# Über den Wert der Integralformel $\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz$ in dem Fall, in dem nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird*

Leonhard Euler

**§1** Hier ist mir vorgelegt, die zwei besonderen Theoreme, zu denen ich schon längst aus der Betrachtung der Kreisbögen, die entweder denselben Sinus oder Tangens haben, geführt worden war, aus den Prinzipien der Integralrechnung zu beweisen; die zwei Theoreme verhalten sich aber so:

$$\text{I.} \quad \int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{tang} \frac{m\pi}{n}},$$

wenn die Integration von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt wird, wo $\pi$ die Semiperipherie des Kreises bezeichnet, dessen Radius gleich 1 ist. Ich habe zwar diese Integralformeln schon integriert in „*Calculi Integralis*" gegeben, dort aber die Hilfe der Integration, natürlich die Auflösung des Nenners $1 \pm z^n$, dann aber auch die Auflösung des Bruches in Partialbrüche aus meiner „*Introductio*" in Anspruch genommen; nun aber, damit es nicht nötig ist, die Stützen anders woher zu beschaffen, möchte ich bei der Integration alle Prinzipien, auf die es gestützt ist, kürzer zusammenfassen; besonders erfordert aber die Reduktion zu dem Fall, in dem nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird, spezielle Kunstgriffe bezüglich der Summation der Reihen, die ich auch in den

*Originaltitel: „De valore formulae integralis $\int (z^{m-1} \pm z^{n-m-1})/(1 \pm z^n) dz$ casu quo post integrationem ponitur $z = 1$", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 19*, 1775, pp. 3-29", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 17, pp. 358 - 383 ", Eneström-Nummer E462, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" folgenden Paragraphen klar erörtern werde; diese Betrachtung erscheint von umso größerer Bedeutung, weil die ähnliche Integration auch in den sich viel weiter erstreckenden Formeln glückt, von welcher Art

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} \mathrm{d}z (\mathrm{l}z)^{\mu}$$

sind, wenn der Exponent $\mu$ ganze Zahlen bezeichnet, so wie ich genauer bei anderer Gelegenheit zeigen werde.

## Problem

§2 *Das Problem ist, die Differentialform*

$$\frac{z^{m-1}\mathrm{d}z}{1+z^n}$$

*zu integrieren, wo natürlich $m < n$ sein muss.*

## Lösung

Hier muss daher der Nenner $1+z^n$ in seine einfachen Faktoren aufgelöst werden; dort ist aber vor allem zu bemerken, wenn $n$ eine ungerade Zahl war, dass ein Faktor $1+z$ sein wird; für die übrigen imaginären Faktoren werden zwei in dieser Form

$$pp - 2pz\cos\varphi + zz$$

enthalten sein, die 0 gesetzt

$$z = p(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

liefert. In denselben Fällen muss der Nenner $1+z^n$ verschwinden. Weil daher

$$z = p(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

ist, wird

$$zz = pp(\cos 2\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 2\varphi)$$
$$z^3 = p^3(\cos 3\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 3\varphi)$$

sein und

$$z^n = p^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi);$$

nach Einsetzen dieser Werte anstelle von $z^n$ wird

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & 1+z^n = 1+p^n\cos n\varphi + p^n\sqrt{-1}\sin n\varphi = 0 \\ \text{II.}\quad & 1+z^n = 1+p^n\cos n\varphi - p^n\sqrt{-1}\sin n\varphi = 0 \end{aligned}$$

sein, deren Summe die Gleichung

$$2+2p^n\cos n\varphi = 0,$$

liefert, die Differenz derselben aber

$$2p^n\sqrt{-1}\sin n\varphi = 0;$$

aus der letzteren folgt $\sin n\varphi = 0$, aus der ersten aber

$$1+p^n\cos n\varphi = 0,$$

was sich nicht rational machen lässt, außer wenn $p=1$ und $\cos n\varphi = -1$ ist, in welchen Fall $\sin n\varphi = 0$ ist, wie es die Bedingung aus der letzten Formel erfordert; aber alle Winkel, deren Kosinus gleich $-1$ ist, sind

$$\pi, \quad 3\pi, \quad 5\pi, \quad 7\pi, \quad \text{etc.},$$

welchen der Winkel $n\varphi$ also gleich werden kann; daher erhalten wir für $\varphi$ die folgenden Werte

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{5\pi}{n}, \quad \frac{7\pi}{n}, \quad \text{etc.},$$

aus welchen so viele genommen werden müssen, bis schließlich der Zähler $1+z^n$ herauskommt, so wie es leicht aus den einzelnen Fällen beurteilt wird:

I. Wenn $n=1$ ist, wird $\varphi=\pi$ sein und daher

$$1+z = 1+z;$$

II. Wenn $n=2$ ist, wird $\varphi = 90^\circ$ sein und daher

$$1+zz = 1+zz;$$

III. Wenn $n=3$ ist, wird $\varphi = 60^\circ$ und $= 180^\circ$ sein und daher

$$1+z^3 = (1+z)(1-z+zz);$$

IV. Wenn $n = 4$ ist, wird $\varphi = 45°$ und $= 135°$ sein und daher

$$1 + z^4 = (1 - z\sqrt{2} + zz)(1 + z\sqrt{2} + zz);$$

V. Wenn $n = 5$ ist, wird $\varphi = 36°$ und $= 108°$ und $= 180°$ sein und daher

$$1 + z^5 = (1 + z)(1 + z\cos 72° + zz)(1 - 2z\cos 36° + zz).$$

Weil daher im Allgemeinen ein doppelter Faktor des Zählers $1 + z^n$

$$1 - 2z\cos\varphi + zz$$

ist, wenn wir dem Winkel $\varphi$ den geforderten Wert zuteilen, involviert der Bruch

$$\frac{z^{m-1}}{1 + z^n}$$

den Partialbruch dieser Form

$$\frac{A + Bz}{1 - 2z\cos\varphi + zz},$$

wo die ganze Aufgabe zur Bestimmung der Koeffizienten $A$ und $B$ übergeht. Diese werden aber leicht gefunden, wenn wir die einfachen imaginären Faktoren betrachten, welche

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad z - \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi, \\ &\text{II.} \quad z - \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi \end{aligned}$$

sind; dann aber involviert der vorgelegte Bruch solche Partialbrüche

$$\frac{\alpha}{z - \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi} + \frac{\beta}{z - \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}.$$

Für das Finden des Koeffizienten $\alpha$ setze man

$$\frac{z^{m-1}}{1 + z^n} = \frac{\alpha}{z - \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi} + R,$$

wo $R$ alle übrigen Partialbrüche umfasst; es sei aber zur Kürze also

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = f,$$

sodass wir haben

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z-f} + R$$

oder, indem man mit $z-f$ multipliziert,

$$\frac{z^m - fz^{m-1}}{1+z^n} = \alpha + R(z-f),$$

und daher, indem man $z=f$ nimmt, wir

$$\alpha = \frac{z^m - fz^{m-1}}{1+z^n}$$

haben im Falle $z=f$. In diesem Falle verschwindet aber Zähler wie der Nenner; es wird also

$$\alpha = \frac{mz^{m-1} - (m-1)fz^{m-2}}{nz^{n-1}}$$

sein und wiederum für $z=f$ gesetzt

$$\alpha = \frac{f^{m-1}}{nf^{n-1}} = \frac{1}{n} f^{m-n}.$$

Weil daher $f = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$ ist, wird

$$f^{m-n} = \cos(m-n)\varphi + \sqrt{-1}\sin(m-n)\varphi$$

sein und daher

$$\alpha = \frac{1}{n}\left(\cos(m-n)\varphi + \sqrt{-1}\sin(m-n)\varphi\right)$$

und

$$\beta = \frac{1}{n}\left(\cos(m-n)\varphi - \sqrt{-1}\sin(m-n)\varphi\right);$$

Nach dem Fund dieser Werte werden unsere Partialbrüche sein

$$\frac{\alpha}{z-\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi} + \frac{\beta}{z-\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi},$$

die auf den Hauptnenner gebracht geben

$$\frac{(\alpha+\beta)z - (\alpha+\beta)\cos\varphi + (\alpha-\beta)\sqrt{-1}\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+zz}$$

oder, indem anstelle von $\alpha$ und $\beta$ die gefundenen Werte eingesetzt werden,

$$\frac{\frac{2z}{n}\cos(m-n)\varphi-\frac{2}{n}\cos\varphi\cos(m-n)\varphi-\frac{2}{n}\sin\varphi\sin(m-n)\varphi}{1-2z\cos\varphi+zz};$$

und durch diesen Partialbruch mit dem gegebenen

$$\frac{A+Bz}{1-2z\cos\varphi+zz}$$

verglichen berechnen wir

$$A=-\frac{2}{n}\cos\varphi\cos(m-n)\varphi-\frac{2}{n}\sin\varphi\sin(m-n)\varphi=-\frac{2}{n}\cos(m-n-1)\varphi$$

und

$$B=\frac{2}{n}\cos(m-n)\varphi;$$

weil aber $\sin n\varphi=0$ ist und $\cos n\varphi=-1$, wird $\cos(m-n)\varphi=-\cos m\varphi$ sein und $\sin(m-n)\varphi=-\sin m\varphi$ und daher

$$A=\frac{2}{n}\cos(m-1)\varphi \quad \text{und} \quad B=-\frac{2}{n}\cos m\varphi;$$

als logische Konsequenz entsteht aus diesem Partialbruch das Integral

$$B\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\varphi+zz}+\frac{A+B\cos\varphi}{\sin\varphi}\mathrm{Atang}\frac{z-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

wenn dort anstelle von $A$ und $B$ die Werte eingesetzt werden, wird das Integral

$$-\frac{2}{n}\cos m\varphi\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\varphi+zz}+\frac{2}{n}\sin m\varphi\ \mathrm{Atang}\frac{z-\cos\varphi}{\sin\varphi}+C$$

sein, welche Konstante aus der Grenze $z=0$ definiert dieses bestimmte Integral liefert

$$-\frac{2}{n}\cos m\varphi\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\varphi+zz}+\frac{2}{n}\sin m\varphi\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi},$$

wo es nur nötig ist anstelle von $\varphi$ seine geforderten Werte zu schreiben und daher alle Partialintegrale vereint zu nehmen. Außerdem muss aber in den Fällen, in denen der Nenner $1+z^n$ den Faktor $1+z$ hat, was passiert, wenn $n$ eine ungerade Zahl war, der daher zu entstehende Teil des Integrals hinzugefügt werden, welcher so gefunden wird. Man setze

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n}=\frac{\alpha}{1+z}+R,$$

woher

$$\frac{z^{m-1}+z^m}{1+z^n}=\alpha+R(1+z)$$

wird, und für $z=-1$ gesetzt geht

$$\alpha=\frac{z^{m-1}+z^m}{1+z^n}$$

hervor; weil aber in diesem Fall der Zähler wie der Nenner verschwindet, werde anstelle von beiden ihr Differential gesetzt und es wird

$$\alpha=\frac{(m-1)z^{m-2}+mz^{m-1}}{nz^{n-1}}$$

werden, wo der Zähler $z^{m-2}(m-1+mz)$ für $z=-1$ gesetzt übergeht in $-(-1)^m$ und der Zähler in $+n$ und daher sogar $\alpha=\frac{-(-1)^m}{n}$ ist; der Teil des Integrals, der daher also entsteht, wird $\frac{-(-1)^m}{n}\mathrm{l}(1+z)$ sein; in den Fällen also, wo $m$ eine gerade Zahl ist, wird dieses Integral $-\frac{1}{n}\mathrm{l}(1+z)$ sein, wenn aber $m$ eine ungerade Zahl ist, entsteht $+\frac{1}{n}\mathrm{l}(1+z)$. Wenn wir daher gleich anstelle von $\varphi$ seine Werte

$$\frac{\pi}{n},\quad \frac{3\pi}{n},\quad \frac{5\pi}{n},\quad \frac{7\pi}{n},\quad \text{etc.}$$

schreiben, wird das gesuchte Integral

$$\begin{aligned}\int\frac{z^{m-1}\mathrm{d}z}{1+z^n}=&-\frac{2}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\frac{\pi}{n}+zz}+\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{\pi}{n}}{1-z\cos\frac{\pi}{n}}\\&-\frac{2}{n}\cos\frac{3\pi m}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\frac{3\pi}{n}+zz}+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{3\pi}{n}}{1-z\cos\frac{3\pi}{n}}\\&-\frac{2}{n}\cos\frac{5\pi m}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\frac{5\pi}{n}+zz}+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{5\pi}{n}}{1-z\cos\frac{5\pi}{n}}\\&\text{etc.,}\end{aligned}$$

sein, welchem darüber hinaus, im Fall, in dem $n$ eine ungerade Zahl ist,

$$\frac{-(-1)^m}{n}\,\mathrm{l}(1+z)$$

hinzugefügt werden muss.

## Lehrsatz

§3 *Damit es nicht nötig ist, die Integration der Formel*

$$\int \frac{(A+Bz)\mathrm{d}z}{1-2z\cos\varphi+zz}$$

*anderswoher zu wiederholen, löse man den Zähler $A+Bz$ in diese Teile $-B\cos\varphi+Bz$ und $A+B\cos\varphi$ auf, und aus dem ersten entsteht natürlich das Integral*

$$B\,\mathrm{l}\sqrt{1-2zz\cos\varphi+zz};$$

*während für den einen Teil aber*

$$\int \frac{\mathrm{d}z\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+zz} = \mathrm{Arctang}\frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi}$$

*ist, wird der andere Teil des Integrals*

$$(A+B\cos\varphi)\int \frac{\mathrm{d}z}{1-2z\cos\varphi+zz}$$

*zu*

$$\frac{A+B\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{Arctang}\frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi}$$

*werden und so verhält sich die Integration der Formel so:*

$$\int \frac{(A+Bz)\mathrm{d}z}{1-2z\cos\varphi+zz} = B\,\mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\varphi+zz} + \frac{A+B\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{Arctang}\frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi},$$

*welches Integral schon für $z=0$ gesetzt verschwindet, sodass man keine Addition der Konstanten braucht.*

## Problem

§4 *Das Problem ist, die Differentialformel*

$$\frac{z^{m-1}\mathrm{d}z}{1-z^n}$$

*zu integrieren, wo natürlich $m<n$ sein muss.*

## Lösung

Hier ist zu beobachten, dass der Nenner immer den Faktor $1-z$ hat; dann aber, sooft $n$ gerade war, auch der Faktor $1+z$ enthalten ist, die übrigen Faktoren alle imaginär sind, von denen zwei einen solchen doppelten ergeben

$$pp - 2pz\cos\varphi + zz;$$

weil dieser entweder für

$$z = p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

oder für

$$z = p(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

gesetzt verschwindet, verschwindet in denselben Fällen der Nenner $1-z^n$; dann wird aber

$$z^n = p^n\left(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi\right)$$

sein und daher wird der Nenner

$$1 - p^n\left(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi\right)$$

werden; weil dieser verschwinden muss, muss

$$\begin{aligned} \text{I.}\ & 1 - p^n\cos n\varphi = 0 \quad \text{sein und} \\ \text{II.}\ & p^n\sqrt{-1}\sin n\varphi = 0, \end{aligned}$$

woraus wir schließen

$$\sin n\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \cos n\varphi = \pm 1;$$

damit aber $1 - p^n\cos n\varphi = 0$ wird, muss $\cos n\varphi = +1$ genommen werden und es wird $p = 1$ sein, sodass der doppelte Faktor

$$1 - 2z\cos\varphi + zz$$

ist. Anstelle von $n\varphi$ können also alle Bögen genommen werden, deren Kosinus gleich $+1$ sind, welche sind

$$0\pi, \quad 2\pi, \quad 4\pi, \quad 6\pi, \quad 8\pi, \quad \text{etc.},$$

und die Werte des Winkels $\varphi$ werden

$$\frac{0\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{n}, \quad \frac{8\pi}{n}, \quad \text{etc.}$$

sein und die daher zu entstehenden einfachen Faktoren des Nenners werden

$$z - \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi$$

sein. Wir wollen der Kürze wegen $f = \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi$ setzen, sodass $f$ die beiden Werte involviert, und der einfache Faktor wird $z - f$ sein; es werde also der daher zu entstehende Bruch gleich $\frac{\alpha}{z-f}$ gesetzt und man setze

$$\frac{z^{m-1}}{1-z^n} = \frac{\alpha}{z-f} + R$$

und durch Multiplikation mit $z - f$ wird

$$\frac{z^m - fz^{m-1}}{1-z^n} = \alpha + R(z-f)$$

sein, daher findet man für $z = f$

$$\alpha = \frac{z^m - fz^{m-1}}{1-z^n}.$$

Im Fall $z = f$ aber verschwinden Nenner und Zähler gleichzeitig und daher muss anstelle von jedem von beiden das Differential genommen werden und man findet $\alpha = -\frac{1}{n}f^{m-n}$; weil aber

$$f = \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi$$

ist, wird

$$f^{m-n} = \cos(m-n)\varphi \pm \sqrt{-1}\sin(m-n)\varphi$$

sein oder wegen

$$\sin n\varphi = 0, \quad \cos n\varphi = 1, \quad \cos(m-n)\varphi = \cos m\varphi \quad \text{und} \quad \sin(m-n)\varphi = \sin m\varphi$$

wird

$$f^{m-n} = \cos m\varphi \pm \sqrt{-1}\sin m\varphi$$

sein, aus welchem doppelten imaginären Faktor diese zwei Partialbrüche entstehen

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi}{z - \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi} - \frac{1}{n}\cdot\frac{\cos m\varphi - \sqrt{-1}\sin m\varphi}{z - \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi},$$

die man zusammenzieht zu diesem

$$-\frac{2}{n}\cdot\frac{z\cos m\varphi - \cos\varphi\cos m\varphi - \sin\varphi\sin m\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + zz};$$

daher entsteht also der Teil des Integrals

$$-\frac{2}{n}\int\frac{z\mathrm{d}z\cos m\varphi-\mathrm{d}z\cos\varphi\cos m\varphi-\mathrm{d}z\sin\varphi\sin m\varphi}{1-2z\cos\varphi+zz},$$

dessen Integral

$$-\frac{2}{n}\cos m\varphi\ \mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\varphi+zz}+\frac{2}{n}\sin m\varphi\ \mathrm{Arctang}\frac{z-\cos\varphi}{\sin\varphi}+C$$

sein wird, oder nach Bestimmung der Konstante erreichen wir das bestimmte Integral

$$-\frac{2}{n}\cos m\varphi\ \mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\varphi+zz}+\frac{2}{n}\sin m\varphi\ \mathrm{Arctang}\frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi};$$

im Fall also, in dem $\varphi=0$ ist, wird das Integral gleich $-\frac{2}{n}\ \mathrm{l}(1-z)$ sein, von welchem aber nur die Hälfte genommen werden muss, daher gleich $-\frac{1}{n}\ \mathrm{l}(1-z)$; in den Fällen aber, in denen $n$ eine gerade Zahl ist und $\varphi=\pi$ ist, ergibt sich dieser Teil des Integrals

$$-\frac{2}{n}\cos m\pi\ \mathrm{l}\sqrt{1+2z+zz},$$

von welchem wieder nur die Hälfte, also

$$-\frac{1}{n}\cos m\pi\ \mathrm{l}(1+z)$$

genommen werden muss, wo zu bemerken ist, wenn $m$ eine gerade Zahl ist, dass $\cos m\pi=+1$ ist, aber wenn $m$ eine ungerade Zahl ist, dass $\cos m\pi=-1$ sein wird; als logische Konsequenz wird das gesuchte Integral auf folgende Weise ausgedrückt

$$\int\frac{z^{m-1}\mathrm{d}z}{1-z^n}=-\frac{1}{n}\ \mathrm{l}(1-z)$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{2m\pi}{n}\ \mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\frac{2\pi}{n}+zz}+\frac{2}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{2\pi}{n}}{1-z\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{4m\pi}{n}\ \mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\frac{4\pi}{n}+zz}+\frac{2}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{4\pi}{n}}{1-z\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{6m\pi}{n}\ \mathrm{l}\sqrt{1-2z\cos\frac{6\pi}{n}+zz}+\frac{2}{n}\sin\frac{6m\pi}{n}\ \mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{6\pi}{n}}{1-z\cos\frac{6\pi}{n}}$$

etc.

## Problem

§5 *Das Problem ist, das Integral der Differentialformel*

$$\frac{z^{m-1}+z^{\mu-1}}{1+z^n}\mathrm{d}z$$

*zu finden, wobei $m+\mu=n$ ist, aber dennoch so, dass $m$ wie $\mu$ positive Zahlen sind.*

## Lösung

Hier ist also nichts anderes nötig, außer dass die Integralterme der Formel

$$\int\frac{z^{m-1}\mathrm{d}z}{1+z^n}$$

vereinigt werden, die man oben gefunden hat, während man bei einer $\mu$ anstelle von $m$ schreibt; weil aber für die logarithmischen Terme $\frac{m\pi}{n}+\frac{\mu\pi}{n}=\pi$ ist, wird

$$\cos\frac{\mu\pi}{n}=-\cos\frac{m\pi}{n},\quad \cos\frac{3\mu\pi}{n}=-\cos\frac{3m\pi}{n},\quad \cos\frac{5\mu\pi}{n}=-\cos\frac{5m\pi}{n},\quad \text{etc.}$$

sein, woher klar ist, dass alle logarithmischen Terme sich gegenseitig aufheben. Weil aber weiter für die Kreisbögen

$$\sin\frac{\mu\pi}{n}=\sin\frac{m\pi}{n},\quad \sin\frac{3\mu\pi}{n}=\sin\frac{3m\pi}{n},\quad \text{etc.}$$

ist, werden diese Terme verdoppelt, sodass das gesuchte Integral hervorgehen wird

$$\frac{4}{n}\sin\frac{\mu\pi}{n}\,\mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{\pi}{n}}{1-z\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{4}{n}\sin\frac{3\mu\pi}{n}\,\mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{3\pi}{n}}{1-z\cos\frac{3\pi}{n}}$$
$$+\frac{4}{n}\sin\frac{5\mu\pi}{n}\,\mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{5\pi}{n}}{1-z\cos\frac{5\pi}{n}}+\text{etc.},$$

von welchen Termen, wenn $i$ eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet, die allgemeine Form

$$\frac{4}{n}\sin\frac{i\mu\pi}{n}\,\mathrm{Atang}\frac{z\sin\frac{i\pi}{n}}{1-z\cos\frac{i\pi}{n}}$$

sein wird; es ist aber nötig, diese Terme so fortzusetzen, solange die Zahl den Exponenten $n$ nicht übertrifft, sodass, wenn $n$ eine ungerade Zahl war, der letzte Term $i=n$ enthält, wenn aber $n$ eine gerade Zahl war, der Wert des entsprechenden $i$ gleich $i=n-1$ sein wird.

## Korollar

§6 Weil daher der Fall $n = 1$ ausgeschlossen wird, wird im Fall $n = 2$ das Integral

$$2\sin\frac{m\pi}{2}\ \text{Atang}\, z$$

sein. Im Falle $n = 3$ wird das Integral

$$\frac{4}{3}\sin\frac{m\pi}{3}\ \text{Atang}\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$$

sein und im Fall $n = 4$ wird das Integral

$$\sin\frac{m\pi}{4}\ \text{Atang}\frac{z}{\sqrt{2}-z} + \sin\frac{3m\pi}{4}\ \text{Atang}\frac{z}{\sqrt{2}+z}$$

sein.

## Problem

§7 *Das Problem ist, das Integral der vorhergehenden Differentialformel zu bestimmen im Fall, in dem $z = 1$ ist, weil ja das obere Integral so genommen wurde, dass es für $z = 0$ verschwindet.*

## Lösung

Weil ein beliebiger Teil des gesuchten Integrals diese Form hat

$$\frac{4}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\ \text{Atang}\frac{z\sin\frac{i\pi}{n}}{1-z\cos\frac{i\pi}{n}},$$

geht diese Form für $z = 1$ gesetzt über in diese

$$\frac{4}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\ \text{Atang}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{1-\cos\frac{i\pi}{n}};$$

es ist aber

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{1-\cos\frac{i\pi}{n}} = \cot\frac{i\pi}{2n} = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n}\right)$$

und daher

$$\text{Atang}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{1-\cos\frac{i\pi}{n}} = \frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n},$$

woher im Allgemeinen der Teil des Integrals

$$\frac{4}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n}\right)=\frac{2\pi}{n}\sin\frac{im\pi}{n}-\frac{2i\pi}{nn}\sin\frac{im\pi}{n}$$

sein wird; das gesuchte Integral wird also durch die beiden folgenden Progressionen ausgedrückt

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{n}\left(\sin\frac{m\pi}{n}+\sin\frac{3m\pi}{n}+\sin\frac{5m\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{im\pi}{n}\right)\\ -&\frac{2\pi}{nn}\left(1\sin\frac{m\pi}{n}+3\sin\frac{3m\pi}{n}+5\sin\frac{5m\pi}{n}+\cdots+i\sin\frac{im\pi}{n}\right);\end{aligned}$$

wenn wir dort zur Kürze $\frac{m\pi}{n}=\theta$ schreiben, wird das Integral angenehmer so ausgedrückt:

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{n}(\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin i\theta)\\ -&\frac{2\pi}{nn}(1\sin\theta+3\sin 3\theta+5\sin 5\theta+\cdots+i\sin i\theta),\end{aligned}$$

wo, sooft $n$ eine ungerade Zahl war, $i=n$ sein wird, wenn aber $n$ eine gerade Zahl war, $i=n-1$ sein wird. Weil daher die ganze Aufgabe dahin übergeht, dass die zwei Reihen summiert werden, wollen wir

$$s=\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin i\theta$$

und

$$t=1\sin\theta+3\sin 3\theta+5\sin 5\theta+\cdots+i\sin i\theta$$

setzen, sodass unser Integral

$$\frac{2\pi}{n}s-\frac{2\pi}{nn}z$$

ist; weil für die erste Reihe

$$2\sin\theta\sin i\theta=\cos(i-1)\theta-\cos(i+1)\theta$$

ist, wird

$$\begin{aligned}2s\sin\theta=\cos 0\theta-\cos 2\theta-\cos 4\theta-\cos 6\theta-\cdots-\cos(i+1)\theta\\ +\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cdots,\end{aligned}$$

sein, sodass $2s\sin\theta=1-\cos(i+1)\theta$ ist, also

$$s=\frac{1}{2\sin\theta}-\frac{\cos(i+1)\theta}{2\sin\theta}$$

ist. Für die andere Reihe aber wollen wir als erstes den Winkel $\theta$ wie eine Variable betrachten, und weil $\mathrm{d}\cos i\theta = -i\mathrm{d}\theta \sin i\theta$ ist, wird

$$\int i\mathrm{d}\theta \sin i\theta = -\cos i\theta$$

sein, nach welcher Bemerkung man findet

$$\int t\mathrm{d}\theta = -\cos\theta - \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cdots - \cos i\theta,$$

welche Reihe man mit $2\sin\theta$ multipliziere, und weil

$$2\sin\theta\cos i\theta = -\sin(i-1)\theta + \sin(i+1)\theta$$

ist, wird

$$2\sin\theta \int t\mathrm{d}\theta = -\sin(i+1)\theta$$

sein, weshalb wir

$$\int t\mathrm{d}\theta = -\frac{\sin(i+1)\theta}{2\sin\theta}$$

haben und daher

$$t = -\frac{(i+1)\cos(i+1)\theta}{2\sin\theta} + \frac{\sin(i+1)\theta\cos\theta}{2(\sin\theta)^2},$$

mit welchen gefundenen Werten unser Integral sich so verhält

$$\frac{\pi}{n\sin\theta} - \frac{\pi\cos(i+1)\theta}{n\sin\theta} + \frac{\pi(i+1)\cos(i+1)\theta}{nn\sin\theta} - \frac{\pi\sin(i+1)\theta\cos\theta}{nn(\sin\theta)^2};$$

weil nun entweder $i = n-1$ oder $i = n$ ist, je nachdem ob $n$ eine gerade oder ungerade Zahl war, wollen wir getrennt jeden von beiden Fällen entwickeln.

I. Wenn $n$ eine gerade Zahl ist, wird $i = n-1$ und $i+1 = n$ sein, und weil $\theta = \frac{m\pi}{n}$ ist, wird $(i+1)\theta = m\pi$ sein, daher $\sin(i+1)\theta = 0$ und $\cos(i+1)\theta = \pm 1$; deshalb wird unsere Formel gleich $\frac{\pi}{n\sin\theta}$ sein, als logische Konsequenz wird in diesem Fall das gesuchte Integral

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

sein.

II. Aber wenn $i = n$ ist und daher $i+1 = n+1$, wird der Winkel

$$(i+1)\theta = (n+1)\frac{m\pi}{n} = m\pi + \frac{m\pi}{n} = m\pi + \theta$$

sein, woher

$$\cos(i+1)\theta = \pm\cos\theta \quad \text{und} \quad \sin(i+1)\theta = \pm\sin\theta$$

wird, mit welchen Werte eingesetzt diese Formel

$$\frac{\pi}{n\sin\theta} \mp \frac{\pi\cos\theta}{n\sin\theta} \pm \frac{(n+1)\pi\cos\theta}{nn\sin\theta} \mp \frac{\pi\cos\theta}{nn\sin\theta}$$

hervorgeht, welche man zusammenzieht zu dieser

$$\frac{\pi}{\sin\theta} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Als logische Konsequenz, ob $n$ eine gerade oder ungerade Zahl war, wird

$$\int \frac{z^{m-1}+z^{\mu-1}}{1+z^n}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

sein.

## Korollar 1

**§8** Wenn also $m+\mu = n$ war und nach der so aufgestellten Integration, dass das Integral für $z=0$ gesetzt verschwindet, $z=1$ genommen wird, wird immer

$$\int \frac{z^{m-1}+z^{\mu-1}}{1+z^n}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

werden.

## Korollar 2

**§9** Weil durch die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1+z^n} = 1 - z^n + z^{2n} - z^{3n} + z^{4n} - z^{5n} + \text{etc.}$$

ist, wird unser Integral im Allgemeinen sein

$$+\frac{z^m}{m}-\frac{z^{m+n}}{m+n}+\frac{z^{m+2n}}{m+2n}-\frac{z^{m+3n}}{m+3n}+\frac{z^{m+4n}}{m+4n}-\text{etc.}$$
$$+\frac{z^\mu}{\mu}-\frac{z^{\mu+n}}{\mu+n}+\frac{z^{\mu+2n}}{\mu+2n}-\frac{z^{\mu+3n}}{\mu+3n}+\frac{z^{\mu+4n}}{\mu+4n}-\text{etc.},$$

woher für $z=1$ gesetzt man die folgende Summation der unendlichen Reihe hat

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\begin{cases}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\frac{1}{m+4n}-\text{etc.}\\+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+n}+\frac{1}{\mu+2n}-\frac{1}{\mu+3n}+\frac{1}{\mu+4n}-\text{etc.}\end{cases}$$

oder wegen $n=m+\mu$

$$\frac{\pi}{(m+\mu)\sin\frac{m\pi}{m+\mu}}=\begin{cases}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2m+\mu}+\frac{1}{3m+2\mu}-\frac{1}{4m+3\mu}+\text{etc.}\\+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2\mu+m}+\frac{1}{3\mu+2m}-\frac{1}{4\mu+3m}+\text{etc.}\end{cases}$$

## Beispiele

**I.** Wenn $m=1$ und $\mu=1$ ist, wird

$$\frac{\pi}{2}=\begin{cases}+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}\\+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}\end{cases}$$

sein und daher

$$\frac{\pi}{4}=+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}$$

**II.** Wenn $m=1$ und $\mu=2$ ist, wird $m+\mu=3$ und $\sin\frac{m\pi}{m+\mu}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sein und daher

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\begin{cases}+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{1}{16}+\text{etc.}\\+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}+\text{etc.}\end{cases}$$

oder

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{etc.}$$

**III.** Wenn $m = 1$ und $\mu = 3$ ist, wird $\mu + m = 4$ sein und $\sin\frac{m\pi}{m+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und daher

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} +1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc.} \end{cases}$$

oder

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = +1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

Man füge dem Beispiel die in **I.** gefundene Reihe hinzu und es geht hervor

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = +2 - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{15} + \frac{2}{17} - \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = +1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \text{etc.},$$

wo die positiven Terme in der Form $8a + 1$, die negativen aber in der Form $8a - 1$ enthalten sein werden.

## Problem

**§10** *Das Problem ist, die Integralformel*

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} \mathrm{d}z$$

*zu integrieren, wobei $m + \mu = n$ ist.*

## Lösung

Weil daher von der Integralformel

$$\int \frac{z^{m-1}\mathrm{d}z}{1 - z^n}$$

die Formel

$$\int \frac{z^{\mu-1}\mathrm{d}z}{1 - z^n}$$

abgezogen werden muss, heben sich die Logarithmen gegenseitig auf; das gilt wegen $\frac{2m\pi}{n} + \frac{2\mu\pi}{n} = 2\pi$ und daher wegen $\cos\frac{2m\pi}{n} = \cos\frac{2\mu\pi}{n}$ auch für die zweiten; für die dritten passiert dasselbe, weil $\frac{4m\pi}{n}+\frac{4\mu\pi}{n}=4\pi$ ist und daher weil $\cos\frac{4m\pi}{n}=\cos\frac{4\mu\pi}{n}$; und auf diese Weise heben sich natürlich alle Logarithmen gegenseitig auf; die Kreisbögen aber, weil $\sin\frac{2\mu\pi}{n}=-\sin\frac{4m\pi}{n}$ und $\sin\frac{4\mu\pi}{n}=-\sin\frac{2m\pi}{n}$ ist, werden natürlich alle verdoppelt; daher wird das gesuchte Integral lediglich durch Kreisbögen ausgedrückt und es wird

$$\int\frac{z^{m-1}-z^{\mu-1}}{1-z^n}dz$$

$$=\frac{4}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\text{ Atang}\frac{z\sin\frac{2\pi}{n}}{1-z\cos\frac{2\pi}{n}}+\frac{4}{n}\sin\frac{4m\pi}{n}\text{ Atang}\frac{z\sin\frac{4\pi}{n}}{1-z\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$+\frac{4}{n}\sin\frac{6m\pi}{n}\text{ Atang}\frac{z\sin\frac{6\pi}{n}}{1-z\cos\frac{6\pi}{n}}+\frac{4}{n}\sin\frac{8m\pi}{n}\text{ Atang}\frac{z\sin\frac{8\pi}{n}}{1-z\cos\frac{4\pi}{n}}$$

etc.

sein, woher, wenn $n$ eine beliebige gerade Zahl bezeichnet, die einzelnen Terme in dieser allgemeinen Formel enthalten sind

$$\frac{4}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\text{ Arctang}\frac{z\sin\frac{i\pi}{n}}{1-z\cos\frac{i\pi}{n}}.$$

Man muss aber diese Formeln solange fortsetzen, solange $i$ nicht den Exponenten $n$ übertrifft; wenn daher $n$ eine gerade Zahl war, wird der letzte Wert $i=n$ sein, wenn aber $n$ ungerade war, wird der letzte Wert $i=n-1$ sein. Im Übrigen wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass das Integral für $z=0$ genommen verschwindet.

## Problem

**§11** *Das Problem ist, den Wert der vorangehenden Integralformel zu finden für den Fall, in dem man $z=1$ setzt.*

## Lösung

Weil in diesem Fall die allgemeine Formel aller Teile in diese übergeht

$$\frac{4}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\text{ Atang}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{1-\cos\frac{i\pi}{n}},$$

ist aber, wie wir schon vorher gesehen haben,

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{1-\cos\frac{i\pi}{n}} = \cot\frac{i\pi}{n} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n}\right),$$

woher jeder Bogen $\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n}$ sein wird und daher die ganze Form

$$\frac{2\pi}{n}\sin\frac{im\pi}{n}-\frac{2i\pi}{nn}\sin\frac{im\pi}{n},$$

wir wollen zur Kürze $\frac{m\pi}{n}=\theta$ setzen, sodass wir diese Formel haben

$$\frac{2\pi}{n}\sin i\theta-\frac{2i\pi}{nn}\sin i\theta;$$

wenn wir daher anstelle von $i$ sukzessive die Zahlen 2, 4, 6, 8, etc. bis hin zum letzten $i$ schreiben, welches entweder $n$ oder $n-1$ ist, wird der gesuchte Wert des Integrals durch diese beiden Reihen ausgedrückt

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{n}(\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta+\cdots+\sin i\theta),\\ -&\frac{2\pi}{nn}(2\sin 2\theta+4\sin 4\theta+6\sin 6\theta+\cdots+i\sin i\theta);\end{aligned}$$

wir wollen daher wie oben

$$\begin{aligned}s&=\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta+\cdots+\sin i\theta,\\ t&=2\sin 2\theta+4\sin 4\theta+6\sin 6\theta+\cdots+i\sin i\theta\end{aligned}$$

setzen, sodass der Wert, den wir suchen,

$$\frac{2\pi}{n}s-\frac{2\pi}{nn}t$$

sein wird. Wir wollen die erste Reihe gleich mit $2\sin\theta$ multiplizieren, und weil

$$2\sin\theta\sin i\theta=\cos(i-1)\theta-\cos(t+1)\theta$$

ist, wird

$$\begin{aligned}2s\sin\theta=\cos\theta-\cos 3\theta-\cos 5\theta-\cos 7\theta-\cdots-\cos(i+1)\theta\\ +\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta+\cdots\end{aligned}$$

sein oder

$$2\sin\theta=\cos\theta-\cos(i+1)\theta,$$

also
$$s = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{\cos(i+1)\theta}{2\sin\theta}.$$
Man multipliziere die andere Reihe mit $\mathrm{d}\theta$, und weil
$$\int i\mathrm{d}\theta \sin i\theta = -\cos i\theta$$
ist, geht durch Integrieren
$$\int t\mathrm{d}\theta = -\cos 2\theta - \cos 4\theta - \cos 6\theta - \cdots - \cos i\theta$$
hervor, welche wiederum mit $2\sin\theta$ multipliziert wegen
$$2\sin\theta\cos i\theta = \sin(i+1)\theta - \sin(i-1)\theta$$
liefert
$$\begin{aligned} 2\sin\theta \int t\mathrm{d}\theta = \sin\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta - \sin 7\theta - \cdots - \sin(i+1)\theta \\ + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \cdots; \end{aligned}$$
daher wird, indem man durch $2\sin\theta$ teilt,
$$\int t\mathrm{d}\theta = +\frac{1}{2} - \frac{\sin(i+1)\theta}{2\sin\theta},$$
woher wir berechnen
$$t = -\frac{(i+1)\cos(i+1)\theta}{2\sin\theta} + \frac{\sin(i+1)\theta\cos\theta}{2(\sin\theta)^2}.$$
Nach dem Fund der Werte $s$ und $t$ wird also das gesuchte Integral
$$\frac{\pi\cos\theta}{n\sin\theta} - \frac{\pi\cos(i+1)\theta}{n\sin\theta} + \frac{\pi(i+1)\cos(i+1)\theta}{nn\sin\theta} - \frac{\pi\sin(i+1)\theta\cos\theta}{nn(\sin\theta)^2}$$
sein; weil nun $\theta = \frac{m\pi}{n}$ ist, bleibt es übrig, zwei Fälle zu entwickeln, einen, indem $n$ eine gerade Zahl ist und $i = n$, der andere aber, in welchem $n$ eine ungerade Zahl ist und $i = n-1$.

I. Wenn $i = n$ ist, wird
$$(i+1)\theta = m\pi + \frac{m\pi}{n} = m\pi + \theta$$

sein, woher wegen $\sin m\pi = 0$

$$\cos(i+1)\theta = \cos m\pi \cos\theta \quad \text{und} \quad \sin(i+1)\theta = \cos m\pi \sin\theta$$

sein wird, wodurch wir nach Einsetzen $\frac{\pi\cos\theta}{\pi\sin\theta}$ haben; die übrigen Glieder heben sich gegenseitig auf, sodass der gesuchte Wert

$$\frac{\pi\cos\theta}{n\sin\theta} = \frac{\pi}{n\ \mathrm{tang}\theta}$$

ist.

II. Wenn $i = n-1$ und daher $i+1 = n$ ist, wird

$$(i+1)\theta = m\pi \quad \text{und} \quad \cos(i+1)\theta = \cos m\pi$$

sein, und dazu $\sin(i+1)\theta = 0$, woher unsere Formel

$$\frac{\pi\cos\theta}{n\sin\theta}$$

werden wird, wo natürlich die übrigen Terme außer diesem sich gegenseitig aufheben.

Daher ist klar, ob der Exponent gerade oder ungerade war, dass in jedem der beiden Fälle der Wert des gesuchten Integrals gleich

$$\frac{\pi}{n\ \mathrm{tang}\frac{m\pi}{n}}$$

ist.

## Korollar 1

**§12** Wenn also $m+\mu = n$ war und nach der Integration so aufgestellt, dass das Integral für $z=0$ gesetzt verschwindet, $z=1$ genommen wird, wird immer

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1-z^n} = \frac{\pi}{n\ \mathrm{tang}\frac{m\pi}{n}}$$

sein.

## Korollar 2

**§13** Weil durch die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1-z^n} = 1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} + \text{etc.}$$

ist, wird das Integral unserer Formel im Allgemeinen

$$\begin{aligned} &\frac{z^m}{m} + \frac{z^{m+n}}{m+n} + \frac{z^{m+2n}}{m+2n} + \frac{z^{m+3n}}{m+3n} + \text{etc.} \\ -&\frac{z^\mu}{\mu} - \frac{z^{\mu+n}}{\mu+n} - \frac{z^{\mu+2n}}{\mu+2n} - \frac{z^{\mu+3n}}{\mu+3n} - \text{etc.} \end{aligned}$$

sein, woher man für $z = 1$ gesetzt die folgende Summation der unendlichen Reihe hat

$$\frac{\pi}{n \operatorname{tang} \frac{m\pi}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+n} - \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+3n} - \frac{1}{\mu+4n} - \text{etc.}, \end{cases}$$

welche Reihe sich von der oberen nur in Bezug auf die Zeichen unterscheidet; oder weil $n = m + \mu$ ist, wird

$$\frac{\pi}{(m+\mu) \operatorname{tang} \frac{m\pi}{m+\mu}} = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{2m+\mu} + \frac{1}{3m+2\mu} + \frac{1}{4m+3\mu} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu+m} - \frac{1}{3\mu+2m} - \frac{1}{4\mu+3m} - \text{etc.} \end{cases}$$

sein.

## Lösung

**I.** Weil diese beiden Reihen sich gegenseitig im Fall $\mu = m$ aufheben, wird in diesem Fall

$$\frac{\pi}{2m \operatorname{tang} \frac{\pi}{2}} = 0.$$

**II.** Wir wollen $m = 1$ und $\mu = 2$ setzen und man berechnet

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \begin{cases} +1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \frac{1}{19} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{11} - \frac{1}{14} - \frac{1}{17} - \frac{1}{20} - \text{etc.} \end{cases}$$

oder

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \text{etc};$$

wenn wir also diese Reihe mit 2 multiplizieren, haben wir

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{10} - \text{etc.},$$

wir hatten aber oben (§9) gefunden

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.};$$

daher geht, wenn die eine Reihe von der anderen abgezogen wird, hervor

$$0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{3}{14} + \text{etc.},$$

welche man angemessen in Perioden einteilt

$$0 = \begin{cases} +\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \\ +\frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{11} \\ +\frac{1}{13} - \frac{3}{14} + \frac{3}{16} - \frac{1}{17} \\ \qquad \text{etc.,} \end{cases}$$

woher folgt, dass

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{etc.} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \text{etc.}\right).$$

## Lehrsatz

**§14** *Die Gleichheit dieser zwei Reihen ist um so bemerkenswerter, weil deren Gültigkeit sehr abstrus erscheint; wir wollen daher die Sache auf folgende Weise versuchen. Wir wollen für s*

$$s = \frac{z}{1} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{17}}{17} + etc.$$

*setzen und durch Differentieren wird*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = 1 - z^4 + z^6 - z^{10} + z^{12} - z^{16} + z^{18} - etc. = \frac{1 - z^4}{1 - z^6}$$

*sein, woher*

$$s = \int \frac{(1 - z^4)\mathrm{d}z}{1 - z^6}$$

*wird, in welchem Integral* $z = 1$ *gesetzt werden muss; durch diese mit dem letzten Problem verglichene Form wird* $m = 1$, $\mu = 5$ *und* $n = 6$ *werden, sodass* $m + \mu = n$ *ist; daher berechnet man also*

$$s = \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

*Für die andere Reihe wollen wir*

$$t = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{8} - \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{14}}{14} - etc.$$

*setzen, sodass für* $z = 1$ $s = 3t$ *werden muss; es wird also durch Differentieren*

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = z - z^3 + z^7 - z^9 + z^{13} - z^{15} + z^{16} - etc. = \frac{z - z^3}{1 - z^6}$$

*sein, woher*

$$t = \int \frac{(z - z^3)\mathrm{d}z}{1 - z^6}$$

*wird, durch welche mit dem letzten Problem verglichene Gleichung wegen* $m = 2$, $\mu = 4$, $n = 6$ *und für* $z = 1$ *gesetzt*

$$t = \frac{\pi}{6 \operatorname{tang} \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

*hervorgeht, weshalb*

$$3t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

*wird und daher*

$$s = 3t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$