Über den Wert der Integralformel $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} (\ln z)^{\mu}$ in dem Fall, in dem nach Integration $z = 1$ gesetzt wird *

Leonhard Euler

§1 Aus der Betrachtung unzähliger Kreisbögen, die entweder einen zugänglichen Sinus oder einen zugänglichen Tangens haben, habe ich schon einst die Summationen zweier unendlicher Reihen abgeleitet, die wegen ihrer allgemeinen Summe besonders bemerkenswert erschienen. Wenn nämlich die Buchstaben m und n beliebige Zahlen bezeichnen, verhalten sich, nachdem das Verhältnis des Durchmesser zur Peripherie wie 1 zu π gesetzt wurde, die beiden Summationen auf diese Weise

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \text{etc} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

und

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2n-n} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc} = \frac{\pi}{n \tan \frac{m\pi}{n}}$$

und aus diesen beiden Reihen habe ich zu dieser Zeit die Summationen all dieser Reihen herausgelöst, deren Nenner nach den Potenzen natürlicher

*Originaltitel: "De valore formulae integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} (\ln z)^{\mu}$ casu quo post integrationem ponitur $z = 1$", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 19* 1775, pp. 30-65", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 17, pp. 384 - 420 ", Eneström-Nummer E463, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Potenzen fortschreiten, wie ich in der Einleitung „Einleitung in die Analysis des Unendlichen“ und andernorts umfangreicher dargelegt habe. Nun aber haben mich die Reihen zur Integration der im Titel dargebotenen Formel geführt, die umso mehr der Aufmerksamkeit würdig erscheint, weil sich die Integrationen dieser Art auf andere Arten keineswegs ausführen lassen.

§2 Es ist aber sofort klar, dass diese beiden unendlichen Reihen aus der Entwicklung der Integralformeln entstehen, wenn nach der Integration der variablen Größe ein gewisser Wert, wie z. B. die Einheit, zugeteilt wird; so wird die erste Reihe aus der Entwicklung der Integralformel

$$\int \frac{z^{m-1}+z^{n-m-1}}{1+z^n}\mathrm{d}z$$

abgeleitet, die zweite aber aus der Entwicklung dieser

$$\int \frac{z^{m-1}-z^{n-m-1}}{1-z^n}\mathrm{d}z,$$

wenn nach der Integration $z=1$ gesetzt wird. Weiter habe ich aber aus den Prinzipien der Integralrechnung gezeigt, dass der Wert des ersten Integrals der beiden Formeln, wenn nach der Integration $z=1$ gesetzt wird, zu dieser einfachen Formel reduziert wird

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

das zweite Integral aber im Fall $z=1$ zu dieser

$$\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}},$$

sodass aus den Prinzipien der Integralrechnung bekannt ist, dass

$$\int \frac{z^{m-1}+z^{n-m-1}}{1+z^n}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \tag{1}$$

$$\int \frac{z^{m-1}-z^{n-m-1}}{1-z^n}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \tag{2}$$

ist, wenn nach der so ausgeführten Integration, dass das Integral für $z=0$ verschwindet, $z=1$ gesetzt wird.

§3 Damit also diese zwei Integrationen auf die vorgelegten Form zurückgeführt werden, wollen wir $n = 2\lambda$ und $m = \lambda - \omega$ setzen, woher jene beiden unendlichen Reihen diese Form annehmen

$$\frac{1}{\lambda-\omega}+\frac{1}{\lambda+\omega}-\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}-\text{etc}$$

und

$$\frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}+\text{etc;}$$

dies erste Summe dieser Reihen wird daher

$$\frac{\pi}{2\lambda\sin\frac{\pi(\lambda-\omega)}{2\lambda}}=\frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

sein, die Summe der zweiten wird daher

$$\frac{\pi}{2\lambda\tan\frac{\pi(\lambda-\omega)}{2\lambda}}=\frac{\pi}{2\lambda\cot\frac{\pi\omega}{2\lambda}}=\frac{\pi}{2\lambda}\tan\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

sein. Wenn wir daher der Kürze wegen

$$\frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}=s\quad\text{und}\quad\frac{\pi}{2\lambda}\tan\frac{\pi\omega}{2\lambda}=T$$

setzen, haben wir die folgenden zwei Integrationen

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}=s\quad\text{und}\quad\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}=T.$$

§4 Über der beiden Integrationen bemerke ich vor Allem, dass die vollkommen Geltung haben, ob entweder für die Buchstaben λ und ω ganze Zahlen oder gebrochene Zahlen angenommen werden. Es seien nämlich λ und ω beliebige gebrochene Zahlen, die ganze werden, wenn sie mit α multipliziert werden, nachdem das festgelegt worden ist, sei $z = x^\alpha$, und es wird $\frac{dz}{z} = \frac{\alpha dx}{x}$ sein und die beliebige Potenz $z^v = z^{\alpha v}$; daher wird die erste Formel

$$\int\frac{x^{\alpha(\lambda-\omega)}+x^{\alpha(\lambda+\omega)}}{1+x^{2\alpha\lambda}}\frac{\alpha dx}{x}$$

sein; weil dort schon alle Exponenten ganze Zahlen sind, unterscheidet sich der Wert dieser Formel, nachdem nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist, da ja dann auch $z = 1$ ist, von der Vorhergehenden nur, weil wir hier $\alpha\lambda$ und $\alpha\omega$ anstelle von λ und ω haben, und außerdem hier der Faktor α vorhanden ist, weshalb der Wert dieser Formel

$$\alpha \cdot \frac{\pi}{2\alpha\lambda \cos \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \cos \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

sein wird, welcher Wert also gleich S ist, völlig wie zuvor; diese Identität gilt aber natürlich auch in der anderen Form, woher klar ist, auch wenn für λ und ω beliebige gebrochene Zahlen angenommen werden, dass die Integration, die hier dargeboten wurde, nichtsdestoweniger stets Geltung haben wird; dieser Umstand verdient bemerkt zu werden, da wir ja in den folgenden Paragraphen den Buchstaben ω wie eine Variable betrachten werden.

§5 Nachdem daher diese beiden Integralformeln, die mit den Buchstaben s und T bezeichnet wurden, so integriert wurden, dass sie für $x = 0$ gesetzt verschwinden, können diese Integrale nicht nur wie eine Funktion der Größe z betrachtet werden, sondern sogar wie eine Funktion zweier Variablen z und ω, weil ja die Zahl ω sich wie eine Variable betrachten lässt; ja es lässt sich sogar der Exponent λ als eine variable Größe annehmen, aber weil daher die Integralformeln anderer Art hervorgehen würden, als ich hier zu betrachten beschlossen habe, sehe ich hier allein die Größe ω außer der Variablen z wie eine variable Größe an.

§6 Weil daher

$$S = \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

ist, in welcher Integration allein z wie eine Variable betrachtet wird, wird mit der gewohnten Schreibweise

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

sein; man differenziere diese Formel erneut nach der Variable ω und es wird

$$(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}\omega}) = \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{1}{z} \ln z$$

sein, welche Formel mit $\mathrm{d}z$ multipliziert und nach der Variablen z integriert gibt:

$$\int \mathrm{d}z(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}\omega}) = \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \ln z,$$

wo man bemerke, dass $S = \frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$ ist, so dass wir folgern

$$(\frac{dS}{d\omega}) = \frac{\pi\pi\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2},$$

nach Einsetzen welches Wertes wir diese Integration erlangen

$$\int\frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}\ln z = \frac{\pi\pi\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2}.$$

§7 Wenn daher die andere Formel auf dieselbe Art betrachtet wird, weil

$$T = \frac{\pi}{2\lambda}\tan\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

ist, wird

$$(\frac{dT}{d\omega}) = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2}$$

sein, aus welcher Integralformel aber

$$(\frac{dT}{d\omega}) = \int\frac{-z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}\ln z$$

sein wird, woher wir die folgende Integration erschließen

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}\ln z = -\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2}.$$

§8 Da wir ja die Buchstaben S und T auch durch Reihen ausgedrückt angegeben haben, wird auch durch ähnliche Reihen sein

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} - \text{etc}$$
$$= \frac{\pi\pi\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2}.$$

Auf die gleiche Art wird für die andere Reihe sein:

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} + \text{etc}$$
$$= \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2}$$

und so haben wir die Summen dieser Reihen auch auf zweierlei Weisen dargestellt, natürlich durch die entwickelte Formel, die die Größe π einbezieht, dann aber auch durch die Integralformel, die so beschaffen ist, dass ihr Integral mit keiner bis jetzt gebrauchten Methode angegeben werden kann.

§9 Wir wollen diese Integrationen auf einige spezielle Fälle anwenden; und zuerst wollen wir $\omega = 0$ setzen, in welchem Fall die erste Integration von selbst ins Auge fällt, aber die zweite liefert

$$\int \frac{2z^{\lambda}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} \ln z = -\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}$$

oder

$$\int \frac{z^{\lambda}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} \ln z = -\frac{\pi\pi}{8\lambda\lambda}$$

und daher erhalten wir diese Summation

$$\frac{1}{\lambda\lambda} + \frac{1}{\lambda\lambda} + \frac{1}{9\lambda\lambda} + \frac{1}{25\lambda\lambda} + \frac{1}{25\lambda\lambda} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}$$

oder

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{8},$$

was ist schon vor langer Zeit von mir gezeigt worden ist.

§10 Hier ist sofort klar, dass es egal ist, welche Zahl für λ angenommen wird; es sei daher $\lambda = 1$ und man hat diese Integration

$$\int \frac{dz \ln z}{1-z^2} = -\frac{\pi\pi}{8},$$

aus welcher sich die leichteren Integrale

$$\int \frac{dz \ln z}{1-z} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz \ln z}{1+z}$$

mithilfe dieser Überlegung erschließen lassen; es werde

$$\int \frac{z dz \ln z}{1-zz} = P$$

gesetzt und für $zz = v$, dass $z dz = \frac{dv}{2}$ und $\ln z = \frac{1}{2}\ln v$ ist, geht

$$\frac{1}{4}\int \frac{dv \ln v}{1-v} = P$$

hervor, wenn natürlich nach der Integration $v = 1$ wird, in welchem Fall jedenfalls auch $z = 1$ wird; so wird also

$$\int \frac{\mathrm{d}v \ln v}{1-v} = 4P$$

sein; nun addiere man die erste Formel zur gefundenen und es wird

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z + z\mathrm{d}z \ln z}{1-zz} = P - \frac{\pi\pi}{8}$$

sein, diese Formel reduziert sich aber von selbst zu dieser

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-z} = P - \frac{\pi\pi}{8};$$

nur haben wir aber gesehen, dass $\int \frac{\mathrm{d}v \ln v}{1-v}$ oder $\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-z} = 4P$ ist, sodass $4P = P - \frac{\pi\pi}{8}$ ist, woher natürlich $P = -\frac{\pi\pi}{2\lambda}$ ist, woraus folgt, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-z} = -\frac{\pi\pi}{6}$$

ist, auf ähnliche Weise wird

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z - z\mathrm{d}z \ln z}{1-zz} = -P - \frac{\pi\pi}{8} = -\frac{\pi\pi}{12}$$

sein, welcher, indem man mit $1-z$ kürzt, liefert

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12},$$

daher erhalten wir drei besonders bemerkenswerte Integrationen

$$\text{I.} \int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12}$$
$$\text{II.} \int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-z} = -\frac{\pi\pi}{6}$$
$$\text{III.} \int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-zz} = -\frac{\pi\pi}{8},$$

welchen

$$\text{IV.} \int \frac{z\mathrm{d}z \ln z}{1-zz} = -\frac{\pi\pi}{24}$$

hinzugefügt werden kann.

§11 So wie daher die Formeln aus den Prinzipien der Integralrechnung abgeleitet werden, so kann deren Gültigkeit durch Auflösung in Reihen leicht bestätigt werden, weil nämlich

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + zz - z^3 + z^4 - z^5 + \mathrm{etc}$$

ist und im Allgemeinen

$$\int z^n \mathrm{d}z \ln z = \frac{z^{n+1}}{n+1} \ln z - \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2},$$

welcher Wert sich für $z = 1$ gesetzt zu $-\frac{1}{(n+1)^2}$ reduziert, ist es klar, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1+z} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \mathrm{etc} = -\frac{\pi\pi}{12}$$

ist, oder

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \mathrm{etc} = \frac{\pi\pi}{12};$$

auf ähnliche Weise wird wegen

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + zz + z^3 + z^4 + \mathrm{etc}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-z} = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \mathrm{etc} = -\frac{\pi\pi}{6}$$

oder

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \mathrm{etc} = \frac{\pi\pi}{6};$$

dann wird aber wegen

$$\frac{1}{1-zz} = 1 + zz + z^4 + z^6 + z^8 + \mathrm{etc}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z \ln z}{1-zz} = -1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \frac{1}{49} - \frac{1}{81} - \mathrm{etc} = -\frac{\pi\pi}{8}$$

sein oder

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \mathrm{etc} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

Auf dieselbe Weise wird sogar

$$\int \frac{z\mathrm{d}z \ln z}{1-zz} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \mathrm{etc} = -\frac{\pi\pi}{24}$$

sein oder

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{24},$$

welche Summationen bekannt sind. Aber trotzdem hat bis jetzt niemand mit einer direkten Methode gezeigt, dass

$$\int \frac{dz \ln z}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12}$$

ist.

§12 Wir wollen nun $\omega = 1$ setzen und unsere Integrationen nehmen diese Formen an

$$\begin{aligned} &1. \quad \int \frac{-z^{\lambda-2}(1-zz)dz \ln z}{1+z^{2\lambda}} = \frac{\pi\pi \sin \frac{\pi}{2\lambda}}{4\lambda\lambda \left(\cos \frac{\pi}{2\lambda}\right)^2} \\ &2. \quad \int \frac{-z^{\lambda-2}(1+zz)dz \ln z}{1-z^{2\lambda}} = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda \left(\cos \frac{\pi}{2\lambda}\right)^2}, \end{aligned}$$

woher man für verschiedene Werte von λ, die nicht kleiner als 2 angenommen werden dürfen, folgende Integrationen erhält:

I. Wenn $\lambda = 2$ ist, wird

$$\begin{aligned} &1. \quad \int \frac{-(1-zz)dz \ln z}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} \\ &2. \quad \int \frac{-(1+zz)dz \ln z}{1-z^4} = \frac{\pi\pi}{8} \quad \text{oder} \quad \int \frac{-dz \ln z}{1-z^4} = \frac{\pi\pi}{8} \end{aligned}$$

sein.

II. Wenn $\lambda = 3$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} &1. \quad \int \frac{-z(1-zz)dz \ln z}{1+z^6} = \frac{\pi\pi}{54} \\ &2. \quad \int \frac{-zz(1+zz)dz \ln z}{1-z^6} = \int \frac{-zdz \ln z}{1-zz+z^4} = \frac{\pi\pi}{8}. \end{aligned}$$

Diese Formeln aber gehen, indem $zz = v$ gesetzt wird, über in die folgenden:

$$\begin{aligned} &1. \quad \int \frac{-dv(1-v) \ln v}{1+v^3} = \frac{2\pi\pi}{27} \\ &2. \quad \int \frac{dv \ln v}{1-v+vv} = \frac{4\pi\pi}{27} \end{aligned}$$

III. Es sei $\lambda = 4$ und wir folgern

$$1. \quad \int \frac{-zz(1-zz)\mathrm{d}z\ln z}{1+z^8} = \frac{\pi\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}}{16(2+\sqrt{2})} = \frac{\pi\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{32(2+\sqrt{2})}$$

$$2. \quad \int \frac{-zz(1+zz)\mathrm{d}z\ln z}{1-z^8} = \int \frac{-zz\mathrm{d}z\ln z}{(1-zz)(1+zz^4)} = \frac{\pi}{16(2+\sqrt{2})},$$

welche letzte Formel zu dieser reduziert wird

$$\int \frac{-\mathrm{d}z\ln z}{1-zz} + \int \frac{(1-zz)\mathrm{d}z\ln z}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8(2+\sqrt{2})};$$

es ist aber

$$\int \frac{-\mathrm{d}z\ln z}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8},$$

woher man findet

$$\int \frac{\mathrm{d}z\ln z(1-zz)}{1+z^4} = -\frac{\pi\pi(1+\sqrt{2})}{8(2+\sqrt{2})} = -\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}},$$

welcher Wert im oberen Fall $\lambda = 2$ gefunden wurde.

§13 Nichts aber steht im Wege, dass wir sogar $\lambda = 1$ setzen, solange die Integrale so genommen werden, dass sie für $z = 0$ gesetzt verschwinden; dann aber wird aber aufgefunden

$$1. \quad \int \frac{-(1-zz)\mathrm{d}z\ln z}{z(1+zz)} = \infty \quad \text{und}$$

$$2. \quad \int \frac{-(1+zz)\mathrm{d}z\ln z}{z(1-zz)} = \infty,$$

woher sich daraus nichts schließen lässt. Im Übrigen verdeutlichen auch unsere oben gefundenen Reihen natürlich, dass deren Summen unendlich sind, weil ja der erste Term der beiden $\frac{1}{(\lambda-\omega)^2}$ unendlich wird, nachdem – wie es gemacht haben – $\lambda = 1$ und $\omega = 1$ gesetzt wurde.

§14 Nachdem diese Fälle entwickelt wurden, wollen wir weiter fortschreiten und wollen die gefundenen Integralformeln

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \ln z = S' \quad \text{und}$$

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \ln z = T'$$

setzen, sodass ist

$$S' = \frac{\pi\pi \sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2} \quad \text{und} \quad T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^2};$$

wie vorher wollen wir nach ω differenzieren, dadurch erlangen wir diese Integrationen

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}S}{d\omega}\right)' \quad \text{und}$$
$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega}\right)'.$$

Wir wollen daher schlussendlich der Kürze wegen den Winkel $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \varphi$ setzen, sodass

$$S' = \frac{\pi\pi\sin\varphi}{4\lambda\lambda(\cos\varphi)^2} = \frac{\pi\pi\sin\varphi}{4\lambda\lambda(cos\varphi)^2}$$

ist und

$$T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda(\cos\varphi)^2},$$

und wir finden

$$\mathrm{d}\frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi)^2} = \frac{(\cos\varphi)^2+2(\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^3}\mathrm{d}\varphi = \frac{1+(\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^3}\mathrm{d}\varphi,$$

wo $\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi\mathrm{d}\omega}{2\lambda}$ ist; daher erschließen wir

$$\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{1+(\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda})^2}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3} - \frac{1}{\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right);$$

auf dieselbe Weise wird

$$\mathrm{d}\frac{1}{(\cos\varphi)^2} = \frac{2\mathrm{d}\varphi\sin\varphi}{(\cos\varphi)^3}$$

wegen

$$T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}\frac{1}{(\cos\varphi)^2}$$

und daher

$$\left(\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\cdot\frac{2\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3};$$

als logische Konsequenz entstehen daher diese Integralformeln:

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}(\ln z)^2 = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3} - \frac{1}{\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right)$$
$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}(\ln z)^2 = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\frac{2\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3}.$$

§15 Wenn wir auf diese Weise die in 8 gefundenen Reihen erneut nach der Variablen ω differenzieren, gelangen wir zu den folgenden Summationen:

$$\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left\{\frac{2}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3} - \frac{1}{\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right\}$$
$$=\frac{2}{(\lambda-\omega)^3}+\frac{2}{(\lambda+\omega)^3}-\frac{2}{(3\lambda-\omega)^3}-\frac{2}{(3\lambda+\omega)^3}+\frac{2}{(5\lambda-\omega)^3}+\frac{2}{(5\lambda+\omega)^3}+\text{etc}$$

und

$$\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\frac{2\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\left(\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}\right)^3} = \frac{2}{(\lambda-\omega)^3}-\frac{2}{(\lambda+\omega)^3}-\frac{2}{(3\lambda-\omega)^3}+\frac{2}{(3\lambda+\omega)^3}+\frac{2}{5\lambda-\omega)^3}-\text{etc.}$$

§16 Wenn wir hier $\omega = 0$ und $\lambda = 1$ setzen, nimmt die erste Integration diese Form an

$$\int \frac{2dz(\ln z)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{8} = \frac{2}{1^3}+\frac{2}{1^3}-\frac{2}{2^3}-\frac{2}{2^3}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^3}-\frac{2}{7^3}-\frac{2}{7^3}+\text{etc},$$

sodass

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc} = \frac{\pi^3}{3^2}$$

wie ich schon vor langer Zeit gezeigt habe. Die andere Integration aber wird in diesem Fall zu 0. Aus dem ersten Integral

$$\int \frac{dz(\ln z)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16}$$

lassen sich keine anderen erschließen, wie wir es oben aus der Formel

$$\int \frac{dz \ln z}{1-zz} = -\frac{\pi\pi}{8}$$

gemacht haben, deshalb weil hier der Nenner $1+zz$ keine reellen Faktoren hat.

§17 Wir wollen daher $\lambda = 2$ und $\omega = 1$ setzen und die Integration wird

$$\int \frac{(1+zz)\mathrm{d}z(\ln z)^2}{1+z^4} = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{3}}$$

geben; es entsteht daher diese Reihe

$$\frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} + \frac{2}{11^3} - \text{etc},$$

sodass

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \text{etc} = \frac{3\pi^3}{64\sqrt{2}}$$

ist, welche zu der oberen addiert

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} - \frac{1}{23^3} + \text{etc} = \frac{\pi^3(3+2\sqrt{2})}{128\sqrt{2}}$$

liefert. Die andere Integration in diesem Fall gibt

$$\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16},$$

welche mit der im vorhergehenden Paragraphen vollkommen übereinstimmt, weil ja diese Reihe entsteht

$$\frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \frac{2}{13^3} - \text{etc.}$$

§18 Damit wir aber eher imstande sind, die folgenden Integrationen durch weitere Differentationen zu finden, wollen wir sie allgemein darstellen; und weil für die erste

$$S = \frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

ist, schreiten die daher entstehenden Integrationen der Reihe nach so voran:

$$\begin{array}{rll}
\text{I.} & \displaystyle\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z} & = S \\
\text{II.} & \displaystyle\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{2+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}\ln z & = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) \\
\text{III.} & \displaystyle\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^2 & = \left(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega^2}\right) \\
\text{IV.} & \displaystyle\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z^3) & = \left(\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}\omega^3}\right) \\
\text{V.} & \displaystyle\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^4) & = \left(\frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) \\
\text{VI.} & \displaystyle\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^5 & = \left(\frac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega}\right) \\
\text{VII.} & \displaystyle\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^6 & = \left(\frac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right)
\end{array}$$

etc.

§19 Für das leichtere Ausführen dieser ununterbrochenen Differentationen wollen wir der Kürze wegen also $\frac{\pi}{2\lambda} = \alpha$ setzen, sodass $S = \frac{\alpha}{\cos\alpha\omega}$ ist; dann sei aber $\sin\alpha\omega = p$ und $\cos\alpha\omega = p$, und es wird $\mathrm{d}p = aq\mathrm{d}w$ und $\mathrm{d}q = -\alpha p \mathrm{d}\omega$ sein. Außerdem sei es angemerkt, dass

$$\mathrm{d}\frac{p^n}{q^{n+1}} = \alpha\mathrm{d}\omega\left(\frac{np^{n-1}}{q^n}+\frac{(n+1)p^{n+1}}{q^{n+2}}\right)$$

ist. Nachdem das vorausgeschickt worden ist, wird wegen $S = \alpha\frac{1}{q}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) = \alpha\alpha\frac{p}{qq}$$

sein, darauf

$$\left(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega}\right) = \alpha^3\left(\frac{1}{q}+\frac{2pp}{q^3}\right),$$

weiter

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}\omega^3}\right) &= \alpha^4\left(\frac{5p}{qq}+\frac{6p^3}{q^4}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) &= \alpha^5\left(\frac{5}{q}+\frac{28pp}{q^3}+\frac{24p^4}{q^5}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega^5}\right) &= \alpha^6\left(\frac{61}{qq}+\frac{180p^3}{q^4}+\frac{120p^5}{q^6}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right) &= \alpha^7\left(\frac{61}{q}+\frac{662pp}{q^3}+\frac{1320p^4}{q^5}+\frac{720p^6}{q^7}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^7S}{\mathrm{d}\omega^7}\right) &= \alpha^8\left(\frac{1385p}{qq}+\frac{7266p^3}{q^4}+\frac{10920p^5}{q^6}+\frac{5040p^7}{q^8}\right);
\end{aligned}$$

diese Werte aber werden wegen $pp = 1 - qq$ zu den folgenden reduziert

$$\begin{aligned}
S &= \alpha\frac{1}{q}\\
\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \alpha\alpha p\frac{1}{qq}\\
\left(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega^2}\right) &= \alpha^3\left(\frac{1\cdot 2}{q^3}-\frac{1}{q}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}w^3}\right) &= \alpha^4 p\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3}{q^4}-\frac{1}{qq}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) &= \alpha^5\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{q^5}-\frac{20}{q^3}+\frac{1}{q}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega^5}\right) &= \alpha^6 p\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{q^6}-\frac{60}{q^4}+\frac{1}{qq}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right) &= \alpha^7\left(\frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{q^7}-\frac{840}{q^5}+\frac{182}{q^3}-\frac{1}{q}\right).
\end{aligned}$$

§20 Es lassen sich die letzteren Formen mithilfe der beiden folgenden Lemmata finden

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad \mathrm{d}\frac{1}{q^{n+1}} = \alpha\mathrm{d}\omega\frac{(n+1)p}{q^{n+2}}\\
&\text{II.}\quad \mathrm{d}\frac{p}{q^{n+1}} = \alpha\mathrm{d}\omega\left(\frac{n+1}{q^{n+2}}-\frac{n}{q^n}\right);
\end{aligned}$$

daher finden wir

$$
\begin{aligned}
S &= \alpha \frac{1}{q} \\
\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \alpha\alpha \frac{p}{qq} \\
\left(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega^2}\right) &= \alpha^3 \left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q}\right) \\
\left(\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}\omega^3}\right) &= \alpha^4 \left(\frac{2\cdot 3p}{q^4} - \frac{p}{qq}\right) \\
\left(\frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) &= \alpha^5 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4}{q^5} - \frac{20}{q^3} + \frac{1}{q}\right) \\
\left(\frac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega^5}\right) &= \alpha^6 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5p}{q^6} - \frac{3\cdot 20p}{q^4} + \frac{p}{qq}\right) \\
\left(\frac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right) &= \alpha^7 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6p}{q^7} - \frac{840}{q^5} + \frac{182}{q^3} - \frac{1}{q}\right) \\
\left(\frac{\mathrm{d}^7S}{\mathrm{d}\omega^7}\right) &= \alpha^8 \left(\frac{2\cdot\cdots\cdot 7p}{q^8} - \frac{5\cdot 840p}{q^6} + \frac{3\cdot 182p}{q^4} - \frac{p}{qq}\right).
\end{aligned}
$$

§21 Dieselben Reihen, die diesen Formeln entsprechen, werden aber

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc} \\
\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} - \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(5\lambda+\omega)^2} - \text{etc} \\
\left(\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega^2}\right) &= \frac{1\dot{2}}{(\lambda-\omega)^3} + \frac{1\cdot 2}{(\lambda+\omega)^3} - \frac{1\cdot 2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{1\cdot 2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{1\cdot 2}{(5\lambda-\omega)^3} + \frac{1\cdot 2}{(5\lambda+\omega)^3} - \text{etc} \\
\left(\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\lambda-\omega)^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\lambda+\omega)^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(3\lambda-\omega)^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(3\lambda+\omega)^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(5\lambda-\omega)^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(5\lambda+\omega)^4} - \text{etc} \\
\left(\frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\lambda-\omega)^5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\lambda+\omega)^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(3\lambda-\omega)^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(3\lambda+\omega)^5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(5\lambda-\omega)^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(5\lambda+\omega)^5} - \text{etc} \\
\left(\frac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega^5}\right) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\lambda-\omega)^6} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\lambda+\omega)^6} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(3\lambda-\omega)^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(3\lambda+\omega)^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(5\lambda-\omega)^6} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(5\lambda+\omega)^6} \\
\left(\frac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right) &= \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(\lambda-\omega)^7} + \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(\lambda+\omega)^7} - \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(3\lambda-\omega)^7} - \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(3\lambda+\omega)^7} + \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(5\lambda-\omega)^7} + \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(5\lambda+\omega)^7} - \text{etc} \\
\left(\frac{\mathrm{d}^7S}{\mathrm{d}\omega^7}\right) &= \frac{1\cdot\cdots\cdot 7}{(\lambda-\omega)^8} - \frac{1\cdot\cdots\cdot 7}{(\lambda+\omega)^8} - \frac{1\cdot\cdots\cdot 7}{(3\lambda-\omega)^8} + \frac{1\cdot\cdots\cdot 7}{(3\lambda+\omega)^8} + \frac{1\cdot\cdots\cdot 7}{(5\lambda-\omega)^8} - \frac{1\cdot\cdots\cdot 7}{(5\lambda+\omega)^8} - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Bezüglich dieser Werte aber muss man sich aber daran erinnern, dass

$$\alpha = \frac{\pi}{2\lambda}, \quad p = \sin\frac{\pi\omega}{2\lambda} \quad \text{und} \quad q = \cos\alpha\omega = \cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

ist.

§22 Auf dieselbe Weise werden die Werte oder die Integralformeln der anderen Art erledigt, für welche

$$T = \frac{\pi}{2\lambda}\tan\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

ist, woher durch wiederholtes Ableiten die folgenden Integrationen entstehen:

$$\begin{array}{rlcl}
\text{I.} & \displaystyle\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z} & = & T \\
\text{II.} & \displaystyle\int\frac{-z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}\ln z & = & \left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega}\right) \\
\text{III.} & \displaystyle\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^2 & = & \left(\dfrac{\mathrm{dd}T}{\mathrm{d}\omega^2}\right) \\
\text{IV.} & \displaystyle\int\frac{-z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^3 & = & \left(\dfrac{\mathrm{d}^3T}{\mathrm{d}\omega^3}\right) \\
\text{V.} & \displaystyle\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^4 & = & \left(\dfrac{\mathrm{d}^4T}{\mathrm{d}\omega}\right) \\
\text{VI.} & \displaystyle\int\frac{-z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^5 & = & \left(\dfrac{\mathrm{d}^5T}{\mathrm{d}\omega^5}\right) \\
\text{VII.} & \displaystyle\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z}(\ln z)^6 & = & \left(\dfrac{\mathrm{d}^6T}{\mathrm{d}\omega^6}\right).
\end{array}$$

§23 Es werde wiederum $\frac{\pi}{2\lambda} = \alpha$ gesetzt, $\sin\alpha\omega = p$ und $\cos\alpha\omega = q$, dass $T = \frac{\alpha p}{q}$ ist, welche Formel nach dem Lemma aus 20 mehrmals differenziert gibt:

$$\begin{aligned}
T &= \alpha\frac{p}{q}\\
\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \alpha\alpha\frac{1}{qq}\\
\left(\frac{\mathrm{dd}T}{\mathrm{d}\omega^2}\right) &= \alpha^3\frac{2p}{q^3}\\
\left(\frac{\mathrm{d}^3T}{\mathrm{d}\omega^3}\right) &= \alpha^4\left(\frac{6}{q^4}-\frac{4}{qq}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^4T}{\mathrm{d}\omega^4}\right) &= \alpha^5\left(\frac{24p}{q^5}-\frac{8p}{q^3}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^5T}{\mathrm{d}\omega^5}\right) &= \alpha^6\left(\frac{120p}{q^6}-\frac{120}{q^4}+\frac{16}{qq}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^6T}{\mathrm{d}\omega^6}\right) &= \alpha^7\left(\frac{720p}{q^7}-\frac{480p}{q^5}+\frac{32p}{q^3}\right)\\
\left(\frac{\mathrm{d}^7T}{\mathrm{d}\omega^7}\right) &= \alpha^8\left(\frac{5040p}{q^8}-\frac{6720}{q^6}+\frac{2016}{q^4}-\frac{64}{qq}\right).
\end{aligned}$$

§24 Die unendlichen Reihen, die dabei entstehen, werden sein:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}+\text{etc}\\
\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \frac{1}{(\lambda-\omega)^2}+\frac{1}{(\lambda+\omega)^2}+\frac{1}{(3\lambda-\omega)^2}+\frac{1}{(3\lambda+\omega)^2}+\frac{1}{(5\lambda-\omega)^2}+\text{etc}\\
\left(\frac{\mathrm{dd}T}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \frac{1\cdot 2}{(\lambda-\omega)^3}-\frac{1\cdot 2}{(\lambda+\omega)^3}+\frac{1\cdot 2}{(3\lambda-\omega)^3}-\frac{1\cdot 2}{(3\lambda+\omega)^3}+\frac{1\cdot 2}{(5\lambda-\omega)^3}-\text{etc}\\
\left(\frac{\mathrm{d}^3T}{\mathrm{d}\omega}\right) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\lambda-\omega)^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\lambda+\omega)^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(3\lambda-\omega)^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(3\lambda+\omega)^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(5\lambda-\omega)^4}+\text{etc}\\
\left(\frac{\mathrm{d}^4T}{\mathrm{d}\omega^4}\right) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\lambda-\omega)^5}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\lambda+\omega)^5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(3\lambda-\omega)^5}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(3\lambda+\omega)^5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(5\lambda-\omega)^5}-\text{etc}\\
\left(\frac{\mathrm{d}^5T}{\mathrm{d}\omega^5}\right) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\lambda-\omega)^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\lambda+\omega)^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(3\lambda-\omega)^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(3\lambda+\omega)^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(5\lambda-\omega)^6}+\text{etc}\\
\left(\frac{\mathrm{d}^6T}{\mathrm{d}\omega^6}\right) &= \frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(\lambda-\omega)^7}-\frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(\lambda+\omega)^7}+\frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(3\lambda-\omega)^7}-\frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(3\lambda+\omega)^7}-\frac{1\cdot\cdots\cdot 6}{(5\lambda-\omega)^7}+\text{etc}
\end{aligned}$$

§25 Es wird daher der Mühe wert sein, einfachere Fälle zu entwickeln, die entstehen, indem man $\lambda = 1$ und $\omega = 0$ setzt, sodass $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ und $q = 1$ ist, woher wir haben:

$$\begin{array}{ll}
\text{Für die erste:} & \text{Für die zweite:} \\
S = \dfrac{\pi}{2} & T = 0 \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) = 0 & \left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega}\right) = \dfrac{\pi\pi}{4} \\
\left(\dfrac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega^2}\right) = \dfrac{\pi^3}{8} & \left(\dfrac{\mathrm{dd}T}{\mathrm{d}\omega}\right) = 0 \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}\omega^3}\right) = 0 & \left(\dfrac{\mathrm{d}^3T}{\mathrm{d}\omega^3}\right) = \dfrac{\pi^4}{8} \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) = \dfrac{5\pi^5}{32} & \left(\dfrac{\mathrm{d}^4T}{\mathrm{d}\omega^4}\right) = 0 \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega^5}\right) = 0 & \left(\dfrac{\mathrm{d}^5T}{\mathrm{d}\omega^5}\right) = \dfrac{\pi^6}{4} \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right) = \dfrac{61\pi^5}{128} & \left(\dfrac{\mathrm{d}^6T}{\mathrm{d}\omega^6}\right) = 0 \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}^7S}{\mathrm{d}\omega^7}\right) = 0 & \left(\dfrac{\mathrm{d}^7T}{\mathrm{d}\omega^7}\right) = \dfrac{17\pi^8}{16}.
\end{array}$$

§26 Nach Weglassen der verschwindenden Werte haben wir aus der ersten Reihe die folgenden Integralformeln mit den daher herstammenden Reihen:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}z}{1+zz} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc} \\
&\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16} = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \frac{2}{13^3} - \text{etc} \\
&\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^4}{1+zz} = \frac{5\pi^5}{64} = \frac{24}{1^5} - \frac{24}{3^5} + \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} - \frac{24}{11^5} + \frac{24}{13^5} - \text{etc} \\
&\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^6}{1+zz} = \frac{61\pi^7}{256} = \frac{720}{1^7} - \frac{720}{3^7} + \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} - \frac{720}{11^7} + \frac{720}{13^7} - \text{etc} \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

§27 Aus der anderen Reihe aber haben wir für diesen Fall

$$\int \frac{-\mathrm{d}z\ln z}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\text{etc}$$

$$\int \frac{-\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1-zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{6}{5^4}+\frac{6}{7^4}+\frac{6}{9^4}+\frac{6}{11^4}+\frac{6}{13^4}+\text{etc}$$

$$\int \frac{-\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1-zz} = \frac{\pi^6}{8} = \frac{120}{1^6}+\frac{120}{3^6}+\frac{120}{5^6}+\frac{120}{7^6}+\frac{120}{9^6}+\frac{120}{11^6}+\frac{120}{13^6}+\text{etc}$$

etc

§28 Wie wir aus dem ersten Integral der zweiten Reihe diese Formeln gefolgert haben

$$\int \frac{\mathrm{d}z\ln z}{1-z} = -\frac{\pi\pi}{6} \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathrm{d}z\ln z}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12},$$

können auch die Integralformeln aus den folgenden abgeleitet werden; weil nämlich

$$\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1-zz} = -\frac{\pi^4}{16}$$

ist, wollen wir setzen, dass

$$\int \frac{z\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1-zz} = P$$

ist und es wird

$$\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1-z} = P - \frac{\pi^4}{16} \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1+z} = -P - \frac{\pi^4}{16}$$

sein; nun werde aber $zz = v$ gesetzt, dass $z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{d}v$ und $\ln z = \frac{1}{2}\ln v$ ist und daher $(\ln z)^3 = \frac{1}{8}(\ln v)^3$, wodurch nach Einsetzen

$$P = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{d}v(\ln v)^3}{1-v} = \frac{1}{16}\left(P - \frac{\pi^4}{16}\right)$$

sein wird, woher $16P = P - \frac{\pi}{16}$ wird und daher $P = -\frac{\pi^4}{240}$, und so haben wir diese beiden Integrationen

$$\int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)}{1-z} = -\frac{\pi^4}{15} \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1+z} = -\frac{7\pi^4}{120};$$

es wird aber durch Reihen sein

$$\int\frac{-\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1-z}=\frac{\pi^4}{15}\quad=6\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\text{etc}\right)$$

$$\int\frac{-\mathrm{d}z(\ln z)^3}{1+z}=\frac{7\pi^4}{120}=6\left(\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}-\frac{1}{8^4}+\text{etc}\right)$$

§29 Weiter ist

$$\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1-zz}=-\frac{\pi^6}{8};$$

wir wollen festlegen, dass

$$\int\frac{z\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1-zz}=P$$

ist, dass wir daher erhalten

$$\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1-z}=P-\frac{\pi^6}{8}\quad\text{und}\quad\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1+z}=-P-\frac{\pi^6}{8};$$

nun wollen wir $zz=v$ setzen und es wird

$$P=\frac{1}{64}\int\frac{\mathrm{d}v(\ln v)^5}{1-v}=\frac{1}{64}\left(P-\frac{\pi^6}{8}\right)$$

sein, woher

$$P=-\frac{\pi^6}{504}$$

wird und die daher abgeleiteten Integrationen sind

$$\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1-z}=-\frac{8\pi^6}{63}\quad\text{und}\quad\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1+z}=-\frac{31\pi^6}{252},$$

aber durch Reihen findet man

$$\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1-z}=-\frac{8\pi^6}{63}\quad=-120\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc}\right)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z(\ln z)^5}{1+z}=-\frac{31\pi^6}{252}=-120\left(1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^6}-\text{etc}\right),$$

sodass

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc}=\frac{\pi^6}{945}$$

ist und

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^6}-\frac{1}{8^6}+\text{etc}=\frac{31\pi^6}{30240}=\frac{31\pi^6}{32\cdot 945}.$$

§30 Wir wollen auch die Fälle betrachten, in denen $\lambda = 2$ und $\omega = 1$ sind, sodass $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha\omega = \frac{\pi}{4}$ sind; daher ist $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, woher wir für jede der beiden Reihen die folgenden Werte haben werden:

Für die erste:	Für die zweite:
$S = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$T = \dfrac{\pi}{4}$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}\right) = \dfrac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega}\right) = \dfrac{\pi\pi}{8}$
$\left(\dfrac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}\omega^2}\right) = \dfrac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{dd}T}{\mathrm{d}\omega}\right) = \dfrac{\pi^3}{16}$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}\omega^3}\right) = \dfrac{11\pi^4}{128\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{d}^3T}{\mathrm{d}\omega^3}\right) = \dfrac{\pi^4}{16}$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}\omega^4}\right) = \dfrac{57\pi^5}{512\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{d}^4T}{\mathrm{d}\omega^4}\right) = \dfrac{5\pi^5}{64}$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}^5S}{\mathrm{d}\omega^5}\right) = \dfrac{361\pi^6}{2048\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{d}^5T}{\mathrm{d}\omega^5}\right) = \dfrac{\pi^6}{8}$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}^6S}{\mathrm{d}\omega^6}\right) = \dfrac{2763\pi^7}{8192\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{d}^6T}{\mathrm{d}\omega^6}\right) = \dfrac{61\pi^7}{256}$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}^7S}{\mathrm{d}\omega^7}\right) = \dfrac{24611\pi^8}{32768\sqrt{2}}$	$\left(\dfrac{\mathrm{d}^7T}{\mathrm{d}\omega^7}\right) = \dfrac{17\pi^8}{32}$
etc.	etc

§31 Daher resultieren die folgenden Integrationen mit den entsprechenden Reihen; aus der ersten Reihe entsteht zuerst

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(1+zz)dz}{1+z^4} &&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} &&= 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\text{etc}\\
&\int \frac{-(1-zz)dz(\ln z)}{1+z^4} &&= \frac{\pi\pi}{2\sqrt{2}} &&= 1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}-\frac{1}{13^2}+\text{etc}\\
&\int \frac{(1+zz)dz(\ln z)^2}{1+z^4} &&= \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}} &&= \frac{2}{13}+\frac{2}{3^3}-\frac{2}{5^3}-\frac{2}{7^3}+\frac{2}{9^3}+\frac{2}{11^3}-\frac{2}{13^3}-\text{etc}\\
&\int \frac{-(1-zz)dz(\ln z)^3}{1+z^4} &&= \frac{11\pi^4}{128\sqrt{2}} &&= \frac{6}{1^4}-\frac{6}{3^4}-\frac{6}{5^4}+\frac{6}{7^4}+\frac{6}{9^4}-\frac{6}{11^4}-\frac{6}{13^4}+\text{etc}\\
&\int \frac{(1+zz)dz(\ln z)^4}{1+z^4} &&= \frac{57\pi^5}{512\sqrt{2}} &&= \frac{24}{1^5}+\frac{24}{3^5}-\frac{24}{5^5}-\frac{24}{7^5}+\frac{24}{9^5}+\frac{24}{11^5}-\frac{24}{13^5}-\text{etc}\\
&\int \frac{-(1-zz)dz(\ln z)^5}{1+z^4} &&= \frac{361\pi^6}{2048\sqrt{2}} &&= \frac{120}{1^6}-\frac{120}{3^6}-\frac{120}{5^6}+\frac{120}{7^6}+\frac{120}{9^6}-\frac{120}{11^6}-\frac{120}{13^6}+\text{etc}\\
&\int \frac{(1+zz)dz(\ln z)^6}{1+z^4} &&= \frac{2763\pi^7}{8192\sqrt{2}} &&= \frac{720}{1^7}+\frac{720}{3^7}-\frac{720}{5^7}-\frac{720}{7^7}+\frac{720}{9^8}+\frac{720}{11^8}-\frac{720}{13^8}-\text{etc}\\
&\int \frac{-(1-zz)dz(\ln z)^7}{1+z^4} &&= \frac{24611\pi^8}{32768\sqrt{2}} &&= \frac{5040}{1^8}-\frac{5040}{3^8}-\frac{5040}{5^8}+\frac{5040}{7^8}+\frac{5040}{9^8}-\frac{5040}{11^8}-\frac{5040}{13^8}+\text{etc}
\end{aligned}$$

§32 Auf dieselbe Weise werden die Integrationen der anderen Ordnung zusammen mit den Reihen sein:

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc}$$
$$\int \frac{-dz(\ln z)}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc}$$
$$\int \frac{dz(\ln z)^2}{1+zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} + \frac{6}{11^4} + \frac{6}{13^4} + \text{etc}$$
$$\int \frac{-dz(\ln z)^3}{1+zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} + \frac{6}{11^4} + \frac{6}{13^4} + \text{etc}$$
$$\int \frac{dz(\ln z)^4}{1+zz} = \frac{5\pi^5}{64} = \frac{24}{1^5} - \frac{24}{3^5} + \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} - \frac{24}{11^5} + \frac{24}{13^5} - \text{etc}$$
$$\int \frac{dz(\ln z)^5}{1-zz} = \frac{\pi^6}{8} = \frac{120}{1^6} + \frac{120}{3^6} + \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} + \frac{120}{11^6} + \frac{120}{13^6} + \text{etc}$$
$$\int \frac{dz(\ln z)^6}{1+zz} = \frac{61\pi^7}{256} = \frac{720}{1^7} - \frac{720}{3^7} + \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} - \frac{720}{11^7} + \frac{720}{13^7} - \text{etc}$$
$$\int \frac{-dz(\ln z)^7}{1-zz} = \frac{17\pi^8}{32} = \frac{5040}{1^8} + \frac{5040}{3^8} + \frac{5040}{5^8} + \frac{5040}{7^8} + \frac{5040}{9^8} + \frac{5040}{11^8} + \frac{5040}{13^8} + \text{etc.}$$

Diese Reihen aber sind dieselben, welche wir schon oben in 26 und 27 gefolgert haben.

§33 Außerdem aber verdienen diese Fälle besonders bemerkt zu werden, in welchen die Integrale in leichtere Formen aufgelöst werden können. Diese Auflösung bezieht sich aber nur auf den Bruch

$$\pm\frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}},$$

ohne den Faktor $\frac{dz}{z}(\ln z)^{\mu}$; um dies zu zeigen, wollen wir zuerst $\lambda = 3$ und $\omega = 1$ setzen, woher $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = \sin\frac{\pi}{6}$ und $q = \cos\frac{\pi}{6}$ wird; dann tauchen aber abwechselnd in der ersten Reihe die folgenden Brüche auf:

I.

$$\frac{zz(1+zz)}{1+z^6} = \frac{zz}{1-zz+z^4},$$

welche für $zz = v$ gesetzt übergehen in

$$\frac{v}{1-v+v^2};$$

weil also $\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{dv}{v}$ ist und $\ln z = \frac{1}{2}\ln v$, kann daher eine solche Form

$$\frac{1}{2^{2i+1}}\int\frac{dv(\ln v)^{2i}}{1-v+vv}$$

integriert werden, selbstredend in dem Fall, in dem $v=1$ ist,
II.

$$-\frac{zz(1-zz)}{1+z^6} = \frac{2}{3(1+zz)} - \frac{2-zz}{3(1-zz+z^4)},$$

welche für $zz = v$ übergeht in

$$\frac{2}{3(1+v)} - \frac{2-v}{3(1-v+vv)},$$

welche Form also mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^{2i+1}$ oder $\frac{1}{2^{2i+1}}\frac{dv}{v}(\ln v)^{2i+1}$ immer integriert werden kann, nachdem $v=1$ gesetzt worden ist.

§34 In demselben Fall liefert die zweite Ordnung die folgenden Auflösungen:
I.

$$\frac{zz(1-zz)}{1-z^6} = \frac{zz}{1+zz+z^4} = \frac{v}{1+v+vv},$$

welche mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^{2i}$ oder $\frac{1}{2^{2i+1}}\frac{dv}{v}(\ln v)^{2i}$ multipliziert immer integriert werden können.
II.

$$\frac{-zz(1+zz)}{1-z^6} = -\frac{2}{3(1-zz)} + \frac{2+zz}{3(1+zz+z^4)},$$

welche für $zz = v$

$$-\frac{2}{3(1-v)} + \frac{2+v}{3(1+v+vv)}$$

wird, welche Formeln also mit $\frac{dv}{v}(\ln v)^{2i+1}$ immer integrierbar sind; weil aber in dieser Auflösung die Zähler sich nicht durch z oder v teilen lassen, braucht man eine andere Auflösung, die man findet mit

$$\frac{-zz(1+zz)}{1-z^6} = -\frac{2zz}{3(1-zz)} - \frac{zz(1+2zz)}{3(1+zz+z^4)}$$

oder

$$\frac{-2v}{3(1-v)} - \frac{v(1+2v)}{3(1+v+vv)},$$

welche Formeln mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^{2i+1}$ oder $\frac{1}{2^{2i+2}}\frac{dv}{v}(\ln v)^{2i+1}$ multipliziert auch eine Integration zulassen.

§35 Weiter, wobei $\lambda = 3$ bleibt, werde $\omega = 2$ gesetzt, sodass $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = \sin\frac{\pi}{3}$ und $q = \cos\frac{\pi}{3}$ ist, und aus der ersten Ordnung werden die folgenden Auflösungen entspringen
I.
$$\frac{z(1+z^4)}{1+z^6} = \frac{2z}{3(1+zz)} + \frac{z(1+zz)}{3(1-zz+z^4)},$$
woher durch Multiplizieren mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^2 i$ die Formeln, die im Falle $z = 1$ eine Integration zulassen, entstehen:
II.
$$\frac{-z(1-z^4)}{1+z^6} = \frac{-z(1-zz)}{1-zz+z^4},$$
die mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^{2i+1}$ multipliziert im Fall $z = 1$ integriert werden können. Aus der zweiten Reihe gehen aber diese folgenden Reduktionen hervor:
I.
$$\frac{z(1-z^4)}{1-z^6} = \frac{z(1+zz)}{1+zz+z^4},$$
welche mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^{2i}$ multipliziert integrierbar sind;
II.
$$\frac{-z(1+z^4)}{1-z^6} = -\frac{2z}{3(1-zz)} - \frac{z(1-zz)}{3(1+zz+z^4)},$$
welche Formeln mit $\frac{dz}{z}(\ln z)^{2i+1}$ multipliziert integrierbar werden.

§36 Es wird daher der Mühe Wert sein, diese Integrale durch direkte Berechnung zu entwickeln, daher erreichen wir aus *I.* in 33 die folgenden Integrationen:

$$\begin{aligned}
&1. \quad \int \frac{dv}{1-v+vv} = \alpha\frac{1}{q} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\
&2. \quad \int \frac{dv(\ln v)^2}{1-v+vv} = \alpha^3\left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q}\right) = \frac{5\pi^3}{324\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

darauf gibt aber Formel II desselben Paragraphen, wo auch diese Reduktion Geltung hat

$$\frac{-zz(1-zz)}{1+z^6} = -\frac{2zz}{3(1+zz)} - \frac{zz(1-2zz)}{3(1-zz+z^4)} = -\frac{2v}{3(1+v)} - \frac{v(1-2v)}{3(1-v+vv)}$$

mit $\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}v}{v}(\ln v)$ multipliziert

$$-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}v(\ln v)}{1+v}-\frac{1}{12}\int\frac{\mathrm{d}v(1-2v)(\ln v)}{1-v+vv}=\alpha\alpha\frac{p}{qq}=\frac{\pi\pi}{54},$$

von welchen Formeln die erste eine Integration zulässt; es ist nämlich

$$\int\frac{\mathrm{d}v(\ln v)}{1+v}=-\frac{\pi\pi}{12},$$

woher man die zweite findet

$$\int\frac{\mathrm{d}v(1-2v)(\ln v)}{1-v+vv}=-\frac{\pi\pi}{18}.$$

§37 Aus I in 34 folgt

$$\begin{aligned} &1. \quad \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}v}{1+v+vv}=\frac{\alpha p}{q}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\ &2. \quad \frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}v(\ln v)^2}{1+v+vv}=\alpha^3\frac{2p}{q^3}=\frac{\pi^3}{81\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

aus II wird danach aber

$$-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}v(\ln v)}{1-v}-\frac{1}{12}\int\frac{\mathrm{d}v(1+2v)(\ln v)}{1+v+vv}=\alpha\alpha\frac{1}{qq}=\frac{\pi\pi}{27};$$

wir haben aber oben gefunden, dass

$$\int\frac{\mathrm{d}v(\ln v)}{1-v}=-\frac{\pi\pi}{6}$$

ist, nach Einsetzen welches Wertes

$$\int\frac{\mathrm{d}v(1+2v)(\ln v)}{1+v+vv}=-\frac{\pi\pi}{9}$$

wird; es scheint daher besonders der Mühe Wert, die letzten Integrationen entwickelt zu haben.

§38 Wenn daher die Integralformeln

$$\int \frac{dv(1-2v)(\ln v)}{1-v+vv} \quad \text{und} \quad \int \frac{dv(1+2v)(\ln v)}{1+v+vv}$$

in Reihen verwandelt werden, findet man

$$\int \frac{dv(1-2v)(\ln v)}{1-v+vv} = -1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \frac{2}{36} - \frac{1}{49} + \text{etc}$$

und

$$\int \frac{dv(1+2v)(\ln v)}{1+v+vv} = -1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{2}{36} - \frac{1}{49} + \text{etc},$$

woher wir diese zwei Summationen, unserer Aufmerksamkeit nicht unwürdig, folgern

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{2}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} - \frac{2}{81} - \frac{1}{100} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{10} \\
&\text{II.} \quad 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{2}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{2}{81} + \frac{1}{100} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{9},
\end{aligned}$$

wovon die erste von der zweiten abgezogen

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{16} - \frac{4}{36} + \frac{2}{64} + \frac{2}{100} - \text{etc} = \frac{\pi\pi}{18}$$

liefert, deren Doppeltes zu dieser Reihe führt

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{2}{36} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{9};$$

weil diese ja mit der zweiten übereinstimmt, ist die Gültigkeit beider Summationen hinreichend bestätigt worden; wenn also die zweite vom Doppelten der ersten abgezogen wird, bleibt diese bemerkenswerte Reihe zurück

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{9} - \frac{3}{16} + \frac{1}{25} + \frac{6}{36} + \frac{1}{49} - \frac{3}{64} - \frac{2}{81} - \frac{3}{100} + \text{etc} = 0,$$

welche in Perioden, die 6 Terme enthalten, aufgeteilt die klare Ordnung in den Zahlen erkenntlich macht, die natürlich 1, −3, −2, −3, +1, +6 sind.

ZUSATZ

§39 So wie wir die oberen Integrationen durch wiederholte Differentationen der Formeln S und T gefolgert haben, so erlangen wir auch durch Integration andere und völlig einzigartige Integrationen; wenn nämlich wie oben [3]

$$S = \int P \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

war, wobei P jene Formel

$$\frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}}$$

ist, von der man sieht, dass sie außer z auch den Exponenten ω als Variable involviert, so wird durch die natürliche Beschaffenheit von Integralen, die zwei Variablen involvieren,

$$\int S \mathrm{d}\omega = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} \int P \mathrm{d}\omega$$

sein, wo in der ersten Integralformel $\int S \mathrm{d}\omega$, während z als Konstante gesehen wird, sofort $z = 1$ geschrieben werden kann; durch dieses vorausgeschickte Lemma wollen wir also, weil

$$\int P \mathrm{d}\omega = \frac{-z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}}$$

ist, die beiden oben behandelten Formeln, natürlich S und T, auf diese Weise entwickeln, und weil wir jede von beiden auf dreierlei Weise angegeben haben, als erstes natürlich durch eine unendliche Reihe, als zweites durch eine endliche Formel und als drittes durch eine Integralformel; so werden auch die Größen, die für die Integrale $\int S \mathrm{d}\omega$ und $\int T \mathrm{d}\omega$ entstehen, einander gleich sein.

§40 Wir wollen daher von der Formel S aus beginnen; da durch eine unendliche Reihe

$$S = \frac{1}{\lambda - \omega} + \frac{1}{\lambda + \omega} - \frac{1}{3\lambda - \omega} - \frac{1}{3\lambda + \omega} + \frac{1}{5\lambda - \omega} + \frac{1}{5\lambda + \omega} - \text{etc}$$

gewesen ist, wird

$$\int S \mathrm{d}\omega = -\ln(\lambda - \omega) + \ln(\lambda + \omega) - \ln(3\lambda - \omega) - \ln(3\lambda + \omega) + \text{etc} + C$$

sein, welche Konstante sich so definieren lässt, dass das Integral für $\omega = 0$ gesetzt verschwindet, wodurch

$$\int S\mathrm{d}\omega = \ln\frac{\lambda+\omega}{\lambda-\omega} + \ln\frac{3\lambda-\omega}{3\lambda+\omega} + \ln\frac{5\lambda+\omega}{5\lambda-\omega} + \ln\frac{7\lambda-\omega}{7\lambda+\omega} + \text{etc}$$

sein wird, welcher Ausdruck zu folgendem reduziert wird

$$\int S\mathrm{d}\omega = \ln\frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)(9\lambda+\omega)\cdot\text{etc}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)(9\lambda-\omega)\cdot\text{etc}};$$

da darauf durch die endliche Formel

$$S = \frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

war, wird

$$\int S\mathrm{d}\omega = \int\frac{\pi\mathrm{d}\omega}{2\lambda\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

sein, und wenn dort der Kürze wegen $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \varphi$ gesetzt wird, sodass $\mathrm{d}\omega = \frac{2\lambda\mathrm{d}\varphi}{\pi}$ ist, so wird

$$\int S\mathrm{d}\omega = \int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$$

sein; weil wir aber wissen, dass

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{\sin v} = \ln\tan\frac{v}{2}$$

ist, wollen wir $\sin v = \cos\varphi$ nehmen oder $v = 90^\circ - \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ und es wird $\mathrm{d}v - \mathrm{d}\varphi$ sein, woher

$$\int\frac{-\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

wird; weil ja aber $\varphi = \frac{\pi\omega}{2\lambda}$ ist, wird $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda}$ sein, woher unser Integral

$$\int S\mathrm{d}\omega = -\ln\tan\frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda} = \ln\tan\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}$$

sein wird; als drittes wird aus der Integralformel

$$S = \int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

aber erschlossen, dass

$$\int S \mathrm{d}\omega = \int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}} \frac{\mathrm{d}z}{z \ln z}$$

sein wird, welches Integral angenommen wird, von der Grenze $z=0$ bis hin zur Grenze $z=1$ erstreckt zu werden; und so werden die drei gefundenen Werte einander gleich sein. Und damit wegen der hinzuzufügenden Konstante nicht irgendein Zweifel übrig bleibt, es verschwinden die Ausdrücke von selbst im Fall $\omega=0$.

§41 Wir wollen daher als erstes die Gleichheit zwischen der ersten Formel und der zweiten betrachten, und weil jede von beiden ein Logarithmus ist, wird

$$\tan\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)\cdot\text{etc}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda+\omega)\cdot\text{etc}}$$

sein; weil daher der Zähler dieses Bruches entweder in den Fällen $\omega=-\lambda$, $\omega=3\lambda$, $\omega=-5\lambda$, $\omega=7\lambda$, etcverschwindet, ist es klar, dass in demselben Fall auch der Tangens Null wird; der Nenner aber verschwindet entweder in den Fällen $\omega=\lambda$, $\omega=-3\lambda$, $\omega=5\lambda$, $\omega=-7\lambda$, etc, in welchen Fällen der Tangens ins Unendliche wachsen muss; das passiert auch wie es soll. Im Übrigen stimmt dieser Ausdruck mit diesen, die ich schon vor langer gefunden habe und in der „Einleitung“ dargelegt habe, überein.

§42 Das unendliche Produkt kann aber durch andernorts gefestigte Prinzipien mithilfe dieses Lemmas, dass sich sehr weit erstreckt, auf Integralformeln zurückgeführt werden

$$\frac{a(c+b)(a+k)(c+b+k)(a+2k)(c+b+2k)\cdot\text{etc}}{b(c+a)(b+k)(c+a+k)(b+2k)(c+a+2k)\cdot\text{etc}} = \frac{\int z^{c-1}\mathrm{d}z(1-z^k)^{\frac{b-k}{k}}}{\int z^{c-1}\mathrm{d}z(1-z^k)^{\frac{a-k}{k}}},$$

wenn nach jeder von beiden Integrationen $z=1$ gesetzt wird. In unserem Fall wird daher $a=\lambda+\omega$, $b=\lambda-\omega$, $c=2\lambda$ und $k=4\lambda$ sein, woher der Wert unseres Produkts

$$\frac{\int z^{2\lambda-1}\mathrm{d}z(1-z^{4\lambda})^{\frac{-3\lambda-\omega}{4\lambda}}}{\int z^{2\lambda-1}\mathrm{d}z(1-z^{4\lambda})^{\frac{-3\lambda+\omega}{4\lambda}}} = \tan\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}$$

sein wird; diese Integralformeln aber werden angenehmer, indem man $z^{2\lambda} = y$ setzt, dann wird nämlich

$$\tan\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{\int \mathrm{d}y(1-yy)^{\frac{-3\lambda-\omega}{4\lambda}}}{\int \mathrm{d}y(1-yy)^{\frac{-3\lambda+\omega}{4\lambda}}}$$

sein, welcher Ausdruck natürlich der ganzen Aufmerksamkeit würdig scheint. Schließlich wird aus der gefundenen Integralformel auch sein:

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z\ln z} = \ln\tan\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}.$$

§43 Es wird daher der Mühe Wert sein auch spezielle Fälle zu entwickeln. Es sei daher zuerst $\lambda = 2$ und $\omega = 1$ und durch den unendlichen Ausdruck wird

$$\int S\mathrm{d}\omega = \ln\frac{3\cdot 5}{1\cdot 7}\cdot\frac{11\cdot 13}{9\cdot 15}\cdot\frac{19\cdot 21}{17\cdot 23}\cdot\frac{27\cdot 29}{25\cdot 31}\cdot\frac{35\cdot 37}{33\cdot 39}\cdot\text{etc}$$

sein, danach haben wir durch den endlichen Ausdruck $\int S\mathrm{d}\omega = \ln\tan\frac{3\pi}{8}$ und durch die Integralformel $\int S\mathrm{d}\omega = \int\frac{-(1-zz)}{1+z^4}\frac{\mathrm{d}z}{\ln z}$, dann aber aus der Gleichheit der zwei ersten Ausdrücke

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{3\cdot 5}{1\cdot 7}\cdot\frac{11\cdot 13}{9\cdot 15}\cdot\frac{19\cdot 21}{17\cdot 23}\cdot\text{etc}$$

und daher durch die beiden Integralformeln

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{\int \mathrm{d}y(1-yy)^{-\frac{7}{8}}}{\int \mathrm{d}y(1-yy)^{-\frac{5}{8}}}.$$

§44 Wir wollen nun festlegen, dass $\lambda = 3$ und $\omega = 1$ ist und es wird durch den unendlichen Ausdruck

$$\int S\mathrm{d}\omega = \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 10}{7\cdot 11}\cdot\frac{14\cdot 16}{13\cdot 17}\cdot\frac{20\cdot 22}{19\cdot 23}\cdot\text{etc}$$

sein, als zweites durch den endlichen Ausdruck

$$\int S\mathrm{d}\omega = \ln\tan\frac{\pi}{3} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3,$$

sodass

$$\sqrt{3} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 19}{7\cdot 11}\cdot\frac{14\cdot 16}{13\cdot 17}\cdot\text{etc}$$

sein wird; der Wert des Produkts wird durch Integralformeln

$$\frac{\int \mathrm{d}y(1-yy)^{-\frac{5}{6}}}{\int \mathrm{d}y(1-yy)^{-\frac{2}{3}}}$$

sein. Schließlich liefert die Integralformel

$$\int S\mathrm{d}\omega = \int \frac{-z(1-zz)}{1+z^6}\frac{\mathrm{d}z}{\ln z}.$$

§45 Auf dieselbe Weise wollen wir die andere Formel T entwickeln, deren Wert durch eine Reihe

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc}$$

sein wird; daher wird

$$\int T\mathrm{d}\omega = -\ln\lambda - \omega - \ln(\lambda+\omega) - \ln(3\lambda-\omega) - \ln(3\lambda+\omega) - \text{etc}$$

sein; weil dieser Ausdruck für $\omega = 0$ verschwindet, wird

$$\int T\mathrm{d}\omega = \ln\frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\text{etc}$$

sein; weil aber durch durch die endliche Form $T = \frac{\pi}{2\lambda}\tan\frac{\pi\omega}{2\lambda}$ ist, wird

$$\int T\mathrm{d}\omega = \int \frac{\pi\mathrm{d}\omega}{2\lambda}\tan\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

sein, wo für $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \varphi$

$$\int T\mathrm{d}\omega = \int \mathrm{d}y\tan\varphi = -\ln\cos\varphi$$

sein wird, sodass

$$\int T\mathrm{d}\omega = -\ln\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

ist, dessen Wert im Fall $\omega = 0$ von selbst gleich 0 wird; schließlich haben wir durch die Integralformel

$$\int T\mathrm{d}\omega = \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{z\ln z};$$

das Integral muss ebenso von der Grenze $z = 0$ bis zur Grenze $z = 1$ erstreckt werden.

§46 Der Vergleich der beiden ersten Werte liefert unmittelbar diese Gleichung

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{49\lambda\lambda}{49\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\text{etc}$$

$$\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \left(1-\frac{\omega\omega}{\lambda\lambda}\right)\left(1-\frac{\omega\omega}{9\lambda\lambda}\right)\left(1-\frac{\omega\omega}{25\lambda\lambda}\right)\left(1-\frac{\omega\omega}{49\lambda\lambda}\right)\cdot\text{etc}$$

oder wenn die einzelnen Faktoren wieder in einfache entwickelt werden, wird

$$\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\lambda+\omega}{\lambda}\cdot\frac{\lambda-\omega}{\lambda}\cdot\frac{3\lambda+\omega}{3\lambda}\cdot\frac{3\lambda-\omega}{3\lambda}\cdot\frac{5\lambda+\omega}{5\lambda}\cdot\frac{5\lambda-\omega}{5\lambda}\cdot\text{etc},$$

welche Formel mit der oben (42) dargebotenen Reduktion verglichen gibt:

$$a=\lambda+\omega,\quad b=\lambda,\quad c=-\omega,\quad \text{und}\quad k=2\lambda,$$

woher wir erschließen, dass gilt

$$\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\int z^{-\omega-1}dz(1-z^{2\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{-\omega-1}dz(1-z^{2\lambda})^{\frac{\omega-\lambda}{2\lambda}}}.$$

Um aber aber den negativen Exponenten $z^{-\omega-1}$ zu entfernen, wollen wir das obere Produkt so darstellen

$$\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\lambda-\omega}{\lambda}\cdot\frac{\lambda+\omega}{\lambda}\cdot\frac{3\lambda-\omega}{3\lambda}\cdot\frac{3\lambda+\omega}{3\lambda}\cdot\text{etc}$$

und es wird nach angestelltem Vergleich

$$a=\lambda-\omega,\quad b=\lambda,\quad c=\omega\quad \text{und}\quad k=2\lambda$$

sein und so wird durch die Integralformeln

$$\cos\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\int z^{\omega-1}dz(1-z^{2\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{\omega-1}dz(1-z^{2\lambda})^{-\frac{\lambda+\omega}{2\lambda}}}$$

sein, welcher Ausdruck nicht auf eine leichtere Form zurückgeführt werden kann.

§47 Es sei nun sogar $\lambda = 2$ und $\omega = 1$ und unsere drei Ausdrücke werden sein:
I.
$$\int T\mathrm{d}\omega = \ln\frac{4}{3}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{196}{195}\cdot\text{etc}$$
oder
$$\int T\mathrm{d}\omega = \ln\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\frac{14\cdot 14}{13\cdot 15}\cdot\text{etc.}$$
II.
$$\int T\mathrm{d}\omega = -\ln\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2,$$
sodass
$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\frac{14\cdot 14}{13\cdot 15}\cdot\text{etc}$$
ist, welches Produkt durch die Integralformeln so ausgedrückt wird
$$\frac{\int \mathrm{d}z(1-z^4)^{-\frac{3}{4}}}{\int \mathrm{d}z(1-z^4)^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2};$$
III.
$$\int T\mathrm{d}\omega = \int\frac{-(1+zz)}{1-z^4}\frac{\mathrm{d}z}{\ln z} = \int\frac{-\mathrm{d}z}{(1-zz)\ln z},$$
welches Integral also von der Grenze $z = 0$ bis hin zu $z = 1$ erstreckt den Wert $\frac{1}{2}\ln 2$ liefert, die Beschaffenheit welcher Gleichheit natürlich schwer klar klar wird.

§48 Es sei schließlich wie oben $\lambda = 3$ und $\omega = 1$ und die 3 Formeln verhalten sich so
I.
$$\int T\mathrm{d}\omega = \ln\frac{9}{8}\cdot\frac{81}{80}\cdot\frac{225}{224}\cdot\text{etc} = \ln\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\frac{15\cdot 15}{14\cdot 16}\cdot\frac{21\cdot 21}{20\cdot 22}\cdot\text{etc}$$
II.
$$\int T\mathrm{d}\omega = -\ln\cos\frac{\pi}{6} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$
sodass
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\frac{15\cdot 15}{14\cdot 16}\cdot\frac{21\cdot 21}{20\cdot 22}\cdot\text{etc}$$

ist und daher durch 2 Integralformeln

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\int \mathrm{d}z(1-z^6)^{-\frac{1}{2}}}{\int \mathrm{d}z(1-z^6)^{-\frac{2}{3}}};$$

III.

$$\int T\mathrm{d}\omega = \int \frac{-(1+zz)}{1-z^6}\frac{\mathrm{d}z}{\ln z},$$

die für $zz = v$ gesetzt übergeht in diese

$$\int T\mathrm{d}\omega = \int \frac{-\mathrm{d}v(1+v)}{(1-v^3)\ln v}.$$

Daher ist also klar, dass man mit dieser neuen Methode zu Integralformeln gelangt, die sich bis jetzt durch bekannte Methoden auf keine Weise entwickeln oder zumindest miteinander vergleichen lassen.