

ÜBER DEN WERT DER VON DER GRENZE  
 $x = 0$  BIS HIN ZU  $x = 1$  ERSTRECKTEN  
INTEGRALFORMEL

$$\int \frac{x^{a-1} dx (1-x^b)(1-x^c)}{\log x (1-x^n)}$$

Leonhard Euler

§1 Das, was ich vor nicht allzu langer Zeit über die Integration von Differentialformeln solcher Art, in deren Nenner  $\ln x$  auftaucht, hervorgehoben habe, wo ich gezeigt habe, dass der Wert dieser von  $x = 0$  bis  $x = 1$  erstreckten Integralformel

$$\int \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx = \ln \frac{a}{b}$$

ist, schien nicht nur der ganzen Aufmerksamkeit würdig, sondern schien auch gleichsam ein neues Feld in der Methode des Integrierens zu eröffnen, deshalb weil die Integration von Formeln solcher Art völlig einzigartige Kunstgriffe erfordert, aber aus noch wenig bekannten Prinzipien abgeleitet worden war. Zu dieser Zeit schien sich diese Untersuchung erst nicht weit zu erstrecken, während es mir möglich war, außer der gerade erwähnten Formel diese auf wenige andere auszudehnen; nun aber, nachdem ich diesen Gegenstand noch einmal sorgfältiger durchgegangen bin, habe ich entdeckt, dass eine um Vieles allgemeinere Formel, natürlich die, die man hier im Titel erblickt, mit dem gleichen Erfolg gefunden werden kann. Ja diese Methode, die ich hier erörtern werde, kann sogar auch auf noch allgemeinere Formeln in leichter Weise ausgedehnt werden, woher sich ein nicht zu verachtender Zuwachs auf die ganze Analysis zu ergießen scheint.

§2 Wir wollen also mit dem Buchstaben  $S$  den Wert der vorgelegten Formel bezeichnen, welchen sie natürlich annimmt, wenn ihre Integration von der Grenze  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$  erstreckt wird, sodass

$$S = \int \frac{x^{a-1} dx (1-x^b)(1-x^c)}{\ln x (1-x^n)} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = 1 \end{array} \right]$$

ist, um welchen Wert zu finden, man vor allem bemerken muss, dass der Bruch  $\frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$  so beschaffen ist, dass er für  $x = 1$  gesetzt völlig verschwindet. Weil nämlich so im Zähler  $1-x^b$  wie  $1-x^c$  den Faktor  $1-x$  involviert und daher der ganze Zähler den Faktor  $(1-x)^2$  hat, während im Nenner nur der Faktor  $1-x$  einfach enthalten ist, ist klar, dass für  $x = 1$  gesetzt der ganze Bruch verschwinden muss; das sieht man auch daher ein, dass im Fall  $x = 1$  so der Nenner wie der Zähler verschwindet, woher, wenn gemäß der allbekannten Regel anstelle des Zählers, der entwickelt  $1-x^b - x^c + x^{b+c}$  ist, wie anstelle des Nenners die jeweiligen Differentiale geschrieben werden, dieser jenem im Fall  $x = 1$  gleiche Bruch hervorgeht

$$\frac{-bx^{b-1} - cx^{c-1} + (b+c)x^{b+c-1}}{-nx^{n-1}};$$

für  $x = 1$  gesetzt geht aber dieser Bruch in diesen über  $\frac{-b-c+b+c}{-n}$ , der natürlich gleich 0 ist.

§3 Weil der Zähler des gerade betrachteten Bruches  $1-x^b - x^c + x^{b+c}$  ist, werden, wenn er durch  $1-x^n$  geteilt wird, aus den vier Termen die vier folgenden unendlichen geometrischen Reihen entstehen:

$$\begin{array}{l} \text{I: } 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n} + x^{5n} + \text{etc} \\ \text{II: } -x^b - x^{n+b} - x^{2n+b} - x^{3n+b} - x^{4n+b} - x^{5n+b} - \text{etc} \\ \text{III: } -x^c - x^{n+c} - x^{2n+c} - x^{3n+c} - x^{4n+c} - x^{5n+c} - \text{etc} \\ \text{IV: } x^{b+c} + x^{n+b+c} + x^{2n+b+c} + x^{3n+b+c} + x^{4n+b+c} + x^{5n+b+c} + \text{etc} \end{array}$$

Die einzelnen Terme dieser Reihen müssen also mit der Formel  $\frac{x^{a-1} dx}{\ln x}$  multipliziert werden, dann werden nämlich die vom  $x = 0$  bis  $x = 1$  erstreckten Integrale aller, wenn sie zu einer Summe zusammengefasst werden, den mit dem Buchstaben  $S$  bezeichneten gesuchten Wert geben.

§4 Auf diese Weise ist also die ganze Aufgabe auf die von  $x = 0$  bis  $x = 1$  zu erstreckende Integration einer solchen Formel  $\frac{x^m dx}{\ln x}$  zurückgeführt. Diese Formel enthält aber das Grundprinzip, woher alles, was ich einst über diesen Gegenstand publiziert habe, abgeleitet worden sind; dann aber habe ich, um ihr Integral zu finden, die Lehre über Funktionen zweier Variablen benutzt, welche sich auf das gegenwärtige Unternehmen nicht angenehm genug anwenden ließe; deshalb werde ich hier eine andere Methode hervorheben, mit deren Hilfe diese Integration, die wir untersuchen, um vieles leichter und klar ausgeführt werden können wird und durch die zugleich alles, was sich darauf bezieht, nicht schlecht beleuchtet werden wird.

§5 Weil  $\ln x^m = m \ln x$  ist, wenn der Buchstabe  $e$  die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus hyperbolicus der Einheit gleich wird, wird, nachdem der Kürze wegen  $m \ln x = y$  gesetzt wurde,  $\ln x^m = y = y \ln e$  sein und daher wird andererseits  $x^m = e^y = e^{m \ln x}$  sein. Weil also durch die altbekannte Reihe

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{yy}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc}$$

ist, wird für unseren Fall

$$x^m = 1 + \frac{m \ln x}{1} + \frac{mm \ln^2 x}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 \ln^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 \ln^4 x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc}$$

sein; daher wird also unter Verwendung dieser Reihe

$$\frac{x^m}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} + \frac{m}{1} + \frac{mm \ln x}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 \ln^2 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 \ln^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{m^5 \ln^4 x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc}$$

sein. Es müssen also die einzelnen mit  $dx$  multiplizierten Terme dieser Reihe integriert werden, woher freilich aus dem ersten Term die Formel  $\int \frac{dx}{\ln x}$  entstehen wird, deren Wert, der von  $x = 0$  bis  $x = 1$  erstreckt wurde, ich gezeigt habe  $\infty$  zu sein, an dessen Stelle wir überall den Charakter  $\Delta$  schreiben wollen; dann aber entsteht aus dem zweiten Term das Integral  $\frac{m}{1}x = m$ .

§6 Für die aus den übrigen Termen zu entstehenden Integrale ist aus den Grundlagen der Integralrechnung hinreichend klar, dass, wenn die Integrale von  $x = 0$  bis  $x = 1$  erstreckt werden, es sein wird wie folgt:

$$\int dx \ln x = -1, \quad \int dx \ln^2 x = +1 \cdot 2, \quad \int dx \ln^3 x = -1 \cdot 2 \cdot 3, \\ \int dx \ln^4 x = +1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad \int dx \ln^5 x = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \quad \text{etc}$$

nach Einsetzen dieser Werte werden wir also finden, dass

$$\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \Delta + m - \frac{mm}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \frac{m^5}{5} - \frac{m^6}{6} + \frac{m^7}{7} - \text{etc}$$

sein wird. Aus der Lehre der Logarithmen ist aber bekannt, dass

$$\ln(1+m) = m - \frac{mm}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \frac{m^5}{5} + \text{etc}$$

ist, nach Einsetzen welchen Wertes wir

$$\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \Delta + \ln(1+m)$$

haben werden, welches also der Wert dieser von der Grenze  $x = 0$  bis  $x = 1$  erstreckten Integralformel ist, welche Grenzen man sich im Folgenden immer ein wenig merken muss, woher wir diese nicht weiter erwähnen werden.

§7 Dieser Wert scheint freilich mit einer außergewöhnlichen Unannehmlichkeit versehen zu sein, deshalb weil er den Charakter  $\Delta$  verwickelt, dessen Wert nicht nur unbekannt ist, sondern auch unendlich; weil aber für alle Formeln dieser Art er immer dasselbe bleibt, sodass

$$\int \frac{x^n dx}{\ln x} = \Delta + \ln(1+n)$$

ist, ist klar, wenn eine dieser Formeln von der anderen abgezogen wird, dass dieser Charakter völlig aus der Rechnung herausgeht und es

$$\int \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx = \ln \frac{1+m}{1+n}$$

ist, die jener Fall selbst ist, zu welchem ich anfangs zuerst geführt wurde. Damit das aber klarer erscheint, in welchen Fällen dieser Charakter  $\Delta$  völlig aus der Rechnung herausgehen wird, wollen wir diese unbestimmte Form betrachten

$$X = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\epsilon + \text{etc}$$

und durch jenes gefundenes Integral wird

$$\int \frac{X}{\ln x} dx = A\Delta + B\Delta + C\Delta + D\Delta + \text{etc}$$

$$+ A \ln(1+\alpha) + B \ln(1+\beta) + C \ln(1+\gamma) + D \ln(1+\delta) + \text{etc}$$

sein; wenn deshalb die Koeffizienten  $A, B, C, D, \text{ etc}$  so beschaffen waren, dass  $A + B + C + D + \text{ etc} = 0$  ist, wird dieses Integral immer so ausgedrückt werden

$$\int \frac{Xdx}{\ln x} = A \ln(1 + \alpha) + B \ln(1 + \beta) + C \ln(1 + \gamma) + D \ln(1 + \delta) + \text{ etc},$$

genauso als ob die kanonische Formel  $\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \ln(1 + m)$  gewesen wäre und der Charakter  $\Delta$  missachtet worden wäre.

§8 Sooft also

$$X = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \text{ etc}$$

war, während  $A + B + C + D + \text{ etc} = 0$  wird, wird dann das Integral  $\int \frac{Xdx}{\ln x}$  nicht weiter durch den Charakter  $\Delta$  verunreinigt werden und die einzelnen Integrationen werden sich so aufstellen lassen, als ob in Wahrheit

$$\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \ln(1 + m)$$

wäre. Weil also die Reihe den Wert von  $X$  beschafft, wenn  $x = 1$  gesetzt wird, ist klar, dass diese Integration immer gelingt, wenn  $X$  eine Funktion solcher Art von  $x$  ausdrückt, dass sie für  $x = 1$  gesetzt verschwindet. Weil daher die Formel, die wir hier unternommen haben zu betrachten,

$$X = \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n},$$

wie wir schon beobachtet haben, für  $x = 1$  gesetzt verschwindet, wird sich ihre Integration mithilfe der kanonischen Formel  $\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \ln(1 + m)$  ausführen lassen, nachdem man natürlich den eingangs eingeführten Charakter  $\Delta$  missachtet hat.

§9 Weil wir ja schon oben auf vier unendliche Reihen geführt worden sind, welche mit der Formel  $\frac{x^{n-1} dx}{\ln x}$  multipliziert, dann aber integriert werden müssen, wird, wenn wir diese Operation bei den einzelnen Summanden ausführen, man den gesuchten Wert  $S$  durch die folgenden vier unendlichen Reihen aus-

gedrückt finden:

$$S = \begin{cases} \text{I:} & \ln(a) + \ln(a+n) + \ln(a+2n) + \ln(a+3n) + \ln(a+4n) + \text{etc} \\ \text{II:} & -\ln(a+b) - \ln(a+b+n) - \ln(a+b+2n) - \ln(a+b+3n) \\ & -\ln(a+b+4n) - \text{etc} \\ \text{III:} & -\ln(a+c) - \ln(a+c+n) - \ln(a+c+2n) - \ln(a+c+3n) \\ & -\ln(a+c+4n) - \text{etc} \\ \text{IV:} & \ln(a+b+c) + \ln(a+b+c+n) + \ln(a+b+c+2n) \\ & + \ln(a+b+c+3n) + \ln(a+b+c+4n) + \text{etc} \end{cases}$$

Auf diese Weise ist also die ganze Frage darauf zurückgeführt worden, dass man unendliche Ausdrücke findet, die diesen unendlichen Reihen von Logarithmen gleich sein sollen.

§10 Weil also der gesuchte Wert  $S$  unendlich vielen Logarithmen gleich gefunden worden ist, wird er selbst als ein Logarithmus betrachtet werden müssen; deshalb wollen wir  $S = \ln O$  setzen und, indem man von Logarithmen zu Zahlen übergeht, wird man entdecken, dass der Wert von  $O$  auf die folgende Weise durch Faktoren ausgedrückt wird

$$O = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{(a+n)(a+b+c+n)}{(a+b+n)(a+c+n)} \cdot \frac{(a+2n)(a+b+c+2n)}{(a+b+2n)(a+c+2n)} \cdot \frac{(a+3n)(a+b+c+3n)}{(a+b+3n)(a+c+3n)} \dots$$

welchen Ausdruck wir in die durch einen Punkt getrennten Glieder aufgeteilt haben, von welchen ein beliebiges zwei Faktoren im Zähler und ebenso viele im Nenner enthält, welche Faktoren in den einzelnen Gliedern so beschaffen sind, dass die Summe der Faktoren des Zählers immer der Summe der Faktoren des Nenners ist. Außerdem bemerke man aber, dass, indem man  $i$  für eine unendliche Zahl nimmt, dass infinitesimale Glied

$$\frac{(a+in)(a+b+c+in)}{(a+b+in)(a+c+in)}$$

ist, welches entwickelt

$$\frac{a(a+b+c) + in(2a+b+c) + iinn}{(a+b)(a+c) + in(2a+b+c) + iinn}$$

liefert, dessen Wert wegen der ersten endlichen verschwindenden Teile natürlich der Einheit gleich wird; daher sieht man ein, dass dieser Ausdruck einen endlichen und bestimmten Wert haben wird, und je mehr Glieder so miteinander multipliziert werden, er sich desto besser dem wahren Wert von  $O$  nähern wird, weil ja hinreichend weit entfernte Glieder sich immer weniger von der Einheit unterscheiden.

§11 Um nun den wahren Wert des Buchstaben  $O$  zu finden, wollen wir ein bemerkenswertes Lemma zur Hilfe nehmen, dessen Gültigkeit ich schon in der "Calculi Integralis" strenger bewiesen habe, welche sich so verhält. Wenn

$$\frac{P}{Q} = \frac{(m+p)q}{p(m+q)} \cdot \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(m+p+2n)(q+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)} \\ \cdot \frac{(m+p+3n)(q+3n)}{(p+3n)(m+q+3n)} \cdot \text{etc}$$

sein, welcher Ausdruck in gleicher Weise aus unendlich vielen Gliedern besteht, in deren einzelnen so der Nenner wie der Zähler auch aus zwei Faktoren besteht, genauso wie unser für  $O$  gefundener Ausdruck, woher nicht schwer die Buchstaben  $p, q$  und  $m$  so bestimmt werden können, dass  $O = \frac{P}{Q}$  hervorgeht, weil ja der Buchstabe  $n$  auf beiden Seiten dieselbe Bedeutung beibehält; und auf diese Weise wird der Wert des Buchstaben  $O$  zumindest auf die gewöhnlichen Integralformeln  $P$  und  $Q$  zurückgeführt werden. Hier ist aber natürlich zu bemerken, dass die einzelnen Buchstaben  $p, q, m$  und  $n$  positive Zahlen bezeichnen müssen; das ist auch über unsere Buchstaben  $a, b$  und  $c$  festzuhalten, weil ja unsere kanonische Formel  $\int \frac{x^m}{\ln x} dx = \ln(1+m)$  nicht mit der Wahrheit verträglich sein kann, außer  $1+m$  war eine positive Zahl, weil andernfalls die daher hervorgehenden Logarithmen von negativen Zahlen imaginär werden würden.

§12 Um  $\frac{P}{Q}$  und  $Q$  einander anzugleichen, wird es genügen, die ersten Glieder

$$\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \quad \text{und} \quad \frac{(m+p)q}{p(m+q)}$$

gleichgesetzt zu haben, weil deshalb anschließend alle folgenden Glieder von selbst übereinstimmen werden. Diese Identität wird aber auf zweifache Weise erhalten werden können; nachdem nämlich  $q = a$  genommen wurde, wird entweder  $m+q = a+b$  oder  $m+q = a+c$  gesetzt werden können, sodass auf

die erste Weise  $m = b$  ist, auf die zweite Art aber  $m = c$ ; aber dann wird in der Tat für die erste Art  $p = a + c$  sein, woher von selbst  $m + p = a + b + c$  werden wird; für die zweite Art muss in der Tat, wo  $m = c$  ist,  $p = a + b$  genommen werden, woher erneut von selbst  $m + p = a + b + c$  wird; deshalb werden wir daher zwei Werte für  $p$  und  $q$  erhalten, woher auch zwei Lösungen entstehen werden, die sind:

$$\begin{aligned} \text{I. Lösung} & \quad \begin{cases} P = \int x^{a+c-1} dx (1-x^n)^{\frac{b-n}{n}} \\ Q = \int x^{a-1} dx (1-x^n)^{\frac{b-n}{n}} \end{cases} \\ \text{II. Lösung} & \quad \begin{cases} P = \int x^{a+b-1} dx (1-x^n)^{\frac{c-n}{n}} \\ Q = \int x^{a-1} dx (1-x^n)^{\frac{c-n}{n}} \end{cases} \end{aligned}$$

bei beiden wird nämlich  $O = \frac{P}{Q}$  sein und weil  $S = \ln O$  ist, wird  $S = \ln P - \ln Q$  sein und haben den Wert von  $S$  durch endliche Formeln ausgedrückt gefunden.

§13 Über die Werte der Buchstaben  $p$  und  $q$  müssen aber zwei besonders bemerkenswerte Fälle erwähnt werden, in denen sie sich sogar uneingeschränkt beschaffen lassen; der eine liefert nämlich

$$\int x^{n-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1}{m},$$

der andere besteht in der Tat darin, dass

$$\int x^{n-m-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

ist, wo  $\pi$   $180^\circ$  bezeichnet oder die Semiperipherie des Kreises, dessen Radius gleich 1 ist. Weil daher für unsere erste Lösung  $m = b$  ist, wollen wir sehen, ob  $p$  und  $q$  sich auf diese absoluten Werte zurückführen lässt. Das passiert aber, wann immer  $b = c$  ist und darüber hinaus  $a = n - b$ , in welchem Fall die beiden Lösungen einander entsprechen, welchen Fall es also der Mühe Wert sein wird getrennt entwickelt zu haben.



ENTWICKLUNG DES FALLES, IN DEM  $c = b$  UND  $a = n - b$   
IST

§14 In diesem Fall wird also die vorgelegte Formel

$$S = \int \frac{x^{n-b-1} dx}{\ln x} \cdot \frac{(1-x^b)^2}{1-x^n}$$

sein; dann haben wir in der Tat gesehen, dass

$$P = \int x^{n-1} dx (1-x^n)^{\frac{b-n}{n}} = \frac{1}{b}$$

ist und

$$Q = \int x^{n-b-1} dx (1-x^n)^{\frac{b-n}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{b\pi}{n}}$$

weshalb, weil  $S = \ln P - \ln Q = \ln \frac{P}{Q}$  ist, nach Einsetzen dieser Werte

$$S = \ln \frac{n \sin \frac{b\pi}{n}}{b\pi}$$

sein wird, wo klar ist, dass  $b < n$  sein muss, woher es förderlich sein wird, die folgenden Beispiele betrachtet zu haben.

BEISPIEL 1, IN DEM  $b = 1$  UND  $n = 2$  IST

§15 In diesem Fall wird also  $\sin \frac{b\pi}{n} = 1$  sein und daher  $S = \ln \frac{2}{\pi}$ ; wenn deshalb die vorgelegte Formel

$$S = \int \frac{dx}{\ln x} \frac{1-x}{1+x}$$

war, wird  $S = \ln \frac{2}{\pi}$  sein; aber es wird in der Tat, indem man den Wert von  $S$  durch Logarithmen entwickelt, wie wir es oben gemacht haben, wegen  $a = 1$ ,  $b = c = 1$  und  $n = 2$

$$S = \begin{cases} \ln 1 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 9 + \ln 11 + \text{etc} \\ -2 \ln 2 - 2 \ln 4 - 2 \ln 6 - 2 \ln 8 - 2 \ln 10 - \text{etc} \\ \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 9 + \ln 11 + \ln 13 + \text{etc} \end{cases}$$

nach Ordnen von welchen

$$S = \ln 1 - 2 \ln 2 + 2 \ln 3 - 2 \ln 4 + 2 \ln 5 - 2 \ln 6 + 2 \ln 7 - 2 \ln 8 + 2 \ln 9 - \text{etc}$$

sein wird.

**§16** Wenn also andererseits diese Reihe von Logarithmen vorgelegt wird

$$s = \ln 1 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 + \ln 5 - \ln 6 + \ln 7 - \text{etc},$$

wird ihre Summe angegeben werden können. Weil nämlich  $S - 2s = -\ln 1 = 0$  ist, wird  $s = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\pi} = \ln \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  wegen  $S = \ln \frac{2}{\pi}$  sein; oder weil  $\pi > 2$  ist, wird  $s = -\ln \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  sein; die Summe  $s$  wird natürlich negativ sein.

BEISPIEL 2, IN DEM  $b = 1$  UND  $n = 3$  IST

**§17** In diesem Fall also, in dem  $a = 2$  ist, wird die vorgelegte zu integrierende Formel

$$S = \int \frac{x dx (1-x)^2}{\ln x (1-x^3)} = \int \frac{x dx (1-x)}{\ln x (1+x+xx)}$$

sein, weil darauf  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist, wird der gesuchte Wert  $S = \ln \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$  sein; aber derselbe Wert  $S$  wird durch eine Reihe von Logarithmen ausgedrückt wegen  $a = 2, b = c = 1$  und  $n = 3$

$$S = \begin{cases} \ln 2 + \ln 5 + \ln 8 + \ln 11 + \ln 14 + \ln 17 + \text{etc} \\ -2 \ln 3 - 2 \ln 6 - 2 \ln 9 - 2 \ln 12 - 2 \ln 15 - \text{etc} \\ \ln 4 + \ln 7 + \ln 10 + \ln 13 + \ln 16 + \ln 19 + \text{etc} \end{cases}$$

sein und so wird also

$$S = \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 - 2 \ln 6 + \ln 7 + \ln 8 - 2 \ln 9 + \ln 10 + \ln 11 - 2 \ln 12 + \ln 13 + \ln 14 - \text{etc}$$

sein, die Summe welcher hinreichend regelmäßigen Reihe also  $S = \ln \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$  ist.

BEISPIEL 3, IN DEM  $b = 2$  UND  $n = 3$  IST

**§18** In diesem Fall wird also  $a = 1$  sein und unsere Integralformel wird

$$S = \int \frac{dx (1-xx)^2}{\ln x (1-x^3)} = \int \frac{dx (1-x)(1+x)^2}{\ln x (1+x+xx)}$$

werden, deren Wert also  $S = \ln \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$  sein wird; aber derselbe Wert  $S$  wird durch eine Reihe von Logarithmen ausgedrückt wegen  $a = 1, b = c = 2$  und

$n = 3$

$$S = \begin{cases} \ln 1 + \ln 4 + \ln 7 + \ln 10 + \ln 13 + \text{etc} \\ -2 \ln 3 - 2 \ln 6 - 2 \ln 9 - 2 \ln 12 - \text{etc} \\ + \ln 5 + \ln 8 + \ln 11 + \ln 14 + \text{etc} \end{cases}$$

sein und so wird also

$$S = \ln 1 - 2 \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 - 2 \ln 6 + \ln 7 + \ln 8 - 2 \ln 9 + \ln 10 + \ln 11 - \text{etc}$$

sein, die Summe welcher Reihe also  $S = \ln \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$  ist, woher, weil  $S = \ln \frac{P}{Q}$  ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 8}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 11}{9 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 14}{12 \cdot 12} \cdot \text{etc}$$

sein wird, dessen Wert also gleich  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$  sein wird.

BEISPIEL 4, IN DEM  $b = 1$  UND  $n = 4$  IST

§19 Daher wird also wegen  $a = 3$  unsere Integralformel

$$S = \int \frac{xxdx (1-x)^2}{\ln x (1-x^4)} = \int \frac{xxdx}{\ln x} \frac{1-x}{1+x+xx+x^3}$$

sein, deren Wert also gleich  $\ln \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$  sein wird; aber in der Tat wird der selbe Wert durch eine Reihe von Logarithmen wegen  $a = 3$ ,  $b = c = 1$  und  $n = 4$  auf diese Weise ausgedrückt werden

$$S = \begin{cases} \ln 3 + \ln 7 + \ln 11 + \ln 15 + \text{etc} \\ -2 \ln 4 - 2 \ln 8 - 2 \ln 12 - \text{etc} \\ \ln 5 + \ln 9 + \ln 13 + \text{etc} \end{cases}$$

und daher wird also

$$\frac{P}{Q} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 12} \cdot \text{etc} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

sein.

BEISPIEL 5, IN DEM  $b = 3$  UND  $n = 4$  IST

§20 In diesem Fall wird also  $a = 1$  sein und unsere Integralformel wird

$$S = \int \frac{dx (1 - x^3)^2}{\ln x (1 - x^4)}$$

werden, deren Wert also  $S = \ln \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$  sein wird, welcher auch auf diese eine Reihe von Logarithmen ausgedrückt werden wird

$$S = \begin{cases} \ln 1 + \ln 5 + \ln 9 + \ln 13 + \ln 17 + \text{etc} \\ -2 \ln 4 - 2 \ln 8 - 2 \ln 12 - 2 \ln 16 - \text{etc} \\ \ln 7 + \ln 11 + \ln 15 + \ln 19 + \text{etc} \end{cases}$$

daher wird also

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 11}{8 \cdot 8} \cdot \frac{15 \cdot 9}{12 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 19}{16 \cdot 16} \cdot \text{etc} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$$

werden.

§21 Außer diesen Fällen aber, in denen wird beobachtet haben, dass die Formeln  $P$  und  $Q$  gleichzeitig eine Integration zulassen, lässt sich als sicher bestätigen, dass darüber hinaus keine anderen gegeben sind, in denen das passiert. Dennoch sind unzählige andere Fälle gegeben, in dem der Wert unserer Integralformel  $S$  uneingeschränkt ohne Integralformeln angegeben werden kann, auch wenn keine der Formeln  $P$  und  $Q$  abseits davon integriert werden kann; weil diese Fälle per se sehr bemerkenswert sind, wollen wir für deren Untersuchung das folgende Problem verkünden.

## PROBLEM

§22 Es sind die Fälle zu untersuchen, in denen sich der Wert  $S$  der vorgelegten Integralformel ohne Integralformeln ausdrücken lässt.

## LÖSUNG

Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass man Relationen solcher Art zwischen den Exponenten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $n$  findet, in denen der oben verwendete

Bruch  $\frac{P}{Q}$  uneingeschränkt ausgedrückt werden kann, obwohl keine dieser Formeln getrennt davon eine Integration zulässt; dann wird nämlich der gesuchte Wert der vorgelegten Formel  $S = \ln \frac{P}{Q}$  sein. Aber wir haben gesehen, dass dieser Bruch  $\frac{P}{Q}$  dieses ins Unendliche laufende Produkt bezeichnet

$$\frac{P}{Q} = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{(a+n)(a+b+c+n)}{(a+b+n)(a+c+n)} \cdot \frac{(a+2n)(a+b+c+2n)}{(a+b+2n)(a+c+2n)} \cdot \text{etc.}$$

§23 Nun wird es in der Tat förderlich sein, sich zu erinnern, dass so die Sinusse wie die Kosinuse von Winkeln durch unendliche Produkte dieser Art ausgedrückt zu werden pflegen; weil nämlich

$$\sin \frac{p\pi}{2r} = \frac{p\pi}{2r} \cdot \frac{4rr - pp}{4rr} \cdot \frac{16rr - pp}{16rr} \cdot \frac{36rr - pp}{36rr} \cdot \text{etc}$$

ist, wird durch Kombination zweier Ausdrücke dieser Art

$$\frac{\sin \frac{p\pi}{2r}}{\sin \frac{q\pi}{2r}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{4rr - pp}{4rr - qq} \cdot \frac{16rr - pp}{16rr - qq} \cdot \frac{36rr - pp}{36rr - qq} \cdot \frac{64rr - pp}{64rr - qq} \cdot \text{etc}$$

sein. Wenn daher der obere für  $\frac{P}{Q}$  gefundene Ausdruck auf diese Form zurückgeführt werden kann, dann wird jedenfalls

$$S = \ln \sin \frac{p\pi}{2r} - \ln \sin \frac{q\pi}{2r}$$

sein. Damit aber diese Reduktion leichter gelingt, wollen wir den letzten Ausdruck in dieser Form darstellen

$$\frac{\sin \frac{p\pi}{2r}}{\sin \frac{q\pi}{2r}} = \frac{p(2r-p)}{q(2r-q)} \cdot \frac{(2r+p)(4r-p)}{(2r+q)(4r-q)} \cdot \frac{(4r+p)(6r-p)}{(4r+q)(6r-q)} \cdot \text{etc,}$$

die Glieder welches Ausdrucks natürlich so fortschreiten, dass die einzelnen Faktoren, so der Zähler wie der Nenner, immer um dieselbe Größe  $2r$  vermehrt werden. Weil daher im Ausdruck  $\frac{P}{Q}$  die einzelnen Ausdrücke den Zuwachs  $n$  erhalten, wird  $n = 2r$  gesetzt werden müssen, nach Bemerkungen wovon es genügen wird, die ersten Glieder einander gleich zu machen; das wird, indem man

$$a = p, \quad a + b + c = 2r - p, \quad a + b = q, \quad a + c = 2r - q$$

nimmt, passieren, woher man die einzelnen Buchstaben berechnet

$$1) a = p, \quad 2) b = q - p, \quad 3) c = 2r - p - q,$$

während  $n = 2r$  wird. Daher wird es aber der Mühe Wert sein, bemerkt zu haben, dass

$$2a + b + c = 2r = n$$

sein wird, sodass unsere allgemeine Formel auf diesen Fall daher immer angewendet werden kann, wenn nur  $n = 2a + b + c$  war; dann wird nämlich  $p = a$ ,  $q = a + b$  und  $2r = 2a + b + r$ .

§24 Wenn also unsere allgemeine Formel tatsächlich entwickelt wird und anstelle von  $n$  dieser Wert  $2a + b + c$  geschrieben wird, wird sie diese Form annehmen

$$S = \int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^a - x^{a+b} - x^{a+c} + x^{a+b+c}}{1 - x^{2a+b+c}},$$

deren Wert also, wenn anstelle von  $p$ ,  $q$  und  $r$  die gerade gefundenen Werte geschrieben werden,

$$S = \ln \frac{P}{Q} = \ln \sin \frac{a\pi}{2a+b+c} - \ln \sin \frac{(a+b)\pi}{2a+b+c}$$

sein, welche Formel natürlich so uneingeschränkt ist, dass sie weiter keine Integralformel involviert, völlig wie gewünscht. Es ist daher klar, dass der zuvor betrachtete Fall in diesem nicht enthalten ist; weil nämlich in jenem  $a = n - b$  und  $c = b$  gewesen war, wird daher  $2a + b + c = 2n$  werden, während im gegenwärtigen Fall  $2a + b + c = 2n$  ist.

§25 Wenn wir also nun in diesem Ausdruck die Buchstaben  $p$ ,  $q$  und  $r$  in die Rechnung einführen, wird unsere Integralformel auf diese Gestalt zurückgeführt werden

$$S = \int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^p - x^q - x^{2r-q} + x^{2r-p}}{1 - x^{2r}},$$

deren Wert von  $x = 0$  bis  $x = 1$  erstreckt also

$$S = \ln \sin \frac{p\pi}{2r} - \ln \sin \frac{q\pi}{2r}$$

sein wird, wo klar ist, dass dieser Ausdruck derselbe bleibt, auch wenn  $2r - p$  anstelle von  $p$  geschrieben wird, anstelle von  $q$  aber  $2r - q$ , deshalb weil

$$\sin \frac{(2r-p)\pi}{2r} = \sin \frac{p\pi}{2r} \quad \text{und} \quad \sin \frac{(2r-q)\pi}{2r} = \sin \frac{q\pi}{2r}$$

ist; aber die Integralformel wird, nachdem entweder die eine der beiden Substitutionen oder jede von beiden gemacht worden ist, überhaupt nicht verändert.

§26 Wenn wir also anstelle von  $p$  und  $q$  die Ausdrücke  $r - p$  und  $r - q$  schreiben, werden jene Sinusse und Kosinusse verwandelt; dann wird aber die Integralformel selbst

$$S = \int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^{r-p} - x^{r-q} - x^{r+q} + x^{r+p}}{1 - x^{2r}}$$

sein, deren Wert nun gleich

$$\ln \cos \frac{p\pi}{2r} - \ln \cos \frac{q\pi}{2r}$$

sein wird, wo wiederum klar ist, dass keine Veränderung entsteht, ob die Buchstaben  $p$  und  $q$  negative Wert haben oder positive.

#### KOROLLAR 1

§27 Weil also in diesen Fällen keine der Integralformeln  $P$  und  $Q$  so eine Integration zulässt, so scheint es hier umso bemerkenswerter, dass nichtsdestoweniger der Wert des Bruches  $\frac{P}{Q}$  uneingeschränkt ausgedrückt werden kann, weil durch die Sinusse

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \frac{p\pi}{2r}}{\sin \frac{q\pi}{2r}}$$

ist. Weil also in diesem Fall  $a = p$ ,  $b = q - p$ ,  $c = 2r - p - q$  und  $n = 2r$  ist, werden die oben in §12 für  $P$  und  $Q$  beschafften Integralwerte in die Formen übergehen

$$P = \int \frac{x^{2r-q-1} dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{p-q}{2r}}} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{p-1} dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{p-r}{2r}}}.$$

Welche Werte auch immer also den Exponenten zugeteilt werden, es wird immer  $\frac{P}{Q} = \frac{\sin \frac{p\pi}{2r}}{\sin \frac{q\pi}{2r}}$  sein.

#### KOROLLAR 2

§28 Weil sich ja hier anstelle von  $p$  und  $q$  die Ausdrücke  $2r - p$  und  $2r - q$  schreiben lässt, können wir daher die folgenden vier Integralformeln beschaffen, sodass für die einzelnen

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \frac{p\pi}{2r}}{\sin \frac{q\pi}{2r}}$$

ist, welche vier Werte sich so verhalten werden:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } P &= \int \frac{x^{2r-q-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} \\
 \text{II. } P &= \int \frac{x^{2r-q-1} dx}{(1-x^{2r})^{2-\frac{p+q}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{2r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{2-\frac{p+q}{2r}}} \\
 \text{III. } P &= \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{q-p}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{p+q}{2r}}} \\
 \text{IV. } P &= \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{2r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}}
 \end{aligned}$$

### KOROLLAR 3

§29 Wenn wir also hier anstelle von  $p$  und  $q$   $r-p$  und  $r-q$  schreiben, wodurch die Sinusse in Kosinuse verwandelt werden, werden wir 4 so beschaffene Integralformeln für  $P$  und  $Q$  erhalten, dass für alle

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos \frac{p\pi}{2r}}{\cos \frac{q\pi}{2r}}$$

ist, welche vier Werte

$$\begin{aligned}
 \text{I. } P &= \int \frac{x^{r+q-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}} \\
 \text{II. } P &= \int \frac{x^{r+q-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p+q}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{r+p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p+q}{2r}}} \\
 \text{III. } P &= \int \frac{x^{r-q-1} dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p+q}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p+q}{2r}}} \\
 \text{IV. } P &= \int \frac{x^{r-q-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} & \text{und } Q &= \int \frac{x^{r+p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}}
 \end{aligned}$$

sein werden, welche vier Formeln so schön miteinander konform gehen, dass sie sich nur in Bezug auf die Vorzeichen unterscheiden, mit denen die Buchstaben  $p$  und  $q$  versehen sind.

### KOROLLAR 4

§30 Diese Formen aber sind völlig von jenen verschieden, die wir oben in der Entwicklung in §14 erhalten haben, wo  $\frac{P}{Q} = \frac{n}{b\pi} \sin \frac{b\pi}{n}$  war; damit dieser



Unterschied deutlicher vor Augen geführt wird, wollen wir anstelle von  $b$  und  $n$  die Ausdrücke  $p$  und  $2r$  schreiben, dass  $\frac{p}{Q} = \frac{2r}{p\pi} \sin \frac{p\pi}{2r}$  wird; dann wird aber

$$P = \int \frac{x^{2r-1} dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{2r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}},$$

welche Formeln so eine Integration zulassen werden, während man

$$P = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\pi}{2r \sin \frac{p\pi}{2r}}$$

berechnet.

#### KOROLLAR 5

§31 Wenn wir also in den Formeln des vorletzten Korollars  $q = 0$  nehmen, dass  $\frac{p}{Q} = \cos \frac{p\pi}{2r}$  wird, werden wir 2 nur für diesen Fall verschiedenen Formeln für  $P$  und  $Q$  erhalten, welche sind

$$\begin{aligned} \text{I. } P &= \int \frac{x^{r-1} dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}} \\ \text{II. } P &= \int \frac{x^{r-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p}{2r}}} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{r+p-1} dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p}{2r}}} \end{aligned}$$

Wenn wir aber in den Formeln des vorvorletzten Korollars  $q = r$  setzen, dass  $\frac{p}{Q} = \sin \frac{p\pi}{2r}$  hervorgeht, werden wiederum zwei Formeln für  $P$  und  $Q$  hervorgehen, welche

$$\begin{aligned} \text{I. } P &= \int \frac{x^{r-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}} \\ \text{II. } P &= \int \frac{x^{r-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{2r}}} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{2r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{2r}}} \end{aligned}$$

sind.

#### KOROLLAR 6

§32 Wenn wir also in den Formeln von Korollar 2  $q = r - p$  setzen, dass  $\sin \frac{q\pi}{2r} = \cos \frac{p\pi}{2r}$  wird, wird man  $\frac{p}{Q} = \tan \frac{p\pi}{2r}$  haben und die vier Werte für die

Formeln  $P$  und  $Q$  werden sein:

$$\begin{array}{ll}
 \text{I. } P = \int \frac{x^{r+p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2} + \frac{p}{r}}} & \text{und } Q = \int \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2} + \frac{p}{r}}} \\
 \text{II. } P = \int \frac{x^{r+p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}}} & \text{und } Q = \int \frac{x^{2r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}}} \\
 \text{III. } P = \int \frac{x^{r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}}} & \text{und } Q = \int \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}}} \\
 \text{IV. } P = \int \frac{x^{r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2} - \frac{p}{r}}} & \text{und } Q = \int \frac{x^{2r-p-1} dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2} - \frac{p}{r}}}
 \end{array}$$

### KOROLLAR 7

§33 Meistens wird es aber auch helfen zu wissen, dass die Integralformel  $S$  für die Fälle, in denen sie entweder  $\frac{P}{Q} = \cos \frac{p\pi}{2r}$  oder  $\frac{P}{Q} = \sin \frac{p\pi}{2r}$  oder  $\frac{P}{Q} = \tan \frac{p\pi}{2r}$  wird, für den ersten

$$S = \int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^{r-p} - 2x^r + x^{r+p}}{1-x^{2r}} = \ln \cos \frac{p\pi}{2r}$$

wird, für den 2. Fall

$$S = \int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^p - 2x^r + x^{2r-p}}{1-x^{2r}} = \ln \sin \frac{p\pi}{2r},$$

für den 3. Fall aber

$$S = \int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^p - x^{r-p} - x^{r+p} + x^{2r-p}}{1-x^{2r}} = \ln \tan \frac{p\pi}{2r},$$

welche letzte Formel auf diese zurückgeführt wird

$$\int \frac{dx}{x \ln x} \frac{x^p - x^{r-p}}{1+x^r} = \ln \tan \frac{p\pi}{2r},$$

welche dieselbe Integration ist, die ich vor nicht allzu langer Zeit auf verschiedensten Wegen gefunden hatte.

## BEMERKUNG

§34 Zuletzt bemerke man aber über all diese verschiedenen Integralformeln, dass die, in denen man einen Exponenten größer als die Einheit findet, ja als ungeeignet zu verwerfen sind, deshalb weil deren Werte integriert für  $x = 1$  gesetzt unendlich werden, was freilich, weil es in jeder der beiden Formeln  $P$  und  $Q$  gleichzeitig passiert, nicht daran hindert, dass der Bruch  $\frac{P}{Q}$  den angegebenen Wert erhält; aber weil er sich daher nicht bestimmen lässt, leisten auch die Formeln dieser Art nicht den gewünschten Nutzen. Glücklicherweise ereignet es sich aber, dass viele Formeln da sind, aus denen sich der wahre Wert berechnen lässt.