Über die geographische Projektion einer sphärischen Oberfläche *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich in der oberen Dissertation gänzlich alle möglichen Arten betrachtet hatte, auf welche eine sphärische Oberfläche in einer Ebene so dargestellt werden kann, dass die einzelnen sehr kleinen Teile durch die gleichen Formen dargeboten werden, zeigte sich daher freilich sofort die Konstruktion der hydrographischen Karten des Mercator genauso wie die der der polaren Hemisphären; wie aber die beiden Hemisphären, natürlich die obere und die untere, wie sie freilich heute konstruiert zu werden pflegen, mit meinen Formeln zusammenhängen, war kaum ersichtlich, obwohl diese Darstellung dennoch mit derselben Eingenschaft versehen ist. Dieser Sache wegen habe ich beschlossen, genauer zu untersuchen, auf welche Weise auch diese Darstellungsweise mit den dort gegebenen allgemeinen Formeln überaus übereinstimmt und aus ihnen in glänzender Weise deriviert werden kann.

§2 Aber die allgemeinen Formeln, welche ich für Konstruktionen von dieser Art gefunden hatte, verhalten sich so, dass, wenn die Distanz eines gewissen Ortes auf der Sphäre vom Pol $= v$ und der von einem gewissen festen Meridian aus berechnete Längengrad $= t$ war, der Punkt in der Ebene durch die zwei orthogonalen Koordinaten x und y so bestimmt werden muss, dass gilt

---

*Originaltitel: "De proiectione geographica superficiei sphaericae", erstmals publiziert in „*Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 1777, pp. 133-142", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 28, pp. 276 - 287 ", Eneström-Nummer E491, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$x = \Delta : \left(\log \frac{1}{2} v + t\sqrt{-1} \right) + \Delta : \left(\log\cot \frac{1}{2} v - t\sqrt{-1} \right),$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\log\cot \frac{1}{2} v + t\sqrt{-1} \right) - \Delta : \left(\log\cot \frac{1}{2} v - t\sqrt{-1} \right),$$

welche Formeln sich auch so darbieten lassen, dass gilt

$$x = \Delta : \left(\cot \frac{1}{2} v (\cos t + \sqrt{-1} \sin t) \right) + \Delta : \left(\cot \frac{1}{2} v (\cos t - \sqrt{-1} \sin t) \right);$$

und weil gilt

$$\frac{1}{\cot \frac{1}{2} (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)} = \tan \frac{1}{2} v (\cos t \mp \sqrt{-1} \sin t),$$

können diese Formeln auch so dargeboten werden:

$$x = \Delta : \left(\tan \frac{1}{2} v (\cos t + \sqrt{-1} \sin t) \right) + \Delta : \left(\tan \frac{1}{2} v (\cos t - \sqrt{-1} \sin t) \right),$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\tan \frac{1}{2} v (\cos t + \sqrt{-1} \sin t) \right) - \Delta : \left(\tan \frac{1}{2} v (\cos t - \sqrt{-1} \sin t) \right),$$

wo es offenbar ist, dass aus den ersten Formeln, wenn der unbestimmte Charakter der Funktion Δ weggelassen wird, die ersten Formeln hydrographische Karten, die zweiten hingegen die Konstruktion der nördlichen oder südlichen Hemisphäre liefern.

§3 Damit nun leichter klar wird, auf welche Weise auch die übrigen auf dasselbe Prinzip gestützten Projektionen aus unseren Formeln abgeleitet werden können, möchte ich diese Projektionsweise, die für gewöhnlich stereographisch genannt zu werden pflegt, genauer entwickeln. Auf diese Weise pflegt aber die Oberfläche einer Sphäre so auf eine die Sphäre berührende Ebene projiziert zu werden, wie sie auch von einem Beobachter, der sich am dem dem Berührpunkt gegenüberliegenden Punkt aufhält, nach den Perspektivgesetzen wahrgenommen werden würde. Es bezeichne also der Kreis (Fig. 1) AMC die Kugel, die Gerade EF aber die Ebene, welche die Sphäre im Punkt C berühre;

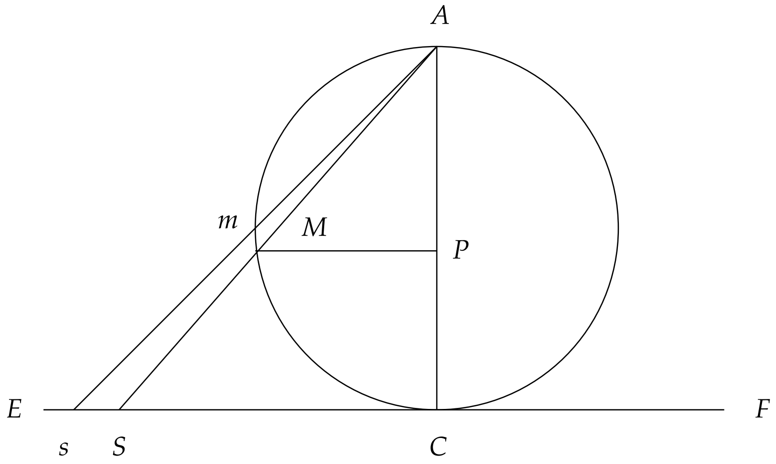

FIG. 1

dann liege aber der Punkt A dem Punkt C gegenüber, in welchem sich der Betrachter aufhalte. Nun, nachdem auf der Sphäre irgendein Punkt M genommen worden ist, wenn durch ihn hindurch von A aus die Gerade AMS verlängert wird, welche die Gerade EF im Punkt S schneidet, wird S die Projektion des Punktes M sein. Daher, wenn der Radius der Sphäre $= 1$ gesetzt wird, dass der Durchmesser $AC = 2$ ist, der Bogen CM hingegen $= z$ gesetzt wird, wird er Winkel $CAM = \frac{1}{2}z$ sein, woher das Intervall CS sich wie folgt verhält

$$CS = 2\tan\frac{1}{2}z = \frac{2\sin z}{1+\cos z} = 2\sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}}.$$

§4 Wenn zu AD von M aus die Normale MP gezogen wird, wird $MP = \sin z$ sein, und wenn ein um die Achse AC herumgezeichneter Kreis aufgefasst wird, dessen Radius $= MP = \sin z$ ist, welcher also auf der Ebene ebenso mit einem Kreis dargestellt wird, dessen Radius $= CS = 2\tan\frac{1}{2}z$ ist, so dass sich der Radius dieses Kreises auf der Sphäre zum Radius der Projektion wie PM zu CS, das heißt wie AP zu AC oder wie AM zu AS verhält. Aber im Kreis der Sphäre, der mit dem Radius CM beschrieben worden ist, werden die Winkel den Winkeln in der Projektion auf der Ebene gleich sein.

§5 Nun wollen wir auf der Sphäre den Punkt m auffassen, der M sehr nahe ist, welchem Punkt m in der Projektion der Punkt s entspreche, so dass das

Element Mm mit der kleinen Strecke Ss ausgedrückt wird, und wir wollen das Verhältnis zwischen diesen zwei Elementen Mm und Ss suchen. Und zuerst tritt es freilich klar zu tage, dass gelten wird

$$\text{Winkel } ASC = 90° - \frac{1}{2} = AsC.$$

Aber das Maß des Winkels AMm ist in der Tat die Hälfte des Winkels AM, woher der Winkel $AMm = 90° - \frac{1}{2}z$ und daher dem Winkel AsC gleich sein wird; daher folgt

$$\text{Dreieck } AMm \sim \text{Dreieck } AsS,$$

woher $Mm : Ss = AM : AS$, das heißt $= AP : AC$ sein wird; dieses Verhältnis stimmt also mit dem überein, welches wir zwischen dem Kreis auf der Sphäre, der mit dem Radius OM beschrieben worden ist, und dem Kreis in der Ebene, der mit dem Radius CS beschrieben worden ist; deswegen wird dieses Verhältnis auch dem gleich sein, in welchem die gleichen Elemente in diesen zwei Kreisen zueinander stehen. Und daher ist es offenbar, wenn auf der Sphäre ein unendlich kleines um das Element Mm herum beschriebenes Stück aufgefasst wird, dass seine Projektion selbiger gleich sein wird, so dass diese Projektion demselben Gesetz unterworfen ist, aus welchem ich meine allgemeinen Formeln gefunden hatte.

§6 Es bezeichne wie zuvor (Fig. 2) der Kreis AGC die Sphäre, deren Oberfläche auf die Ebene EF zu projizieren sei, welche die Sphäre im Punkt C berühre, und wir wollen nun festlegen, dass der eine Erdpol im Punkt C liege.

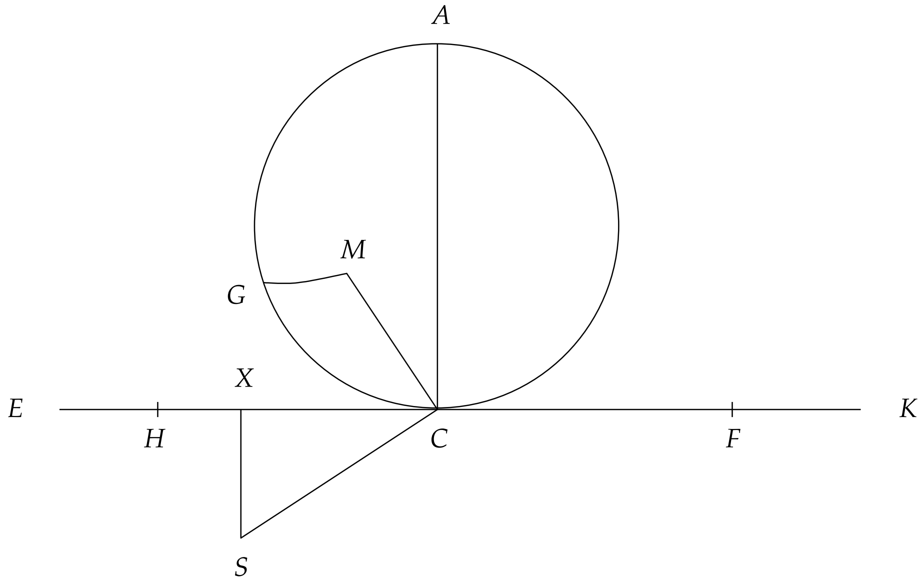

FIG. 2

Wir wollen den Bogen $CG = g$ nennen und durch die vorhergehenden Dinge wird dieser Pol in der Ebene im Punkt H dargeboten werden, dass gilt

$$CH = 2\tan\frac{1}{2}g.$$

Nun wollen wir aber irgendeinen Punkt der Sphäre im M betrachten, dessen Abstand vom Pol $GM = v$ sei, der Winkel CGM sei hingegen $= t$, welcher also den Längengrad des Ortes M auf dem Meridian CG bezeichnen wird, und um das sphärische Dreieck zu vervollständigen, werde der Bogen CM gezeichnet; danach, wenn in der Projektion S der dem Ort M entsprechende Punkt ist, wird sein

$$CS = 2\tan\frac{1}{2}CM, \quad \text{hingegen ist der Winkel } = \text{dem Winkel } GCM.$$

Um also den Ort dieses Punktes S zu definieren, muss im sphärischen Dreieck GCM so die Seite CM wie der Winkel GCM gesucht werden.

§7 Aber im sphärischen Dreieck CGM sind die zwei Seiten $CG = g$ und $GM = v$ zusammen mit dem eingeschlossenen Winkel $CGM = t$ gegeben, woher durch die bekannten Regeln der sphärischen Trigonometrie aufgefunden wird

$$\cos CM = \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t,$$

woher, weil gilt

$$CS = 2 \tan \frac{1}{2} CM = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos CM}{1 + \cos CM}},$$

wir aus der letzten Formel sofort haben

$$CS = 2\sqrt{\frac{1 - \cos g \cos v - \sin g \sin v \cos t}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}}.$$

Außerdem wird aber aufgefunden

$$\tan GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t},$$

welche Formel also zugleich in der Projektion den Tangens des Winkels ECS ausdrückt.

§8 Nun wollen wir in der Projektion vom Punkt S aus zur festen Gerade EF, auf welche natürlich der Pol H fällt, das Lot SX fällen, und wir wollen die Koordinaten $CX = x$ und $XS = y$ nennen; und weil gilt

$$CS = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM},$$

wird sein

$$x = \frac{2 \sin CM \cos GCM}{1 + \cos CM} \quad \text{und} \quad y = \frac{2 \sin CM \sin GCM}{1 + \cos CM},$$

woher es klar zu tage tritt, dass sein wird

$$\frac{y}{x} = \tan GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \cos g \sin v \cos t}.$$

Zusätzlich wird aus dem schon gefundenen aber sein

$$xx + yy = CS^2 = \frac{4(1 - \cos g \cos v - \sin g \sin v \cos t)}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t},$$

aus welchen zwei Gleichungen es möglich sein wird, die beiden Koordinaten x und y einzeln zu bestimmen.

§9 Es wird aber leichter sein, deren Werte direkt auf die folgende Weise zu finden. Weil gilt

$$\sin t : \sin CM = \sin GCM : \sin v,$$

wird sein

$$\sin CM \sin GCM = \sin t \sin v,$$

nach Einführen welches Wertes sein wird

$$\tan GCM = \frac{\sin CM \sin GCM}{\sin g \cos v - \cos g \sin v \cos t} = \frac{\sin GCM}{\cos GCM},$$

woher wird

$$\sin CM \cos GCM = \sin g \cos v - \cos g \sin v \cos t,$$

aus welchen Werten wir sofort erschließen

$$x = \frac{2(\sin g \cos v - \cos g \sin v \cos t)}{1 + \cos CM} \quad \text{und} \quad y = \frac{2 \sin t \sin v}{1 + \cos CM}.$$

Weil wir also gefunden haben

$$\cos CM = \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t,$$

werden die beiden so ausgedrückten Koordinaten x und y haben

$$x = \frac{2(\sin g \cos v - \cos g \sin v \cos t)}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t} \quad \text{und} \quad y = \frac{2 \sin t \sin v}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}.$$

§10 Wenn wir daher also hier $v = 0$ setzen, muss der Ort des Pols H in der Projektion hervorgehen; dann wird aber aufgefunden werden

$$x = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g} = 2 \tan \frac{1}{2} g = CH.$$

Aber es wird in der Tat $y = 0$. Daher werden wir also auch den Ort des anderen Pols in der Projektion angeben können, indem wir 180° setzen; dann wird aber aufgefunden werden

$$x = -\frac{2 \sin g}{1 - \cos g} \quad \text{und} \quad y = 0.$$

Daher, wenn aus dem anderen Teil der andere Pol in K festgesetzt wird, wird das Intervall sein

$$CK = \frac{2\sin g}{1-\cos g} = 2\cot\frac{1}{2}g.$$

Dann aber, wenn wir $CE = CF = 2$ nehmen, wird EF der Durchmesser des Kreises sein, mit welchem die ganze um das Zentrum C herum beschriebene Hemisphäre dargestellt wird, dessen Durchmesser also $EF = 4$ ist, das heißt das Doppelte des Durchmessers der Sphäre.

§11 Um nun in dieser Projektion den Äquator zu bezeichnen, wollen wir $v = 90°$ nehmen, und x und y werden die Koordinaten des Äquators in der Projektion werden; dann wird aber sein

$$x = -\frac{2\cos g\cos t}{1+\sin g\cos t} \quad \text{und} \quad y = \frac{2\sin t}{1+\sin g\cos t}.$$

Oben haben wir aber schon gesehen, dass ist

$$xx + yy = \frac{4(1-\sin g\cos t)}{1+\sin g\cos t},$$

daher schließen wir, dass sein wird

$$\frac{x}{xx+yy} = -\frac{\cos g\cos t}{2(1-\sin g\cos t)},$$

woher wird

$$\cos t = \frac{2x}{2x\sin g - (xx+yy)\cos g},$$

welcher Wert in der Gleichung für x eingesetzt liefert

$$4x\sin g - (xx+yy)\cos g = -4\cos g,$$

woher wird

$$xx + yy = \frac{4(x\sin g + \cos g)}{\cos g},$$

woher wir diese Gleichung erschließen:

$$yy + (2\tan g - x)^2 = \frac{4}{\cos 2g}.$$

Daher tritt es klar zu tage, dass der Äquator in der Projektion ein mit dem Radius $= \frac{2}{\cos g}$ beschriebener Kreis sein wird.

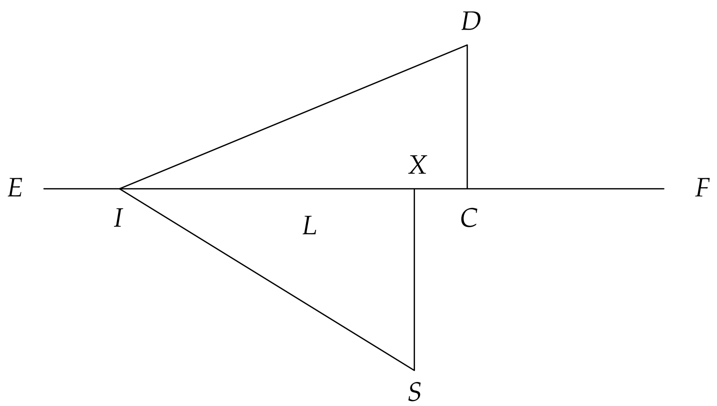

FIG. 3

Um aber das Zentrum (Fig. 3) dieses Kreises zu finden, werde das Intervall $CI = 2\tan g$ genommen, dass wird

$$IX = 2\tan g - x,$$

und weil werden muss

$$XS^2 + IX^2 = \frac{4}{\cos^2 g},$$

tritt es klar zu tage, dass $IS = \frac{2}{\cos g}$, das heißt einer konstanten Größe gleich sein wird. Es wird dieser Punkt I das Zentrum Kreises, der den Äquator darstellt, sein, wobei $CI = 2\tan g$ wird. Daher werde von C aus das Lot $CD = 2$ gefällt, und weil daher die Gerade $ID = \frac{2}{\cos g}$ wird, tritt es klar zu tage, dass der Äquator beschrieben werden wird, wenn vom Zentrum I aus und mit dem Radius ID eine Radius gezeichnet wird.

§12 Wir wollen nun auch alle dem Äquator parallelen Kreise in unserer Projektion bestimmen, und um lange Rechnungen zu vermeiden, wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$a = 2\sin g \cos\alpha, \quad b = 2\cos g \sin\alpha, \quad c = 1 + \cos g \cos\alpha$$

$$\text{und} \quad d = \sin g \sin\alpha \quad \text{und} \quad e = 4 - 4\cos g \cos\alpha,$$

wo wir α anstelle von v geschrieben haben, dass der Abstand der Parallele vom Pol $= \alpha$ ist, wonach sich unsere Gleichungen so verhalten werden:

$$x = \frac{a - b\cos t}{c + d\cos t} \quad \text{und} \quad xx + yy = \frac{e - 4d\cos t}{c + d\cos t},$$

aus deren erster erschlossen wird

$$\cos t = \frac{a - cx}{b + dx},$$

welcher Wert in der anderen eingesetzt liefert

$$xx + yy = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + sd}.$$

Nachdem aber wieder die angenommenen Werte eingesetzt worden sind, wird sein

$$xx + yy = \frac{4(x\sin g + \cos g - \cos\alpha)}{\cos g + \cos\alpha},$$

welche Gleichung auf diese Form reduziert

$$yy + \left(\frac{2\sin g}{\cos g + \cos\alpha} - x\right)^2 = \frac{4\sin^2\alpha}{(\cos g + \cos\alpha)^2}$$

zeigt, dass die Projektion der vorgelegten Parallele ein Kreis ist, dessen Radius nachstehender ist

$$= \frac{2\sin\alpha}{\cos g + \cos\alpha},$$

das Zentrum aber auf der Achse EF selbst, beispielsweise in L, liegt, so dass gilt

$$CL = \frac{2\sin g}{\cos g + \cos\alpha}.$$

§13 Wir wollen nun (Fig. 2) auch die Projektion aller Meridiane ausfindig machen; und zuerst freilich, weil nach Nehmen von $T =$ diese Gerade HK selbst den anfänglichen Meridian darstellt, von welchem aus wir die übrigen berechnen, wollen wir festlegen, dass die Neigung des gesuchten Meridians von diesem anfänglichem aus $= \beta$, dass $t = \beta$ ist, und unsere Gleichungen werden diese sein

$$x = \frac{2(\sin g \cos v - \cos\beta \cos g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos\beta \sin g \sin v},$$
$$y = \frac{2 \sin\beta \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos\beta \sin g \sin v}$$

und

$$xx + yy = \frac{4(1 - \cos g \cos v - \cos\beta \sin g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos\beta \sin g \sin v},$$

aus welchen Gleichungen freilich die Größe v eliminiert werden muss. Für dieses Ziel wollen wir diese Formel betrachten

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\beta \sin v}{\sin g \cos v - \cos\beta \cos g \sin v} = \frac{\sin\beta \tan v}{\sin g - \cos\beta \cos g \tan v},$$

aus welcher erschlossen wird

$$\tan v = \frac{y \sin g}{y \cos\beta \cos g + x \sin\beta}.$$

§14 Um nun diesen Wert in den übrigen Gleichungen leichter gebrauchen zu können, wollen wir diese Gleichung bilden:

$$4 - xx - yy = \frac{8 \cos g \cos v + 8 \cos\beta \sin g \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos\beta \sin g \sin v},$$

welche durch y dividiert liefert

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4 \cos g \cos v + 4 \cos\beta \sin g \sin v}{\sin\beta \sin v} = \frac{4 \cos g + 4 \cos\beta \sin g \tan g}{\sin\beta \tan v},$$

in welcher wir anstelle von $\tan v$ den zuvor gefundenen Wert schreiben wollen, woher werden wird

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4y\cos\beta + 4x\sin\beta\cos g}{y\sin\beta\sin g},$$

aus welcher wir ableiten

$$xx + yy = 4 - \frac{4y\cos\beta + 4x\sin\beta\cos g}{\sin\beta\sin g}$$

welche Gleichung ebenso eine für einen Kreis ist; daher können wir sicher schließen, dasss alle größten auf der Sphäre gezogenen Kreise auch durch Kreisbogen, oder sogar durch gerade Linien ausgedrückt werden.

§15 Um nun (Fig. 4) so das Zentrum wie den Radius eines jeden Meridians für unsere Projektion anzugeben, wollen die gefundene Form in diese Form überführen:

$$\left(\frac{2\cos g}{\sin g} + x\right)^2 + \left(\frac{2\cos\beta}{\sin\beta\sin g} + y\right)^2 = \frac{4}{\sin^2\beta\sin^2 g}.$$

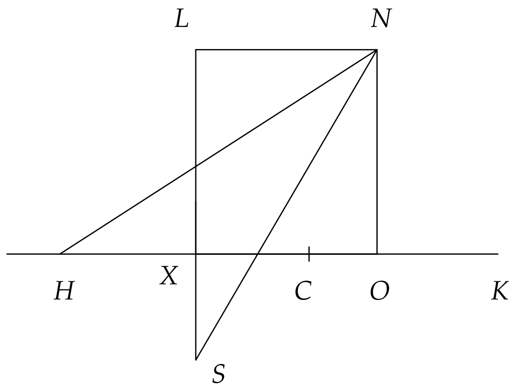

FIG. 4

Es seien also die Punkte H und K die Pole in der Projektion, so dass gilt

$$CH = 2\tan\frac{1}{2}g - \frac{2\sin g}{1+\cos g} \quad \text{und} \quad CK = 2\cot\frac{1}{2}g = \frac{2\sin g}{1-\cos g}$$

und daher das ganze Intervall $HK = \frac{4}{\sin g}$ und seine Hälfte $= \frac{2}{\sin g}$ ist, dass die Mitte auf den Punkt O fällt, und es wird $CO = \frac{2\cos g}{\sin g}$ sein; daher wird nach Nehmen von $CX = x$ sein

$$OX = \frac{2\cos g}{\sin g} + x.$$

Von O aus werde die Senkrechte $= \frac{2\cos\beta}{\sin\beta\sin g}$ gezogen, und, nachdem XL dem Stück ON gleich genommen worden ist, wird gelten

$$LS = \frac{2\cos\beta}{\sin\beta\sin g} + y,$$

weshalb sein muss

$$OX^2(\text{oder } LN^2) + LS^2 = NS^2 = \frac{4}{\sin^2\beta\sin^2 g} \quad \text{und daher} \quad NS = \frac{2}{\sin\beta\sin g}.$$

Daher tritt es klar zu tage, dass der Punkt N das Zentrum des zu beschreibenden Meridians ist, der Radius aber dieser ist

$$= \frac{2}{\sin\beta\sin g},$$

welcher Radius der Gerade NH exakt gleich ist, was überaus mit der Natuir der Sache übereinstimmt; weil ja alle Meridiane auch in der Projektion durch die Pole N und H hindurchgehen müssen.

Vergleich dieser Projektion mit den allgemeinen Formeln

§16 Hier wird also gefragt, eine Form von welcher Art der Funktion Δ zugeteilt werden muss, dass die gerade beschriebene Projektion daraus folgt. Und zuerst tritt es klar zu tage, dass höhere Potenzen als die erste in ihr nicht auftauchen können, weil andernfalls die Vielfachen der Winkel t und u eingingen; des Weiteren wird diese Funktion aber ein Bruch sein müssen, weil ja die für x und y gefundenen Formeln Brüche sind. Dieses Grundes wegen wollen wir der Funktion $\Delta : z$ diese allgemeine Form zuteilen

$$\frac{a+bz}{c+dz};$$

aber für z wollen wir hingegen die oben erläuterte Form nehmen, nach welcher galt

$$z = \tan\frac{1}{2}v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t),$$

so dass unsere Funktion wird

$$\frac{a + b\tan\frac{1}{2}v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t)}{c + d\tan\frac{1}{2}v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t)},$$

welche, indem $\frac{\sin v}{1+\cos v}$ anstelle von $\tan\frac{1}{2}v$ geschrieben wird, diese Form annehmen wird;

$$\frac{a(1+\cos v) + b\sin v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t)}{c(1+\cos v) + d\sin v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t)}.$$

§17 Für die Annehmlichkeit bei der Rechnung wollen wir anstelle dieser Form diese gefälligere gebrauchen

$$\frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{R \pm S\sqrt{-1}},$$

dass gilt

$$\begin{aligned} P &= a(1+\cos v) + b\sin v\cos t, & Q &= b\sin v\sin t, \\ Q &= c(1+\cos v) + d\sin v\cos t, & S &= d\sin v\sin t. \end{aligned}$$

Daher werden aber die Koordinaten x und y so bestimmt hervorgehen:

$$x = \frac{P+Q\sqrt{-1}}{R+S\sqrt{-1}} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{R-S\sqrt{-1}}$$

und

$$y\sqrt{-1} = \frac{P+Q\sqrt{-1}}{R+S\sqrt{-1}} - \frac{P-Q\sqrt{-1}}{R-S\sqrt{-1}},$$

woher wir erschließen

$$x = \frac{2PR+2QS}{RR+SS} \quad \text{und} \quad y = \frac{2QR-2PS}{RR+SS}.$$

§18 Wenn wir nun daher anstelle von P, Q, R, S die angenommen Werte einsetzen, werden wir für den gemeinsamen Nenner auffinden

$$\begin{aligned} RR + SS &= cc(1+\cos v)^2 + 2cd(1+\cos v)\sin v\cos t + dd\sin^2 v \\ &= (1+\cos v)(cc(1+\cos v) + 2cd\sin v\cos t + dd(1-\cos v)). \end{aligned}$$

Dann wir aber für den Zähler von y werden

$$QR - PS = (1+\cos v)(bc-ad)\sin v\sin t$$

und so erlangen wir für die Koordinaten diese Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2ac(1+\cos v) + 2(bc+ad)\sin v\cos t + 2bd(1-\cos v)}{cc(1+\cos v) + 2cd\sin v\cos t + dd(1-\cos v)} \\ y &= \frac{2(bc-ad)\sin v\sin t}{cc(1+\cos v) + 2cd\sin v\cos t + dd(1-\cos v)}. \end{aligned}$$

§19 Wenn wir daher diese Formeln mit denen vergleichen, welche wir oben gefunden haben, welche waren

$$x = \frac{2\sin g\cos v - 2\cos g\sin v\cos t}{1+\cos g\cos v + \sin g\sin v\cos t} \quad \text{und} \quad y = \frac{2\sin t\sin v}{1+\cos g\cos v + \sin g\sin v\cos t},$$

entdecken wir schon eine außerordentliche Übereinstimmung: Aber es wird leicht sein, die Konstanten a, b, c, d so anzunehmen, dass die Übereinstimmung perfekt wird. Zuerst wird also verlangt, um den Nenner zur Identität zu machen, dass ist

$$cc + dd = 1, \quad cc - dd = \cos g \quad \text{und} \quad 2cd = \sin g.$$

Aus den zwei ersten wird

$$cc = \frac{1+\cos g}{2} = \cos^2\frac{1}{2}g \quad \text{und} \quad dd = \frac{1-\cos g}{2} = \sin^2\frac{1}{2}g,$$

woher wird

$$c = \cos\frac{1}{2}g \quad \text{und} \quad d = \sin\frac{1}{2}g,$$

mit welchen Werten schon der dritten Bedingung Genüge geleistet wird; es wird nämlich werden

$$2cd = 2\sin\frac{1}{2}g\cos\frac{1}{2}g = \sin g.$$

Für den Zähler von x erfordert eine vollkommene Übereinstimmung, dass wird

$$ac + bd = 0, \quad ac - bd = \sin g, \quad bc + ad = -\cos g,$$

wo, wenn wir anstelle von c und d die gerade gefundenen Werte schreiben, werden wird

$$a\cos\frac{1}{2}g + b\sin\frac{1}{2}g = 0, \quad a\cos\frac{1}{2}g - b\sin\frac{1}{2}g = \sin g,$$
$$b\cos\frac{1}{2}g + a\sin\frac{1}{2}g = -\cos g.$$

Aus den zwei ersten wird

$$a = \frac{\sin g}{2\cos\frac{1}{2}g} = \sin\frac{1}{2}g,$$

weiter

$$b = -\frac{\sin g}{2\sin\frac{1}{2}g} = -\cos\frac{1}{2}g$$

und mit diesen Werten wir auch der dritten Bedingung von selbst Genüge geleistet. Es ist also nur übrig, dass wir auch sehen, ob diese Werte mit dem Zähler von y übereinstimmen, womit verlangt wird, dass $bc - ad = 1$ ist; es ist aber

$$bc = -\cos^2\frac{1}{2}g \quad \text{und} \quad ad = \sin^2\frac{1}{2}g,$$

woher $bc - ad = -1$ wird. Es ist aber sittsam anzumerken, dass die beiden Koordinaten so positiv wie negativ genommen werden können, so dass hier die vollkommene übereinstimmung anerkannt werden muss.

§20 Nachdem diese Werte gefunden worden sind, ist es offenbar, dass unsere allgemeinen Formeln auf die stereographische Projektion geführt worden wären, wenn wir für die Funktion $\Delta : z$ sofort diese Form angenommen hätten:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}g - z\cos\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}g + z\sin\frac{1}{2}g} \quad \text{oder} \quad \frac{\tan\frac{1}{2}g - z}{1 + z\tan\frac{1}{2}g}.$$

Im Übrigen wird es gefällig sein hier zu bemerken, dass dieser Fall zum praktischen Gebrauch, welchen wir in der Geographie verlangen, im höchsten Maße geeignet ist, weil ja die wahre Form der Erdbereiche kaum verzerrt wird. Es verdient aber besonders angemerkt zu werden, dass in dieser Projektion nicht nur alle Meridiane und Parallelen mit Kreisen oder sogar geraden Linien dargeboten werden, sondern auch alle größten auf der Sphäre beschriebenen Kreise durch Kreisbogen oder gar gerade Linien ausgedrückt werden, wohingegen andere Annahmen, welche für die Funktion Δ gemacht werden könnten, diese Vorteile überhaupt nicht hätten.