta, & g' = 5\alpha - 3\beta, & g'' = 7\alpha - 5\beta, & g''' = 9\alpha - 7\beta & \text{etc.;} \\
h = 3\beta, & h' = 5\beta, & h'' = 7\beta, & h''' = 9\beta & \text{etc.;}
\end{array}$$

daher entsprießt der folgende Kettenbruch

$$\frac{\alpha A}{B} = 3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \cfrac{49\alpha\beta}{9\alpha - 7\beta + \text{etc.}}}}$$

§16 Weil gilt

$$B = \int \frac{xxdx}{\alpha + \beta xx},$$

wird sein

$$B = \frac{1}{\beta}\int dx - \frac{\alpha}{\beta}\int \frac{dx}{\alpha + \beta xx}$$

und daher

$$B = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}A,$$

nach Einsetzen welches Wertes wir haben werden

$$\frac{\alpha\beta A}{1 - \alpha A} = 3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \text{etc.}}}$$

welchem, weil der Kopf fehlt, wir $\alpha + \beta + \alpha\beta$ voranstellen wollen; dann wird aber die Summe $\beta + \frac{1}{A}$ sein, sodass wir haben

$$\beta + \frac{1}{A} = \alpha + \beta + \cfrac{\alpha\beta}{3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \text{etc.}}}}$$

während gilt

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta xx},$$

nachdem das Integral so genommen worden ist, dass es nach Setzen von $x = 0$, dann aber auch für $x = 1$ verschwindet.

§17 Wir wollen zuerst den einfachsten Fall entwickeln, in welchem α und $\beta = 1$ ist, wo $A = \frac{\pi}{4}$ sein wird, woher wir haben werden

$$1 + \frac{4}{\pi} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

oder es wird sein

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \text{etc.}}}}$$

welches der einst zuerst von Brouncker zuerst hervorgebrachte Kettenbruch selbst ist, dessen Entdeckung, obwohl er von Wallis durch sehr unangenehme Rechnungen gefunden worden ist, sich hier quasi von selbst aus unserer Formel gezeigt hat.

§18 Unsere allgemeine Form gibt aber unendlich viele andere ähnliche Ausdrücke an die Hand, je nachdem auf welche Art und Weise die Buchstaben α und β angenommen werden. Und zuerst wird freilich, wenn α und β positive Zahlen waren, der Wert des Buchstabens A immer durch einen Kreisbogen ausgedrückt werden, andernfalls aber durch Logarithmen. Es sei also zuerst $\beta = 1$ und es wird sein

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + xx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

woher dieser Kettenbruch entsprießt:

$$1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \alpha + 1 + \cfrac{\alpha}{3\alpha - 1 + \cfrac{9\alpha}{5\alpha - 3 + \cfrac{25\alpha}{7\alpha - 5 + \text{etc.}}}}$$

Daher also, wenn $\alpha = 3$ genommen wird, weil $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$ ist, werden wir haben

$$1 + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{27}{12 + \cfrac{75}{16 + \cfrac{147}{20 + \text{etc.}}}}}$$

oder

$$1 + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 4 + \cfrac{3 \cdot 1}{8 + \cfrac{3 \cdot 9}{12 + \cfrac{3 \cdot 25}{16 + \cfrac{3 \cdot 49}{20 + \text{etc.}}}}}$$

§19 Es sei nun β irgendeine positive Zahl, und weil gilt

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta xx} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\beta} + xx},$$

wird durch Integrieren

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Daher werden wir also haben

$$\beta + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \alpha + \beta + \cfrac{\alpha\beta}{3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \text{etc.}}}$$

Wir wollen also festlegen

$$\alpha + \beta = 2n \quad \text{und} \quad \alpha - \beta = 2m,$$

dass ist

$$\alpha = m + n \quad \text{und} \quad \beta = n - m;$$

nach Festlegen dieser Werte wird sein

$$n - m + \frac{\sqrt{nn - mm}}{\arctan \sqrt{\frac{n-m}{n+m}}} = 2n + \cfrac{nn - mm}{2n + 4m + \cfrac{9(nn - mm)}{2n + 8m + \text{etc.}}}$$

§20 Wir wollen auch den Fall betrachten, in dem β eine negative Zahl ist, und durch Setzen von

$$\beta = -\gamma$$

wird sein

$$A = \int \frac{dx}{\alpha - \gamma xx} = \frac{1}{\gamma} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\gamma} - xx},$$

dessen Integral ist

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \log \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + x}{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - x};$$

nach Setzen von $x = 1$ wird also sein

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \log \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\gamma}}$$

woher dieser Kettenbruch entsprießt

$$-\gamma + \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\log \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}} = \alpha - \gamma - \cfrac{\alpha\gamma}{3\alpha + \gamma - \cfrac{9\alpha\gamma}{5\alpha + 5\gamma - \cfrac{25\alpha\gamma}{7\alpha + 5\gamma - \text{etc.}}}}$$

und auf diese Weise haben wir neue Kettenbrüche erhalten, deren Werte sich auch durch Logarithmen darbieten lassen und die völlig von jenen abweichen, die wir zuvor gefunden haben.

§21 Hier zeigt sich ein in Bezug auf die übrigen bemerkenswerter Fall, wenn gilt

$$\gamma = \alpha$$

oder, was auf dasselbe zurückgeht,

$$\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \gamma = 1;$$

weil nämlich dann ist

$$\log \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\gamma}} = \log \infty = \infty,$$

werden wir haben

$$-1 = 0 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{9}{8 - \cfrac{25}{12 - \text{etc.}}}}$$

oder nach Ändern der Vorzeichen

$$1 = \cfrac{1}{4 - \cfrac{9}{8 - \cfrac{25}{12 - \text{etc.}}}}$$

Daher muss der erste Nenner

$$4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}$$

$= 1$ sein. Es wird also sein

$$0 = 3-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}$$

oder

$$1 = \cfrac{3}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}$$

wo der Nenner $= 3$ sein muss; daher wird

$$0 = 5-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}$$

dessen Nenner $= 5$ sein muss; daher wird

$$0 = 7-\cfrac{49}{16-\cfrac{81}{20-\text{etc.}}}$$

aus welcher Struktur die Gültigkeit leicht erkannt wird.

§22 Wir wollen nehmen

$$\alpha = 4 \quad \text{und} \quad \gamma = 1$$

und wir werden diesen Bruch erlangen

$$-1+\frac{4}{\log 3}=3-\cfrac{4\cdot 1}{13-\cfrac{4\cdot 9}{23-\cfrac{4\cdot 25}{33-\cfrac{4\cdot 49}{43-\text{etc.}}}}}$$

Wenn wir aber annehmen

$$\alpha=9 \quad \text{und} \quad \gamma=1,$$

wird sein

$$-1+\frac{6}{\log 3}=8-\cfrac{9\cdot 1}{28-\cfrac{9\cdot 9}{48-\cfrac{9\cdot 25}{68-\cfrac{9\cdot 49}{88-\text{etc.}}}}}$$

IV. Entwicklung der Formel $s=x^n e^{\alpha x}(1-x)$

§22a Hier bezeichnet e die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit, sodass ist

$$d.e^{\alpha x}=\alpha dx e^{\alpha x}.$$

Daher wird also sein

$$ds = nx^{n-1}dxe^{\alpha x} + (\alpha - (n+1))x^n dxe^{\alpha x} - \alpha x^{n+1}dxe^{\alpha x},$$

woher umgekehrt durch Integrieren wird

$$s = n\int x^{n-1}dxe^{\alpha x} + (\alpha - (n+1))\int x^n dxe^{\alpha x} - \alpha\int x^{n+1}dxe^{\alpha x}.$$

Wenn daher also nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, wird sein

$$n\int x^{n-1}dxe^{\alpha x} = (n+1-\alpha)\int x^n dxe^{\alpha x} + \alpha\int x^{n+1}dxe^{\alpha x}.$$

§23 Wenn wir daher nun anstelle von n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreiben und setzen

$$A = \int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha} - 1) \quad \text{und} \quad B = \int xdxe^{\alpha x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha\alpha}e^{\alpha} + \frac{1}{\alpha\alpha},$$

$$\begin{array}{lllll}
f = 1, & f' = 2, & f'' = 3, & f''' = 4, & \text{etc.;} \\
g = 2-\alpha, & g' = 3-\alpha, & g'' = 4-\alpha, & g''' = 5-\alpha, & \text{etc.;} \\
h = \alpha, & h' = \alpha, & h'' = \alpha, & h''' = \alpha, & \text{etc.;}
\end{array}$$

wird dieser Kettenbruch hervorgehen

$$\frac{A}{B} = 2 - \alpha + \cfrac{2\alpha}{3 - \alpha + \cfrac{3\alpha}{4 - \alpha + \cfrac{4\alpha}{5 - \alpha + \text{etc.}}}}$$

Wir wollen oben noch $1-\alpha+\alpha$ hinzufügen; sein Wert wird sein

$$1-\alpha+\frac{(\alpha-1)e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1},$$

woher man diesen ziemlich gefälligen Kettenbruch haben wird

$$\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}=1-\alpha+\cfrac{\alpha}{2-\alpha+\cfrac{2\alpha}{3-\alpha+\cfrac{3\alpha}{4-\alpha+\text{etc.}}}}$$

woher es klar zutage tritt, wenn $\alpha=0$ war, dass wegen $e^{\alpha}-1=\alpha$ natürlich $1=1$ sein wird.

§24 Wir wollen einige Spezialfälle betrachten; und zuerst, wenn $\alpha=1$ ist, wird sein

$$\frac{1}{e-1}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc.}}}}}$$

welcher Bruch leicht in diesen überführt wird

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{1}}{1+\cfrac{\frac{1}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}}{1+\cfrac{\frac{1}{4}}{1+\text{etc.}}}}}}$$

woher wird

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{1}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \text{etc.}}}}}$$

Diese gibt aber weiter von den Partialbrüchen befreit

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

woher folgt

$$\frac{1}{e-2} = 1 + + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \text{etc.}}}}}$$

welche Formen wegen der Simplizität höchst bemerkenswert sind. Aus der vorletzten, nach welcher wird

$$e = 2 + + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

indem man nacheinander 1, 2, 3 oder mehrere Glieder nimmt, werden die folgenden Approximationen entspringen:

$$\begin{aligned} e &= 2,0000, \\ e &= 3,0000, \\ e &= 2,6666, \\ e &= 2,7272, \\ e &= 2,7169, \end{aligned}$$

welche Werte, abwechselnd zu groß und zu klein, ziemlich schnell zur Wahrheit konvergieren.

§25 Wir wollen $\alpha = 2$ nehmen; es wird sein

$$\frac{2}{ee-1} = -1 + \cfrac{2}{0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}}$$

Aus diesem Bruch wird weiter dieser abgeleitet

$$\frac{2(ee-1)}{ee+1} = 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

und auf die gleiche Weise wird die Reduktion durchgeführt werden können, wenn für α größere Zahlen angenommen werden.

§26 Es können für α auch negative Zahlen angenommen werden. So, wenn $\alpha = -1$ war, wird werden

$$\frac{e}{e-1} = 2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \cfrac{4}{6 - \text{etc.}}}}}$$

welcher auf diese Form zurüchgeführt wird

$$\frac{e}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{3}{-5 + \cfrac{4}{6 + \text{etc.}}}}}$$

und auf die gleiche Weise können größere Werte erledigt werden.

§27 Wir wollen auch $\alpha = \frac{1}{2}$ setzen und es wird dieser Ausdruck aufgefunden werden

$$\frac{1}{2(\sqrt{e}-1)} = \frac{1}{2} + \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \cfrac{1}{\frac{5}{2} + \cfrac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2} + \cfrac{\frac{4}{2}}{\frac{9}{2} + \text{etc.}}}}}$$

welcher, von den Partialbrüchen befreit, wird

$$\frac{1}{-1+\sqrt{e}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 + \text{etc.}}}}}$$

Auf die gleiche Weise, wenn wir $\alpha = \frac{1}{3}$ nehmen, wird sein

$$\frac{1}{3(\sqrt[3]{e}-1)} = 2:3 + \cfrac{1:3}{5:3 + \cfrac{2:3}{8:3 + \cfrac{3:3}{11:3 + \cfrac{4:3}{14:3 + \text{etc.}}}}}$$

welcher von Partialbrüchen befreit gibt

$$\frac{1}{-1+\sqrt[3]{e}} = 2 + \cfrac{3}{5 + \cfrac{6}{8 + \cfrac{9}{11 + \cfrac{12}{14 + \text{etc.}}}}}$$

Aber wenn $\alpha = \frac{2}{3}$ gesetzt wird, geht dieser Kettenbruch hervor

$$\frac{1}{3(\sqrt[3]{ee}-1)} = 1:3 + \cfrac{2:3}{4:3 + \cfrac{4:3}{7:3 + \cfrac{6:3}{10:3 + \cfrac{8:3}{13:3 + \text{etc.}}}}}$$

welcher, von den Partialbrüchen befreit, wird

$$\frac{2}{\sqrt[3]{ee}-1} = 1 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{12}{7 + \cfrac{18}{10 + \cfrac{24}{13 + \text{etc.}}}}}$$

§28 Nachdem diese sowohl wesentlichen als auch einfacheren Formeln entwickelt worden sind, werden sich auf gleiche Weise um Vieles allgemeinere behandeln lassen, die zu um Vieles mehr verborgenen Kettenbrüchen führen werden, wie aus den Fällen, die folgen, klar werden wird.

V. ENTWICKLUNG DER FORMEL $s = x^n(a - bx^\theta - cx^{2\theta})^\lambda$

§29

$$ds = (a - bx^\theta - cx^{2\theta})^{\lambda-1}\left\{\begin{matrix}(nax^{n-1}dx - b(n+\lambda\theta)x^{n+\theta-1}dx \\ -c(n+2\lambda\theta)x^{n+2\theta-1}dx\end{matrix}\right\},$$

woher man durch termweises Integrieren, dann aber durch Setzen von

$$a - bx^\theta - cx^{2\theta} = 0$$

was passiert, wenn galt

$$x^\theta = \frac{-b+\sqrt{bb+4ac}}{2c},$$

diese allgemeine Reduktion haben wird

$$na\int x^{n-1}dx(a - bx^\theta - cx^{2\theta})^{\lambda-1}$$

$$= (n+\lambda\theta)b\int x^{n+\theta-1}dx(a-bx^{\theta}-cx^{2\theta})^{\lambda-1}$$
$$+(n+2\lambda\theta)c\int x^{n+2\theta-1}dx(a-bx^{\theta}-cx^{2\theta})^{\lambda-1}.$$

§30 Wenn wir daher nun diese Form mit unserer anfangs angegebenen allgemeinen vergleichen wollen, müssen die nacheinander für den Buchstaben n anzunehmenden Werte immer um die Differenz θ vermehrt werden. Des Weiteren ist es nicht von Nöten, dass der erste Wert von n, wie wir es bisher gemacht haben, $= 1$ genommen wird; wir wollen also seinen ersten Wert $= \alpha$ setzen und wollen die Werte der folgenden Integralformeln suchen, natürlich

$$A = \int x^{\alpha-1}dx(a-bx^{\theta}-cx^{2\theta})^{\lambda-1}$$

und

$$B = \int x^{\alpha+\theta-1}dx(a-bx^{\theta}-cx^{2\theta})^{\lambda-1},$$

welche Integrale so zu nehmen sind, dass sie nach Setzen von $x = 0$ verschwinden, wonach x jener Wert zugeteilt werden muss, der die Formel $a-bx^{\theta}-cx^{2\theta} = 0$ werden lässt. Weil sich dies aber im Allgemeinen nicht ausführen lässt, wollen wir zufrieden sein, diese Werte durch die Buchstaben A und B anzuzeigen, welche wir als als bekannt ansehen wollen.

§31 Außerdem werden aber die Buchstaben f, g, h mit ihren Derivierten die folgenden Werte annehmen

$$\begin{array}{llll} f = \alpha a, & f' = (\alpha+\theta)a, & f'' = (\alpha+2\theta)a, & f' = (\alpha+\theta)a, \quad \text{etc.};\\ g = (\alpha+\ \lambda\theta)b, & g' = (\alpha+\theta+\ \lambda\theta)b, & g'' = (\alpha+2\theta+\ \lambda\theta)b, \quad \text{etc.}; & \\ h = (\alpha+2\lambda\theta)c, & h' = (\alpha+\theta+2\lambda\theta)c, & h'' = (\alpha+2\theta+2\lambda\theta)c, \quad \text{etc.} & \end{array}$$

Aus diesen wird der folgende Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{\alpha a A}{B} = (\alpha+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+\theta)(\alpha+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+\theta+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+2\theta)(\alpha+\theta+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+2\theta+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+3\theta)(\alpha+2\theta+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+3\theta+\lambda\theta)b + \text{etc.}}}}$$

welche Form natürlich im höchsten Maße allgemein ist, mit deren weiterer Entwicklung wir uns aber hier nicht aufhalten.

VI. Entwicklung der Formel $s = x^n(1-x^\theta)^{\lambda-1}$

§32 Daher wird also

$$ds = nx^{n-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1} - \lambda\theta x^{n+\theta-1}(1-x^\theta)^{\lambda-1},$$

woher nur zwei Integralformeln entstünden; deswegen wollen wir diesem Differential den beliebigen Nenner $a+bx^\theta$ zuteilen, dass wir haben

$$ds = \frac{(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta}\big(nax^{n-1}dx - (a(n+\lambda\theta)-bn)x^{n+\theta-1}dx - b(n+\lambda\theta)x^{n+2\theta-1}dx\big).$$

Nun, indem nach der Integration $x=1$ gesetzt wird, leiten wir also diese Reduktion ab

$$na\int\frac{x^{n-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta} = (a(n+\lambda\theta)-bn)\int\frac{x^{n+\theta-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta}$$
$$+b(n+\lambda\theta)\int\frac{x^{n+2\theta-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta}.$$

§33 Hier ist es wiederum ersichtlich, dass die Werte von n stets um die Differenz θ hindurch wachsen müssen. Aber der erste Wert von n werde $= \alpha$ gesetzt und es werden für jeglichen sich ergebenden Fall die zwei folgenden Integralformeln gesucht

$$A = \int \frac{x^{\alpha-1}dx(1-x^{\theta})^{\lambda-1}}{a+bx^{\theta}} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{x^{\alpha+\theta-1}dx(1-x^{\theta})^{\lambda-1}}{a+bx^{\theta}},$$

wo natürlich nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist. Weil nach Finden von diesen daher wird

$$f = \alpha a, \quad f' = (\alpha+\theta)a, \quad f'' = (\alpha+2\theta)a, \quad f''' = (\alpha+3\theta)a \quad \text{etc.};$$

$$g = (\alpha+\lambda\theta)a - \alpha b, \quad g' = (\alpha+\theta+\lambda\theta)a - (\alpha+\theta)b,$$

$$g'' = (\alpha+2\theta+\lambda\theta)a - (\alpha+2\theta)b \quad \text{etc.};$$

$$h = (\alpha+\lambda\theta)b, \quad h' = (\alpha+\theta+\lambda\theta)b, \quad h'' = (\alpha+2\theta+\lambda\theta) \quad \text{etc.};$$

Daher wird der folgende Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{\alpha a A}{B} = (\alpha+\lambda\theta)a - \alpha b$$

$$+\cfrac{(\alpha+\theta)(\alpha+\lambda\theta)ab}{(\alpha+\theta+\lambda\theta)a-(\alpha+\theta)b+\cfrac{(\alpha+2\theta)(\alpha+\theta+\lambda\theta)ab}{(\alpha+2\theta+\lambda\theta)a-(\alpha+2\theta)b+\cfrac{(\alpha+3\theta)(\alpha+2\theta+\lambda\theta)ab}{(\alpha+3\theta+\lambda\theta)a-(\alpha+3\theta)b+\text{etc.}}}}$$

die weitere Entwicklung welcher Form wir übergehen.

VII. Entwicklung der Formel $s = x^n e^{\alpha x}(1-x)^{\lambda}$

§34 Daher wird also

$$ds = e^{\alpha x}(1-x)^{\lambda-1}\big(nx^{n-1}dx - (n+\lambda-\alpha)x^n dx - \alpha x^{n+1}dx\big);$$

daher werden wir also, wenn nach der Integration überall $x = 1$ gesetzt wird, in welchem Fall natürlich $s = 0$ wird, diese Reduktion haben werden

$$n\int x^{n-1}dxe^{\alpha x}(1-x)^{\lambda-1}$$
$$=(n+\lambda-\alpha)\int x^n dxe^{\alpha x}(1-x)^{\lambda-1}+\alpha\int x^{n+1}dxe^{\alpha x}(1-x)^{\lambda-1}.$$

§35 In diesen Formeln werden dem Exponenten n um die Einheit wachsende Werte zugeteilt werden müssen, dann wollen wir aber hier seinen kleinsten Wert als $n = \delta$ annehmen, und die Werte der Buchstaben A und B werden aus diesen Formeln eruiert werden müssen, indem nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird:

$$A=\int x^{\delta-1}dxe^{\alpha x}(1-x)^{\lambda-1},\quad B=\int x^{\delta}dxe^{\alpha x}(1-x)^{\lambda-1};$$

des Weiteren folgt aber wegen dieser Werte

$$\begin{array}{llll} f=\delta, & f'=\delta+1, & f''=\delta+2, & f'''=\delta+3 \quad \text{etc.};\\ g=\delta+\lambda-\alpha, & g'=\delta+1+\lambda-\alpha, & g''=\delta+2+\lambda-\alpha \quad \text{etc.}; & \\ h=\alpha, & h'=\alpha, & h''=\alpha \quad \text{etc.} & \end{array}$$

dieser Kettenbruch

$$\frac{\delta A}{B}=\delta+\lambda-\alpha+\cfrac{(\delta+1)\alpha}{\delta+1+\lambda-\alpha+\cfrac{(\delta+2)\alpha}{\delta+2+\lambda-\alpha+\cfrac{(\delta+3)\alpha}{\delta+3+\lambda-\alpha+\text{etc.}}}}$$

wo besonders angemerkt werden muss, dass die Exponenten λ und δ notwendigerweise größer als Null angenommen werden müssen, weil andernfalls die grundlegende Formel $x^n e^{\alpha x}(1-x)^\lambda$ im Fall $x = 1$ nicht verschwände.

§36 Wenn den Buchtaben δ und λ der Wert $= 1$ zugeteilt wird, wird der schon oben [§23] behandelte Fall hervorgehen, und wenn mit diesen Buchstaben ganze Zahlen bezeichnet werden, werden Kettenbrüche solcher Art entspringen, welche sich durch gewisse Operationen auf die ersten zurückführen lassen. Aber wenn mit den Buchstaben δ und λ, entweder dem einen der beiden oder jedem der beiden, Brüche bezeichnen, dann werden auf die ersten überhaupt nicht reduzierbare Formen entspringen und deren Wert sich nicht anders als durch im höchsten Maße transzendente Größen ausdrücken lassen. Wie wenn beispielsweise $\delta = \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ war, wird der Wert des Buchstabens A aus dieser Integralformel gesucht werden müssen

$$A = \int \frac{e^{\alpha x} dx}{\sqrt{x - xx}},$$

deren Integration auf im höchsten Maße transzendente Größen führt, so dass der Wert solcher Kettenbrüche als höchst im Verborgenen liegend hervorgeht.