Analytische Übungen

Leonhard Euler

§1 Die Relation, welche ich einst beobachtet habe, dass sie zwischen den Summen dieser divergenten Reihen

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - \text{etc}$$

und dieser konvergenten

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc}$$

besteht, scheint nicht gerade wenig bemerkenswert, und diese verhält sich so:

$$\begin{aligned}
&1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + \text{etc} = \tfrac{1}{2}\\
&1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + \text{etc} = \tfrac{1}{4} = +\tfrac{2\cdot 1}{\pi^2}\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc}\right)\\
&1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc} = \tfrac{0}{8}\\
&1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc} = \tfrac{-2}{16} = -\tfrac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{\pi^4}\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc}\right)\\
&1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc} = \tfrac{0}{32}\\
&1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc} = \tfrac{16}{64} = +\tfrac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\pi^6}\left(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc}\right)\\
&1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc} = \tfrac{0}{128}\\
&1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{etc} = \tfrac{-272}{256} = -\tfrac{2\cdot 1\cdot 2\cdots 7}{\pi^8}\left(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc}\right)\\
&1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + \text{etc} = \tfrac{0}{512}\\
&1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + \text{etc} = \tfrac{7936}{1024} = +\tfrac{2\cdot 1\cdot 2\cdots 9}{\pi^{10}}\left(1 + \tfrac{1}{3^{10}} + \tfrac{1}{5^{10}} + \tfrac{1}{7^{10}} + \text{etc}\right)
\end{aligned}$$

wo π die Peripherie des Kreises bezeichnet, deren Durchmesser gleich 1 ist.

§2 Daher lässt sich schließen, dass im Allgemeinen zwischen diesen unendlichen Reihen

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc}$$

und

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc}$$

eine Relation solcher Art Geltung hat, dass

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc} = \frac{2 \cdot 1 \cdots (n-1)}{\pi^n} N \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc}\right),$$

wo wir freilich wissen, sooft n eine ungerade Zahl war — der Fall $n = 1$ ausgenommen — dass $N = 0$ sein wird; sooft aber n eine gerade Zahl war, dass entweder $N = +1$ oder $N = -1$ ist. Es wird natürlich, wenn n eine gerade Zahl der Form $4m + 2$ ist, $N = +1$ sein, wenn n aber eine gerade Zahl der Form $4m$ ist, wird $N = -1$ sein. Daher wird sich nicht schwer vermuten lassen, von welcher Art die Funktion von N ist, weil, wenn

$$n = 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 11, \quad 12, \quad 13, \quad \text{etc}$$

ist,

$$N = +1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad \text{etc}$$

ist.

§3 Und nicht einmal, wenn wir die Sache gründlicher betrachten, der Fall $n = 1$ entspricht diesem Gesetz, nach welchem $N = 0$ werden muss; es steht nämlich nichts im Wege, dass wir diese Gleichung zulassen

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + \text{etc} = \frac{2}{\pi} \cdot 0 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc}\right),$$

weil ja die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc}$$

unendlich ist, woher jedenfalls

$$\frac{2}{\pi} \cdot 0 \cdot \infty = \frac{1}{2}$$

werden kann oder gleich der Summe der Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

Deshalb wird ohne jede Ausnahme, wenn

$$\begin{array}{ccccccccccc} n & = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \text{etc} \end{array}$$

war,

$$\begin{array}{ccccccccccc} N & = & 0, & +1, & 0, & -1, & 0, & +1, & 0, & -1, & 0, & \text{etc} \end{array}$$

sein, welchem Gesetz freilich unzählige für N anzunehmende Formeln genügen können. Aber es lässt sich nicht zweifeln, dass die einfachste und natürlichste hier Geltung hat, welche

$$N = \cos \frac{n-2}{2}\pi$$

ist, während hier π den Winkel, der zwei rechten gleich ist, bezeichnet, weil ja der ganze Sinus gleich 1 angenommen wird, dass π die Halbperipherie des Kreises ist.

§4 Nachdem also diese Vermutung zugelassen wurde, werden wir im Allgemeinen

$$\begin{aligned} &1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc} \\ =&2 \cos \frac{n-2}{2}\pi \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{\pi^n} \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc}\right) \end{aligned}$$

haben oder, indem man die Gleichung umstellt,

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc} \\ =&\frac{1}{2 \cos \frac{n-2}{2}\pi} \cdot \frac{\pi^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} (1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc}) \end{aligned}$$

und aus dem Vorhergehenden ist klar, dass diese Gleichung wirklich besteht, sooft n eine gerade Zahl war, und auch nicht in den Fällen von der Wahrheit abweicht, in denen n eine ungerade Zahl ist. Wenn sie daher für die Fälle wahr ist, in denen n eine gebrochene Zahl ist, müssen die Werte der Formel

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ durch Interpolation angegeben werden, welche sich für die Halbwerte freilich so verhalten: wenn $n-1=$

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{2}, \qquad \frac{5}{2}, \qquad \frac{7}{2}, \qquad \frac{9}{2}, \qquad \text{etc}$$

ist, so sind (die Werte)

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi}, \quad \text{etc}$$

und das $\cos \frac{n-2}{2}\pi =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{etc}$$

§5 Für diese Fälle werden wir also haben

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{7}} + \text{etc} \\
&= + \frac{\sqrt{2}}{1}\pi \left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \text{etc}\right), \\
&1 + \frac{1}{3^2\sqrt{3}} + \frac{1}{5^2\sqrt{5}} + \frac{1}{7^2\sqrt{7}} + \text{etc} \\
&= + \frac{2\sqrt{2}}{1 \cdot 3}\pi^2 \left(1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{4} + 5\sqrt{5} - \text{etc}\right), \\
&1 + \frac{1}{3^3\sqrt{3}} + \frac{1}{5^3\sqrt{5}} + \frac{1}{7^3\sqrt{7}} + \text{etc} \\
&= - \frac{4\sqrt{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5}\pi^3 \left(1 - 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt{3} - 4^2\sqrt{4} + 5^2\sqrt{5} - \text{etc}\right), \\
&1 + \frac{1}{3^4\sqrt{3}} + \frac{1}{5^4\sqrt{5}} + \frac{1}{7^4\sqrt{7}} + \text{etc} \\
&= - \frac{8\sqrt{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\pi^4 \left(1 - 2^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{3} - 4^3\sqrt{4} + \text{etc}\right), \\
&1 + \frac{1}{3^5\sqrt{3}} + \frac{1}{5^5\sqrt{5}} + \frac{1}{7^5\sqrt{7}} + \text{etc} \\
&= \frac{16\sqrt{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\pi^5 \left(1 - 2^4\sqrt{2} + 3^4\sqrt{3} - 4^4\sqrt{4} + \text{etc}\right)
\end{aligned}$$

Ob diese Gleichheiten uneingeschränkt wahr sind, möchte ich nicht wagen hartnäckig zu versichern; es sollte also untersucht werden, ob sie den durch

Approximation genommenen Reihen genügt; und für die erste Reihe berechnen wir freilich näherungsweise

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \text{etc} = 0,380317,$$

welche Zahl mit $\pi\sqrt{2}$ multipliziert $1,689665$ gibt, welcher die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{7}} + \text{etc}$$

näherungsweise gleich entdeckt wird.

§6 Weil es aber scheint, dass für ungerade für n anzunehmende Zahlen daher nichts gefolgert werden kann, deshalb weil das eine Glied unserer Gleichung in $\frac{0}{0}$ übergeht, wollen wir für n, damit wir diese Werte finden, eine Zahl setzen, die unendlich wenig von einer ganzen Zahl abweicht oder wir wollen $n + \omega$ anstelle von n schreiben, während ω einen unendlich kleinen Bruch bezeichnet; und wir werden

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3^{n+\omega}} + \frac{1}{5^{n+\omega}} + \frac{1}{7^{n+\omega}} + \text{etc} \\ =&\frac{1}{2\cos\frac{n-2+\omega}{n}\pi}\frac{\pi^{n+\omega}}{1\cdot 2\cdots(n-1+\omega)}\left(1 - 2^{n-1+\omega} + 3^{n-1+\omega} - 4^{n-1+\omega} + \text{etc}\right) \end{aligned}$$

haben. Hier bemerke ich daher zuerst, dass

$$\frac{1}{a^{n+\omega}} = a^{-n-\omega} = a^{-n}(1 - \omega \ln a)$$

ist, wo die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen zu verstehen sind, sodass

$$\frac{1}{a^{n+\omega}} = \frac{1}{a^n} - \frac{\omega \ln a}{a^n}$$

ist. Auf ähnliche Weise wird

$$a^{n-1+\omega} = a^{n-1} + a^{n-1}\omega \ln a$$

sein und

$$\pi^{n+\omega} = \pi^n(1 + \omega \ln \pi);$$

dann aber wird

$$\cos\frac{n-2+\omega}{2}\pi = \cos\frac{n-2}{2}\pi - \frac{1}{2}\omega\pi\sin\frac{n-2}{2}\pi.$$

Weil ich schließlich einst gezeigt habe, dass der Wert der Formel $1 \cdot 2 \cdots (n - 1 + \omega)$ im Fall $n = 1$ gleich $1 - 0,57721566\omega$ ist, wird, wenn wir der Kürze wegen

$$\lambda = 0,5772156649015328,$$

schreiben, indem wir

$$n = 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad 4, \qquad 5, \qquad \text{etc}$$

nehmen,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdots (n-1+\omega) = & 1 - \lambda\omega, \quad 1 + (1-\lambda)\omega, \quad 2 + (3-2\lambda)\omega, \quad 6 + (11-6\lambda)\omega, \\ & 24 + (50 - 24\lambda)\omega, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

sein.

§7 Wir wollen hier hauptsächlich den Fall $n = 3$ betrachten, weil ja diese Reihe

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc}$$

so beschaffen ist, dass bisher alle Mühen, um ihre Summe zu finden, vergeblich unternommen worden sind. Weil also

$$\cos\frac{n-2}{2}\pi = 0 \quad \text{und} \quad \sin\frac{n-2}{2}\pi = 1$$

ist, wird unsere Gleichung diese Form

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc} - \omega\left(\ln 1 + \frac{\ln 3}{3^3} + \frac{\ln 5}{5^3} + \frac{\ln 7}{7^3} + \text{etc}\right) \\ = & \frac{-1}{\pi\omega} \cdot \frac{\pi^3(1+\omega\ln\pi)}{2+(3-2\lambda)\omega}(1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc} - \omega(2^2\ln 2 - 3^2\ln 3 + 4^2\ln 4 - \text{etc})) \end{aligned}$$

annehmen. Aber weil

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc} = 0$$

ist, werden wir für $\omega = 0$ gesetzt

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc} = \frac{1}{2}\pi^2(2^2\ln 2 - 3^2\ln 3 + 4^2\ln 4 - 5^2\ln 5 + \text{etc})$$

haben und so würden wir zum Ziel gelangen, wenn sich die Summe dieser Logarithmusreihe

$$2^2 \ln 2 - 3^2 \ln 3 + 4^2 \ln 4 - 5^2 \ln 5 + \text{etc}$$

angeben ließe. Auf ähnliche Weise findet man aber für die übrigen Potenzen

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \text{etc} &= \frac{-\pi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2^4 \ln 2 - 3^4 \ln 3 + 4^4 \ln 4 - 5^4 \ln 5 + \text{etc})\\
1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \text{etc} &= \frac{+\pi^6}{1 \cdot 2 \cdots 6}(2^6 \ln 2 - 3^6 \ln 3 + 4^6 \ln 4 - 5^6 \ln 5 + \text{etc})\\
1 + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{7^9} + \text{etc} &= \frac{-\pi^8}{1 \cdot 2 \cdots 8}(2^8 \ln 2 - 3^8 \ln 3 + 4^8 \ln 4 - 5^8 \ln 5 + \text{etc})\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

§8 Es sei uns also diese unendliche Reihe vorgelegt worden

$$2^2 \ln 2 - 3^2 \ln 3 + 4^2 \ln 4 - 5^2 \ln 5 + 6^2 \ln 6 - 7^2 \ln 7 + \text{etc} = Z,$$

dass

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc} = \frac{1}{2}\pi\pi Z$$

wird, und damit wir weniger an ihrer Summe verzweifeln, bemerke man, dass

$$\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \ln 6 - \text{etc} = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

ist. Jene Reihe Z aber kann in viele Formen verwandelt werden, wie z. B.

$$Z = \ln 2 - 3 \ln \frac{3}{2} + 6 \ln \frac{4}{3} - 10 \ln \frac{5}{4} + 15 \ln \frac{6}{5} - 21 \ln \frac{7}{6} + \text{etc}$$

und

$$\begin{aligned}
Z = \ln \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} + 4 \ln \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} + 9 \ln \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} + 16 \ln \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} + 25 \ln \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} + \text{etc}\\
- 2 \ln \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} - 6 \ln \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} - 12 \ln \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} - 20 \ln \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn wir nämlich im Allgemeinen

$$Z = \alpha \ln \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} - \beta \ln \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \gamma \ln \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} - \delta \ln \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} + \varepsilon \ln \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} - \zeta \ln \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} + \text{etc}$$

setzen, muss gelten

$$\begin{aligned}
2\alpha + \beta &= 4, & \text{und daher}\quad \beta &= 4 - 2\alpha\\
\alpha + 2\beta + \gamma &= 9 & \gamma &= 1 + 3\alpha\\
\beta + 2\gamma + \delta &= 16 & \delta &= 10 - 4\alpha\\
\gamma + 2\delta + \varepsilon &= 25 & \varepsilon &= 4 + 5\alpha\\
\delta + 2\varepsilon + \zeta &= 36 & \zeta &= 18 - 6\alpha\\
\varepsilon + 2\zeta + \eta &= 49 & \eta &= 9 + 7\alpha\\
\zeta + 2\eta + \theta &= 64 & \theta &= 28 - 8\alpha\\
\eta + 2\theta + \iota &= 81 & \iota &= 16 + 9\alpha\\
&\text{etc} & &\text{etc}
\end{aligned}$$

Hier haben wir aber $\alpha = 1$ angenommen, damit diese Progression besonders regelmäßig wird.

§9 Diese letzte Form scheint bei unserer Aufgabe besonders geeignet, weil ja die Logarithmen in konvergente Reihen aufgelöst werden. Für dieses Ziel werde ich für die positiven Terme diese Auflösung gebrauchen. Weil eine beliebige in dieser Form

$$xx \ln \frac{4xx}{4xx-1} = -xx \ln\left(1 - \frac{1}{4xx}\right)$$

enthalten ist, entsteht daher diese unendliche Reihe

$$xx\left(\frac{1}{4xx} + \frac{1}{2\cdot 2^4 x^4} + \frac{1}{3\cdot 2^6 x^6} + \frac{1}{4\cdot 2^8 x^8} + \text{etc}\right)$$

oder diese

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{xx} + \frac{1}{3\cdot 2^6}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4\cdot 2^8}\cdot\frac{1}{x^6} + \frac{1}{5\cdot 2^{10}}\cdot\frac{1}{x^8} + \text{etc.}$$

Für die negativen Terme aber ist die allgemeine Formel

$$-x(x+1)\ln\frac{(2x+1)^2}{4x(x+1)} = -x(x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{4x(x+1)}\right),$$

welche in diese Reihe aufgelöst wird

$$-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{3\cdot 2^6}\cdot\frac{1}{x^2(x+1)^2} + \frac{1}{4\cdot 2^8}\cdot\frac{1}{x^3(x+1)^3} - \text{etc},$$

woher der Wert von Z in diese Reihen verwandelt wird

$$\begin{gathered}Z = \tfrac{1}{2^2}(1-1+1-1+\text{etc}) + \tfrac{1}{2\cdot 2^4}\left(1+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\tfrac{1}{3^2}+\text{etc}\right)\\ +\tfrac{1}{3\cdot 2^6}\left(1-\tfrac{1}{1^2\cdot 2^2}+\tfrac{1}{2^4}-\tfrac{1}{2^3\cdot 3^2}+\text{etc}\right)+\tfrac{1}{4\cdot 2^8}\left(1+\tfrac{1}{1^3\cdot 2^3}+\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{2^3\cdot 3^3}+\tfrac{1}{3^6}+\text{etc}\right)\\ +\tfrac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(1-\tfrac{1}{1^4\cdot 2^4}+\tfrac{1}{2^8}-\tfrac{1}{2^4\cdot 3^4}+\text{etc}\right)+\tfrac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(1+\tfrac{1}{1^5\cdot 2^5}+\tfrac{1}{2^{10}}+\tfrac{1}{2^5\cdot 3^5}+\tfrac{1}{3^{10}}+\text{etc}\right)\\ \text{etc}\end{gathered}$$

§10 Wenn wir daher nun der Kürze wegen setzen:

$$\begin{gathered}1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc}=\alpha\pi^2\\ 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc}=\beta\pi^4\\ 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc}=\gamma\pi^6\\ 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{etc}=\delta\pi^8\\ \text{etc}\end{gathered}$$

wo die Zahlen α, β, γ, δ, etc bekannt sind, und weil

$$1-1+1-1+\text{etc}=\frac{1}{2}$$

ist, wird

$$\begin{gathered}Z=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^4}\left(\alpha\pi^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\text{etc}\right)\\ +\frac{1}{3\cdot 2^6}\left(\beta\pi^4-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{12^2}-\text{etc}\right)+\frac{1}{4\cdot 2^8}\left(\gamma\pi^6+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{12^3}+\text{etc}\right)\\ +\frac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(\delta\pi^8-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{6^4}-\frac{1}{12^4}-\text{etc}\right)+\frac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(\varepsilon\pi^{10}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{12^5}+\text{etc}\right)\\ \text{etc,}\end{gathered}$$

wo schon die ganze Aufgabe auf die Summation dieser Reihen

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{20^n}+\text{etc}$$

zurückgeführt worden sind, von welchen Potenzen die Wurzeln 2, 6, 12, 20, etc das Doppelte der Dreieckszahlen sind.

§11 Die einzelnen Terme dieser Reihe aber, deren Form $\frac{1}{x^n(x+1)n}$ ist, können in Teile einfacher Potenzen aufgelöst werden, die sich so verhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\
\frac{1}{x^2(x+1)^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \\
\frac{1}{x^3(x+1)^3} &= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \\
\frac{1}{x^4(x+1)^4} &= \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^4} - 4\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \\
&\quad - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

Weil, indem man die Summen mit dem Zeichen $\int$ kennzeichnet,

$$\int \frac{1}{(x+1)^n} = \int \frac{1}{x^n} - 1$$

ist, wird

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x+1)} &= 1, \\
\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} &= 2\int \frac{1}{x^2} - 1 - 2, \\
\int \frac{1}{x^3(x+1)^3} &= 1 - 3\left(2\int \frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}, \\
\int \frac{1}{x^4(x+1)^4} &= 2\int \frac{1}{x^4} - 1 - 4 + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}\left(2\int \frac{1}{x^2} - 1\right) - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

sein.

§12 Die absoluten Zahlen lassen sich in diesen einzelnen Ausdrücken angenehm zu einer zusammenziehen, und weil darauf

$$\int \frac{1}{x^2} = \alpha\pi^2, \quad \int \frac{1}{x^4} = \beta\pi^4, \quad \int \frac{1}{x^6} = \gamma\pi^6, \quad \int \frac{1}{x^8} = \delta\pi^8, \quad \text{etc}$$

ist, werden wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x+1)} &= 1, \\
\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} &= 2\alpha\pi^2 - \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}, \\
\int \frac{1}{x^3(x+1)^3} &= -3\cdot 2\alpha\pi^2 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}, \\
\int \frac{1}{x^4(x+1)^4} &= 2\beta\pi^4 - \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}2\alpha\pi^2 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \\
\int \frac{1}{x^5(x+1)^5} &= -5\cdot 2\beta\pi^4 - \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}2\alpha\pi^2 + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \\
\int \frac{1}{x^6(x+1)^6} &= 2\gamma\pi^6 + \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}2\beta\pi^4 + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2\alpha\pi^2 - \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}
\end{aligned}$$

etc

wo diese bemerkenswerte Reduktion zu erwähnen ist

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n};$$

es wird nämlich die Summe aus bekanntem Gesetz gleich

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}.$$

§13 Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, werden wir

$$\begin{aligned}
Z = {} & \tfrac{1}{2^2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\cdot 2^4}(\alpha\pi^2 + 1) + \tfrac{1}{3\cdot 2^6}\left(\beta\pi^4 + \tfrac{2\cdot 3}{1\cdot 2} - 2\alpha\pi^2\right) \\
& + \tfrac{1}{4\cdot 2^8}\left(\gamma\pi^6 + \tfrac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} - \tfrac{3}{1}2\alpha\pi^2\right) + \tfrac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(\delta\pi^8 + \tfrac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \tfrac{4\cdot 5}{1\cdot 2}2\alpha\pi^2 - 2\beta\pi^4\right) \\
& + \tfrac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(\varepsilon\pi^{10} + \tfrac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \tfrac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}2\alpha\pi^2 - \tfrac{5}{1}2\beta\pi^4\right) \\
& + \tfrac{1}{7\cdot 2^{14}}\left(\zeta\pi^{12} + \tfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \tfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2\alpha\pi^2 - \tfrac{6\cdot 7}{1\cdot 2}2\beta\pi^4 - 2\gamma\pi^6\right) + \text{etc}
\end{aligned}$$

welcher Ausdruck in diese Reihen aufgelöst wird:

$$\begin{aligned}
Z = {} & \tfrac{1}{2^2\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 2^4} + \tfrac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 2^6} + \tfrac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^8} + \tfrac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^{10}} + \tfrac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^{12}} + \text{etc} \\
& + \tfrac{\alpha\pi^2}{2\cdot 2^4} + \tfrac{\beta\pi^4}{3\cdot 2^6} + \tfrac{\gamma\pi^6}{4\cdot 2^8} + \tfrac{\delta\cdot\pi^8}{5\cdot 2^{10}} + \tfrac{\varepsilon\pi^{10}}{6\cdot 2^{12}} + \text{etc} \\
& - 2\alpha\pi^2\left(\tfrac{1}{3\cdot 2^6} + \tfrac{3}{1\cdot 4\cdot 2^8} + \tfrac{4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 2^{10}} + \tfrac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 2^{12}} + \tfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 2^{14}} + \text{etc}\right) \\
& - 2\beta\pi^4\left(\tfrac{1}{5\cdot 2^{10}} + \tfrac{5}{1\cdot 6\cdot 2^{12}} + \tfrac{6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 7\cdot 2^{14}} + \tfrac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8\cdot 2^{16}} + \tfrac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9\cdot 2^{18}} + \text{etc}\right) \\
& - 2\gamma\pi^6\left(\tfrac{1}{7\cdot 2^{14}} + \tfrac{7}{1\cdot 8\cdot 2^{16}} + \tfrac{8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 9\cdot 2^{18}} + \tfrac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 10\cdot 2^{20}} + \tfrac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11\cdot 2^{22}} + \text{etc}\right) \\
\text{etc}
\end{aligned}$$

§14 Daher werden wir zu dieser allgemeinen unendlichen Reihe geführt, welche alle jene in sich umfasst:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\cdot 2^{2n}} + \frac{n}{(n+1)2^{2n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)2^{2n+4}} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 3\cdot (n+3)2^{2n+6}} \\
& + \frac{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot (n+4)2^{2n+8}} + \text{etc},
\end{aligned}$$

deren Summe also gefunden werden muss. Wenn wir also die Summe dieser Reihe im Allgemeinen mit dem Zeichen $S(n)$ bezeichnen, werden wir

$$\begin{aligned}
Z = {} & -\frac{1}{8} + S(1) + 2\alpha\pi^2\left(\frac{1}{4\cdot 2^4} - S(3)\right) + 2\beta\pi^4\left(\frac{1}{6\cdot 2^6} - S(5)\right) \\
& + 2\gamma\pi^6\left(\frac{1}{8\cdot 2^8} - S(7)\right) + 2\delta\pi^8\left(\frac{1}{10\cdot 2^{10}} - S(9)\right) + \text{etc}
\end{aligned}$$

haben. Unsere allgemeine Reihe kann aber angenehmer so ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
n(n+1)S(n) = {} & \frac{n+1}{2^{2n}} + \frac{nn}{2^{2n+2}} + \frac{n(n+1)(n+1)}{2\cdot 2^{2n+4}} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 2^{2n+6}} \\
& + \frac{n(n+1)(n+3)(n+5)(n+6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^{2n+8}} + \frac{n(n+1)(n+4)(n+6)(n+7)(n+8)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^{2n+10}} + \text{etc},
\end{aligned}$$

wo die Nenner frei von der Zahl n sind. Die einzelnen Terme können auch so durch Faktoren dargestellt werden, dass

$$S(n) = A + AB + ABC + ABCD + ABCDE + \text{etc}$$

gesetzt wird und es wird

$$A = \frac{1}{n\cdot 2^{2n}}, \quad B = \frac{nn}{4(n+1)}, \quad C = \frac{(n+1)(n+1)}{4\cdot 2n}, \quad D = \frac{(n+2)(n+4)}{4\cdot 3(n+1)},$$

$$E = \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{4 \cdot 4 \cdot (n+2)(n+4)}, \quad F = \frac{(n+4)(n+7)(n+8)}{4 \cdot 5 \cdot (n+3)(n+5)}, \quad \text{etc},$$

wo der Faktor im Allgemeinen diese Form hat:

$$\frac{(n+\lambda-1)(n+2\lambda-3)(n+2\lambda-2)}{4\lambda(n+\lambda-2)(n+\lambda)}.$$

§15 Wir wollen daher mit dem einfachsten Fall $n = 1$ beginnen, und weil der Faktor im Allgemeinen gleich

$$\frac{\lambda(2\lambda-2)(2\lambda-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{2\lambda-1}{2\lambda+2}$$

ist, wird

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = \frac{3}{6}, \quad D = \frac{5}{8}, \quad E = \frac{7}{10}, \quad F = \frac{9}{12}, \quad \text{etc}$$

sein, woher

$$S(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 8}\left(1 + \frac{3}{6} + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \text{etc}\right)$$

wird. Weil aber

$$\sqrt{1-1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \text{etc} = 0$$

ist, wird

$$1 + \frac{3}{6} + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \text{etc} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$$

sein und daher

$$S(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

und

$$-\frac{1}{8} + S(1) = \frac{1}{4}.$$

§16 Damit wir aber die Summen der übrigen Reihen leichter bestimmen können, wollen wir x anstelle von $\frac{1}{2^2}$ schreiben, so dass $x = \frac{1}{4}$ ist, und weil wir

$$S(n) = \frac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 3\cdot (n+3)}x^{n+3} + \text{etc}$$

haben, was im Fall $n = 1$ übergeht in

$$S(1) = x + \frac{1}{2}xx + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^3 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \text{etc}$$

oder

$$S(1) = x + \frac{1}{2}xx + x^3 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{6\cdot 7}{2\cdot 3}x^5 + \frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4}x^6 + \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^7 + \text{etc}$$

oder

$$S(1) = x + \frac{1}{2}xx\left(1 + \frac{2}{1}x + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 2}xx + \frac{2\cdot 5\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 5}x^3 + \frac{2\cdot 5\cdot 14\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}x^4 + \text{etc}\right)$$

oder

$$S(1) = x + \frac{1}{2}xx\left(1 + \frac{3}{6}4x + \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}4^2x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10}4^3x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}4^4x^4 + \text{etc}\right);$$

aber es ist

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \frac{1}{2}4x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}4^2x^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}4^3x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}4^4x^4 - \text{etc},$$

woher

$$\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}4^2x^2\left(1 + \frac{3}{6}4x + \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}4^2x^2 + \text{etc}\right) = 1 - 2x - \sqrt{1-4x}$$

ist, also

$$S(1) = x + \frac{1 - 2x - \sqrt{1-4x}}{4} = \frac{1 + 2x - \sqrt{1-4x}}{4}$$

und so wird für $x = \frac{1}{4}$

$$S(1) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

wie oben.

§17 Wir wollen nun $n=3$ setzen und es sei $S(3)=Q$, während

$$S(1)=P=\frac{1+2x-\sqrt{1-4x}}{4}$$

wird, sodass

$$P=x+\frac{1}{2}xx+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^3+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\text{etc},$$
$$Q=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\frac{4\cdot 5}{2\cdot 5}x^5+\frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 6}x^6+\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}x^7+\text{etc}$$

ist. Daraus berechnet man

$$\begin{aligned}Pxx-Q=&\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5}x^5-\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}x^6\\&-\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7}x^7-\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8}x^8-\text{etc}\end{aligned}$$

und daher, indem man differenziert,

$$\begin{aligned}2Px+\frac{xxdP}{dx}-\frac{dQ}{dx}=&2xx-x^3-\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}5x^4-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}8x^5\\&-\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}11x^6-\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}14x^7-\text{etc};\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}\frac{xxdP}{dx}=&xx+x^3+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}3x^4+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}4x^5+\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}5x^6\\&+\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}6x^7+\text{etc},\end{aligned}$$

deren Dreifaches zur ersten addiert

$$\begin{aligned}2Px+\frac{4xxdP}{dx}-\frac{dQ}{dx}=&5xx+2x^3+4\cdot\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^4\\&+4\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^5+4\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^6+\text{etc}\end{aligned}$$

liefert, und

$$4Px=4xx+2x^3+4\cdot\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^4+4\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^5+4\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^6+\text{etc},$$

daher

$$-2Px-\frac{4xxdP}{dx}-\frac{dQ}{dx}=xx$$

und

$$\mathrm{d}Q = 4xx\mathrm{d}P - 2Px\mathrm{d}x - xx\mathrm{d}x,$$

woher wegen

$$\mathrm{d}P = \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-4x}}$$

der Ausdruck

$$\mathrm{d}Q = -\frac{1}{2}x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\mathrm{d}x\sqrt{1-4x} + \frac{2xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x}} = -\frac{1}{2}x\mathrm{d}x + \frac{x\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-4x}}$$

berechnet wird, und indem man integriert,

$$Q = -\frac{1}{4}xx - \frac{1+2x}{24}\sqrt{1-4x} + \frac{1}{24}.$$

Man setze $x = \frac{1}{4}$, in welchem Fall $P = \frac{3}{8}$ wird; es wird $Q = \frac{5}{192}$ sein, so dass

$$S(1) = \frac{3}{8}, \quad S(3) = \frac{5}{192}$$

ist und

$$-\frac{1}{8} + S(1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4 \cdot 2^4} - S(3) = -\frac{1}{96}.$$

§18 Wir wollen nun im Allgemeinen $S(n) = P$ setzen und die folgende Summe $S(n+2) = Q$; es wird

$$\begin{aligned} P =& \frac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+1} + \frac{n+1}{2}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2 \cdot 3}x^{n+3} \\ &+ \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^{n+4} + \text{etc} \\ Q =& \frac{1}{n+2}x^{n+2} + \frac{n+2}{n+3}x^{n+3} + \frac{n+3}{2}x^{n+4} + \frac{(n+4)(n+6)}{2 \cdot 3}x^{n+5} \\ &+ \frac{(n+5)(n+7)(n+8)}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^{n+6}, \end{aligned}$$

woraus man berechnet, dass

$$Q = Px - \frac{1}{2}(n+1)\int P\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(n-1)xx\int \frac{P\mathrm{d}x}{xx}$$

sein wird. Daher kann also aus dem Wert $S(n)$ der Wert $S(n+2)$ bestimmt werden, ausgenommen im Fall $n = 1$, weil dann in $\int \frac{P\mathrm{d}x}{xx}$ das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ auftauchen würde. Aber weil schon der Fall

$$S(3) = \frac{1 - 6xx - (1+2x)\sqrt{1-4x}}{24}$$

bekannt ist, wenn dieser für P genommen wird, wird

$$S(5) = Px - 2\int P\mathrm{d}x - xx\int \frac{P\mathrm{d}x}{xx}$$

werden, was durch Integration entwickelt

$$S(5) = \frac{1}{60}\left(1 - 15xx + 10x^3 - (1+2x-9xx)\sqrt{1-4x}\right)$$

gibt. Für $x = \frac{1}{4}$ also wird

$$S(5) = \frac{7}{32 \cdot 60} = \frac{7}{1920}$$

und daher

$$\frac{1}{6 \cdot 2^6} - S(5) = -\frac{1}{960}.$$

§19 Es sei weiter $n = 5$ und

$$P = \frac{1}{60}\left(1 - 15xx + 10x^3 - (1-2x-9xx)\sqrt{1-4x}\right);$$

es wird

$$S(7) = Px - 3\int P\mathrm{d}x - 2xx\int \frac{P\mathrm{d}x}{xx}$$

sein, nach Entwicklung welcher Integrale man schließlich

$$S(7) = \frac{1}{112}\left(1 - 28xx + 56x^3 - 14x^4 - (1+2x-22xx+20x^3)\sqrt{1-4x}\right)$$

findet. Für $x = \frac{1}{4}$ gesetzt wird also

$$S(7) = \frac{1}{112}\left(1 - \frac{7}{4} + \frac{7}{8} - \frac{7}{128}\right) = \frac{9}{2^{11} \cdot 7}$$

und daher

$$\frac{1}{8 \cdot 2^8} - S(7) = -\frac{1}{2^{10} \cdot 7}.$$

Wenn wir daher das sammeln, was wir bisher gefunden haben, werden wir auch, wie man leicht vermutet, die folgenden Werte erhalten:

$$\begin{aligned}
S(1)-\frac{1}{2\cdot 2^2} &= \frac{1}{4} &&= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^1},\\
S(3)-\frac{1}{4\cdot 2^4} &= \frac{1}{96} &&= \frac{1}{3\cdot 4\cdot 2^3},\\
S(5)-\frac{1}{6\cdot 2^6} &= \frac{1}{960} &&= \frac{1}{5\cdot 6\cdot 2^5},\\
S(7)-\frac{1}{8\cdot 2^8} &= \frac{1}{2^{10}\cdot 7} &&= \frac{1}{7\cdot 8\cdot 2^7}.
\end{aligned}$$

§20 Daher erhalten wir also schließlich für Z den folgenden Wert:

$$Z=\frac{1}{4}-\frac{\alpha\pi^2}{3\cdot 4\cdot 2^2}-\frac{\beta\pi^4}{5\cdot 6\cdot 2^4}-\frac{\gamma\pi^6}{7\cdot 8\cdot 2^6}-\frac{\delta\pi^8}{9\cdot 10\cdot 2^8}-\frac{\varepsilon\pi^{10}}{11\cdot 12\cdot 2^{10}}-\text{etc},$$

so dass

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc}=\frac{1}{2}\pi\pi Z$$

ist oder

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc}=\frac{1}{8}\pi\pi-\frac{2\alpha\pi^4}{3\cdot 4\cdot 2^4}-\frac{2\beta\pi^6}{5\cdot 6\cdot 2^6}-\frac{2\gamma\pi^8}{7\cdot 8\cdot 2^8}-\text{etc.}$$

Damit wir die Summe dieser Reihe finden, wollen wir π wie eine variable Größe betrachten und wollen, nachdem $\frac{\pi}{2}=\varphi$ gesetzt wurde, auch

$$\frac{\alpha\varphi^4}{3\cdot 4}+\frac{\beta\varphi^6}{5\cdot 6}+\frac{\gamma\varphi^8}{7\cdot 8}+\frac{\delta\varphi^{10}}{9\cdot 10}+\text{etc}=s$$

setzen; es wird

$$\frac{\mathrm{dd}s}{\mathrm{d}\varphi^2}=\alpha\varphi^2+\beta\varphi^4+\gamma\varphi^6+\delta\varphi^8+\text{etc}=z$$

sein, woher wir

$$\begin{aligned}
2zz = 2\alpha\alpha\varphi^4+4\alpha\beta\varphi^6+4\alpha\gamma\varphi^8+4\alpha\delta\varphi^{10}+\text{etc}\\
+2\beta\beta\varphi^8+4\beta\gamma\varphi^{10}+\text{etc}
\end{aligned}$$

bilden. Weil schon

$$\beta=\frac{2\alpha\alpha}{5},\quad \gamma=\frac{4\alpha\beta}{7},\quad \delta=\frac{4\alpha\gamma+2\beta\beta}{9},\quad \text{etc}$$

ist, wird
$$2\int zz\mathrm{d}\varphi = \beta\varphi^5 + \gamma\varphi^7 + \delta\varphi^9 + \text{etc} = z\varphi - \alpha\varphi^3$$
sein und daher
$$2zz\mathrm{d}\varphi = z\mathrm{d}\varphi + \varphi\mathrm{d}z - 3\alpha\varphi\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

§21 Weil nun $\alpha = \frac{1}{6}$ ist, findet man durch Integration
$$z = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\tan\varphi},$$
wie dem Betrachtenden klar werden wird. Daher, weil
$$\mathrm{dd}s = z\mathrm{d}\varphi^2$$
ist, berechnet man
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \int z\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\int\frac{\varphi\mathrm{d}\varphi}{\tan\varphi}$$
und
$$s = \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{2}\int\mathrm{d}\varphi\int\frac{\varphi\mathrm{d}\varphi}{\tan\varphi}$$
und daher
$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc} = \frac{1}{8}\pi\pi - \frac{1}{2}\varphi\varphi + \int\mathrm{d}\varphi\int\frac{\varphi\mathrm{d}\varphi}{\tan\varphi}$$
und wegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\pi = 2\varphi$ wird
$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc} &= \int\mathrm{d}\varphi\int\frac{\varphi\mathrm{d}\varphi}{\tan\varphi} = \frac{\pi}{2}\int\frac{\varphi\mathrm{d}\varphi}{\tan\varphi} - \int\frac{\varphi\varphi\mathrm{d}\varphi}{\tan\varphi}\\ &= 2\int\varphi\mathrm{d}\varphi\ln\sin\varphi - \frac{\pi}{2}\int\mathrm{d}\varphi\ln\sin\varphi\end{aligned}$$
sein; aber es ist
$$\int\mathrm{d}\varphi\ln\sin\varphi = -\frac{\pi\ln 2}{2},$$
also
$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{4}\ln 2 + 2\int\varphi\mathrm{d}\varphi\ln\varphi,$$
wo, nachdem die Integrale so genommen wurden, dass sie für $\varphi = 0$ gesetzt verschwinden, anschließend $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt werden muss, dass man die

Summe der vorgelegten Reihe erhält. Auch wenn aber die Integration nicht ausgeführt werden kann, kann ihr Wert durch Quadraturen bestimmt werden. Aber in der Tat ist die vorher durch Z gefundene Reihe selbst besonders geeignet um die Summe näherungsweise zu bestimmen.

§22 Daher ergreife ich die Gelegenheit, genauer diese Reihe zu betrachten

$$P = \frac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+1} + \frac{n+1}{2}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2\cdot 3}x^{n+3} + \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n+4} + \text{etc},$$

deren Wert wir für die Fälle, in denen n eine ganze ungerade Zahl ist, mit einer einzigartigen Methode bestimmt haben, die sich so verhalten:

wenn $n=1$, $P = \frac{1}{4}(1+2x-\sqrt{1-4x})$

$n=3$, $P = \frac{1}{24}(1-6xx-(1+2x)\sqrt{1-4x})$

$n=5$, $P = \frac{1}{60}(1-15xx+10x^3-(1+2x-9xx)\sqrt{1-4x})$

$n=7$, $P = \frac{1}{112}(1-28xx+56x^3-14x^4-(1+2x-22xx+20x^3)\sqrt{1-4x})$

Weil daher die Summation im Allgemeinen auf eine Differentialgleichung zurückgeführt werden kann, scheint es der Mühen wert, zu untersuchen, wie diesen Fälle die Werte genügen. Man sollte daher besser die Differentiale betrachten, welche sind:

$$\begin{aligned}
\text{wenn } n=1, &\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)\\
n=3, &\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(-x+\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\right)\\
n=5, &\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(-x+xx+\frac{x-3xx}{\sqrt{1-4x}}\right)\\
n=7, &\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(-x+3xx-x^3+\frac{x-5xx+5x^3}{\sqrt{1-4x}}\right)
\end{aligned}$$

§23 Im Allgemeinen aber ist durch Differentieren

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = x^{n-1} + nx^n + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}x^{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n+2} + \text{etc.}$$

Wir wollen

$$x = yy \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P}{2y\mathrm{d}y} = s$$

setzen, dass wir

$$s = y^{2n-2} + ny^{2n} + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} y^{2n+2} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{2n+4} + \text{etc}$$

haben, woher

$$y^{2-n}s = y^n + ny^{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} y^{n+4} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n+6} + \text{etc}$$

wird und daher weiter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dd}(y^{2-n}s)}{\mathrm{d}y^2} &= n(n-1)y^{n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1} y^n \\ &\quad + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2} y^{n+2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Es ist aber auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mathrm{d}y} \mathrm{d}\frac{s}{yy} &= (n-2)y^{2n-5} + (n-1)y^{2n-3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} y^{2n-1} \\ &\quad + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{2n+1} + \text{etc,} \end{aligned}$$

was mit y^{5-2n} multipliziert und erneut differenziert

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\mathrm{d}y^2} \mathrm{d}\left(y^{5-2n} \mathrm{d}\frac{s}{yy}\right) &= n(n-1)y + \frac{n(n+1)(n+2)}{1} y^3 \\ &\quad + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2} y^5 + \text{etc} \end{aligned}$$

ergibt, welche Reihe durch das Obere auch gleich

$$\frac{y^{3-n}\mathrm{dd}(y^{2-n}s)}{\mathrm{d}y^2}$$

ist, so dass wir zwischen s und y diese Gleichung haben

$$\mathrm{d}\left(y^{5-2n} \mathrm{d}\frac{s}{yy}\right) = 4y^{3-n}\mathrm{dd}(y^{2-n}s).$$

§24 Nachdem das Element $\mathrm{d}y$ als Konstante genommen wurde, gibt die Gleichung entwickelt

$$\begin{aligned} &y^{3-2n}\mathrm{dd}s + (1-2n)y^{2-2n}\mathrm{d}y\mathrm{d}s - 4(1-n)y^{1-2n}s\mathrm{d}y^2 \\ =&4y^{5-2n}\mathrm{dd}s + 8(2-n)y^{4-2n}\mathrm{d}y\mathrm{d}s + 4(2-n)(1-n)y^{3-2n}s\mathrm{d}y^2, \end{aligned}$$

welche mit y^{2n-1} multipliziert in diese

$$\begin{aligned} &yy(1-4yy)\mathrm{dd}s + (1-2n)y\mathrm{d}y\mathrm{d}s - 4(1-n)s\mathrm{d}y^2 \\ &-8(2-n)y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}s - 4(2-n)(1-n)yys\mathrm{d}y^2 = 0 \end{aligned}$$

übergeht, welche für $yy = x$ gesetzt und $\mathrm{d}x$ als Konstante genommen in diese

$$\begin{aligned} &xx(1-4x)\mathrm{dd}s + (1-n)x\mathrm{d}x\mathrm{d}s - (1-n)s\mathrm{d}x^2 \\ &-2(5-2n)xx\mathrm{d}x\mathrm{d}s - (2-n)(1-n)sx\mathrm{d}x^2 = 0 \end{aligned}$$

verwandelt wird, wo

$$s = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \quad \text{oder} \quad P = \int s\mathrm{d}x$$

ist. Die Integrationen aber müssen nach dem Gesetz aufgestellt werden, dass, während x unendlich klein wird,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = (n-1)x^{n-2}, \quad s = x^{n-1} \quad \text{und} \quad P = \frac{1}{n}x^n$$

wird.

§25 Wenn diese Gleichung durch eine unendliche Reihe integriert wird, indem man mit dem Term x^{n-1} beginnt, wird die vorgelegte Reihe selbst wiederhergestellt, aber der Anfang kann auch bei konstanten Term x^0 gemacht werden, woher man auch ein Integral erhält, welches aber unseren Bedingungen nicht genügt; aber es kann außerdem ein anderes Integral gefunden werden, welches mit jenem verbunden die Aufgabe erledigt. Man setzt also an

$$s = O + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc},$$

es wird

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + \text{etc}$$

sein und

$$\frac{\mathrm{dd}s}{\mathrm{d}x^2} = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + 30Fx^4 + 42Gx^5 + \text{etc},$$

nach Einsetzen welcher Reihen

$$\begin{array}{lllll}
- & (1-n)O & & & \\
-(2-n)(1-n)Ox & -(2-n)(1-n)Ax^2 & -(2-n)(1-n)Bx^3 & -(2-n)(1-n)Cx^4 & -\text{etc} = 0 \\
+ & (1-n)Ax + & 2(1-n)Bx^2 + & 3(1-n)Cx^3 + & 4(1-n)Dx^4 + \text{etc} = 0 \\
 & - & (1-n)Bx^2 - & (1-n)Cx^3 - & (1-n)Dx^4 - \text{etc} = 0 \\
 & + & 2Bx^2 + & 6Cx^3 + & 12Dx^4 + \text{etc} = 0 \\
 & & - & 8Bx^3 - & 24Dx^4 - \text{etc} = 0
\end{array}$$

werden muss, welche Gleichung auf diese Form zurückgeführt wird

$$\begin{gathered}
-(1-n)O - (2-n)(1-n)Ox \\
+(3-n)Bx^2 + 2(4-n)Cx^3 + 3(5-n)Dx^4 + 4(6-n)Ex^5 + \text{etc} = 0 \\
-(3-n)(4-n)Ax^2 - (5-n)(6-n)Bx^3 - (7-n)(8-n)Cx^4 - (9-n)(10-n)Dx^4
\end{gathered}$$

§26 Nachdem also diese Terme gleich 0 gesetzt wurden, muss $O = 0$ werden, wenn nicht $n = 1$ ist, aber für die übrigen Koeffizienten wird man

$$\begin{aligned}
B &= \frac{(3-n)(4-n)}{1\cdot(3-n)}A = \frac{4-n}{1}A, \\
C &= \frac{(5-n)(6-n)}{2(4-n)}B = \frac{(5-n)(6-n)}{1\cdot 2}A, \\
D &= \frac{(7-n)(8-n)}{3(5-n)}C = \frac{(6-n)(7-n)(8-n)}{1\cdot 2\cdot 3}A, \\
E &= \frac{(9-n)(10-n)}{4(6-n)}D = \frac{(7-n)(8-n)(9-n)(10-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

haben, woher das Bildungsgesetz der Progression klar ist. Im Fall $n = 1$ bleibt aber die Größe O unbestimmt, dann aber genügt sie der Gleichung, nachdem alle Koeffizienten gleich 0 gesetzt wurden, sodass $s = 0$ ist, sogar wenn aus diesen Bestimmungen auch endliche Werte für diese angenommen werden könnten, wie zum Beispiel

$$B = \frac{3}{1}A, \quad C = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 1}A, \quad D = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}A, \quad \text{etc},$$

woher das unvollständige Integral

$$s = O + A\left(x + \frac{3}{1}x^2 + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}x^3 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^4 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^5 + \text{etc}\right)$$

wäre.

§27 Auf ähnliche Weise wird für die übrigen Fälle, in denen n eine ganze Zahl ist, $O = 0$ werden, aber die Zahl A ist beliebig; außerdem wird ein anderer Koeffizient auch nicht bestimmt festgelegt, der sich deshalb nach Belieben annehmen lässt. Wenn er daher gleich 0 gesetzt wird, wird man ein Integral, das aus endlichen Termen besteht, haben, welches sich so verhalten wird:

Wenn $n = 3$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = 0,\ C = 0,$ etc
Wenn $n = 4$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = 0,\ C = 0,$ etc
Wenn $n = 5$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -A,\ C = 0,\ D = 0,$ etc
Wenn $n = 6$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -2A,\ C = 0,\ D = 0,$ etc
Wenn $n = 7$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -3A,\ C = A,\ D = 0,$ etc
Wenn $n = 8$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -4A,\ C = \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}A,\ D = 0,\ E = 0,$ etc
Wenn $n = 9$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -5A,\ C = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}A,\ D = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3},\ E = 0,$ etc
Wenn $n = 10$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -6A,\ C = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}A,\ D = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3},\ E = 0,$ etc
Wenn $n = 11$ ist, ist $O = 0,\ A$ unbestimmt,
$B = -7A,\ C = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}A,\ D = -\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}A,\ E = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A,\ F = 0,$ etc
etc

§28 Siehe also für alle Fälle, in denen n eine ganze positive Zahl außer $n = 2$ ist, die speziellen Integrale, woher die rationalen Teile der oben für $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$

gefundenen Formeln berechnet werden können:

$$
\begin{aligned}
&\text{wenn } n=1, \quad s=O\\
&\text{wenn } n=3, \quad s=Ax\\
&\text{wenn } n=4, \quad s=Ax\\
&\text{wenn } n=5, \quad s=A(x-xx)\\
&\text{wenn } n=6, \quad s=A(x-2xx)\\
&\text{wenn } n=7, \quad s=A(x-3xx+x^3)\\
&\text{wenn } n=8, \quad s=A(x-4xx+3x^3)\\
&\text{wenn } n=9, \quad s=A(x-5xx+6x^3-x^4)\\
&\text{wenn } n=10, \quad s=A(x-6xx+10x^3-4x^4)\\
&\text{wenn } n=11, \quad s=A(x-7xx+15x^3-10x^4+x^5)\\
&\text{wenn } n=12, \quad s=A(x-8xx+21x^3-20x^4+5x^6)
\end{aligned}
$$

§29 Für eine beliebige Zahl n also ist das spezielle Integral

$$s = A\left\{\begin{aligned}&x-\tfrac{n-4}{1}xx+\tfrac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}x^3-\tfrac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}x^4\\ &+\tfrac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^5-\text{etc}\end{aligned}\right\},$$

wenn auch die ins Unendliche fortgesetzte Reihe genügt; dennoch, weil ein gewisser Term verschwindet, lassen sich alle folgenden weglassen, die ja getrennt genommen ein anderes spezielles Integral liefern würden. Im Übrigen ist daher klar, dass eine beliebige dieser Formeln aus zwei vorhergehenden so bestimmt werden, dass, wenn für die Fälle $n=v$, $n=v+1$, $n=v+2$ die Werte von s, s', s'' gesetzt werden,

$$s'' = s' - sx$$

sein wird, weil ja die Konstante A bei allen denselben Wert erhält. Und vermöge dieses Gesetzes muss für den Fall $n=2$ der Wert $s=0$ gesetzt werden. Aber, wie ich schon erwähnt habe, genügen diese speziellen Integrale unseren Bedingungen nicht; dennoch liefern sie irrationale Teile, wie wir bald sehen werden.

§30 Damit wir aber die vollständigen Integrale finden, wollen wir andere spezielle Integrale untersuchen, die irrationale Teile liefern. Für dieses Ziel wollen wir

$$s = \frac{t}{\sqrt{1-4x}}$$

setzen; es wird

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2t\mathrm{d}x}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}}$$

sein und

$$\mathrm{dd}s = \frac{\mathrm{dd}t}{\sqrt{1-4x}} + \frac{4\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{12t\mathrm{d}x^2}{(1-4x)^{\frac{5}{2}}},$$

nach Einsetzen wovon unsere Differenzen-Differentialgleichung in diese Form übergehen wird

$$\begin{aligned} xx(1-4x)\mathrm{dd}t - (n-1)x\mathrm{d}t\mathrm{d}x + (n-1)t\mathrm{d}x^2 \\ +2(2n-3)xx\mathrm{d}t\mathrm{d}x - n(n-1)tx\mathrm{d}x^2 = 0. \end{aligned}$$

Man setze hier

$$t = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{etc},$$

und nachdem die Substitution gemacht worden ist, gelangt man zu dieser Gleichung:

$$\begin{gathered} 0 = (n-1)A \\ -n(n-1)Ax - (n-3)Cx^2 - 2(n-4)Dx^3 - 3(n-5)Ex^4 - \text{etc} \\ -(n-2)(n-3)Bx^2 - (n-4)(n-5)Cx^3 - (n-6)(n-7)Dx^4; \end{gathered}$$

wenn also nicht $n = 1$ ist, muss $A = 0$ sein und für die übrigen Werte wird

$$\begin{aligned} C &= -\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot(n-3)}B = -\frac{n-2}{1}B \\ D &= -\frac{(n-4)(n-5)}{2(n-4)}C = +\frac{(n-2)(n-5)}{1\cdot 2}B \\ E &= -\frac{(n-6)(n-7)}{3(n-5)}D = -\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}B \end{aligned}$$

§31 Aus diesen werden sich also die endlichen Werten von t für die einzelnen ganzen Zahlen n so verhalten:

$$
\begin{aligned}
&\text{wenn } n = 1, \quad t = A\\
&\text{wenn } n = 2, \quad t = Bx\\
&\text{wenn } n = 3, \quad t = Bx\\
&\text{wenn } n = 4, \quad t = B(x - 2xx)\\
&\text{wenn } n = 5, \quad t = B(x - 3xx)\\
&\text{wenn } n = 6, \quad t = B(x - 4xx + 2x^3)\\
&\text{wenn } n = 7, \quad t = B(x - 5xx + 5x^3)\\
&\text{wenn } n = 8, \quad t = B(x - 6xx + 9x^3 - 2x^4)\\
&\text{wenn } n = 9, \quad t = B(x - 7xx + 14x^3 - 7x^4)\\
&\text{wenn } n = 10, \quad t = B(x - 8xx + 20x^3 - 16x^4 + 2x^5)
\end{aligned}
$$

und im Allgemeinen

$$
t = B \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{n-2}{1}xx + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}x^3 - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^4 \\ + \frac{(n-2)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^5 - \text{etc} \end{array} \right\},
$$

wo wiederum, wie zuvor, $t'' = t' - tx$ ist.

§32 So wie wir oben die Reihe P durch $S(n)$ bezeichnet haben, wollen wir so die Reihe $s = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ durch $\Sigma(n)$ bezeichnen; es wird im Allgemeinen

$$\begin{aligned}
\Sigma(1) &= -A + \frac{B}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(2) &= 0 + \frac{2Bx}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(3) &= Ax + \frac{Bx}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(4) &= Ax + \frac{B(x-2xx)}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(5) &= A(x-xx) + \frac{B(x-3xx)}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(6) &= A(x-2xx) + \frac{B(x-4xx+2x^3)}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(7) &= A(x-3xx+x^3) + \frac{B(x-5xx+5x^3)}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(8) &= A(x-4xx+3x^3) + \frac{B(x-6xx+9x^3-2x^4)}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(9) &= A(x-5xx+6x^3-x^4) + \frac{B(x-7xx+14x^3-7x^4)}{\sqrt{1-4x}} \\
\Sigma(10) &= A(x-6xx+10x^3-4x^4) + \frac{B(x-8xx+20x^3-16x^4+2x^5)}{\sqrt{1-4x}} \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

sein; hier ist $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$, so dass die Formen auf die vorgelegte Reihe angewendet werden.

§33 Weil ja diese Werte eine rekurrente Reihe beschreiben, kann der allgemeine Term, weil ja ein beliebiger dem letzten und dem vorletzten mit x multiplizierten gleich wird, oder der Wert von $\Sigma(n)$ endlich ausgedrückt werden; es wird nämlich aus der Eigenschaft der rekurrenten Reihen

$$\Sigma(n) = M\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^n + N\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^n$$

sein, wo aus den beiden ersten die Koeffizienten M und N so bestimmt werden, dass

$$M = \frac{(A+B)(1-2x-\sqrt{1-4x})}{2x\sqrt{1-4x}} = \frac{A+B}{x\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^2$$

$$N = \frac{(B-A)(1-2x+\sqrt{1-4x})}{2x\sqrt{1-4x}} = \frac{B-A}{x\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^2$$

ist. Weil aber für unseren Fall $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$ ist, wird

$$\Sigma(n) = \frac{1}{x\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^2$$

sein oder

$$\Sigma(n) = \frac{x}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{n-2} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x},$$

während

$$P = \frac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+1} + \frac{n+1}{2}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2\cdot 3}x^{n+3} + \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n+4} + \text{etc}$$

wird.

§34 Der Wert dieser Reihe also, den wir P setzen, ist

$$P = \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{n-2};$$

um das Integral zu finden, setze man

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = y,$$

es wird

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x}} \quad \text{und} \quad x = y - yy$$

sein, woher

$$P = \int \mathrm{d}y(y - yy)y^{n-2} = \frac{y^n}{n} - \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

wird und daher

$$P = \frac{n+1-ny}{n(n+1)} \cdot y^n$$

oder

$$P = \frac{n+2+n\sqrt{1-4x}}{2n(n+1)} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^n = S(n)$$

für $x = \frac{1}{4}$ gesetzt, woher man für die oben (§14) ausgelegten Formeln

$$S(n) = \frac{n+2}{2^{n+1}(n+1)n}$$

berechnet und daher, wie sich die Formeln dort verhalten

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - S(n) = -\frac{1}{2^n(n+1)n},$$

welcher Ausdruck völlig mit denen übereinstimmt, welche wir oben (§19) einzig auf Induktion gestützt gegeben haben, so dass nun freilich weiter kein Zweifel übrig bleiben kann.

§35 Darauf ist bemerkenswert, dass das vollständige und freilich algebraische Integral dieser Differenzen-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &xx(1-4x)\mathrm{dd}s - (n-1)x\mathrm{d}x\mathrm{d}s + (n-1)s\mathrm{d}x^2 \\ &+ 2(2n-5)xx\mathrm{d}x\mathrm{d}s - (n-1)(n-2)sx\mathrm{d}x^2 = 0 \end{aligned}$$

angegeben werden kann, welches sich aus dem Vorhergehenden so verhält

$$s = \frac{Cx}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{n-2} + \frac{Dx}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{n-2};$$

wie dieses daher durch Integration gefunden werden kann, ist nicht so leicht klar. Daher wird trotzdem eingesehen, dass die Substitution

$$s = \frac{xu}{\sqrt{1-4x}}$$

sehr nützlich sein wird; nachdem nämlich in §30 $t = ux$ gesetzt wurde, entsteht diese Gleichung

$$\begin{aligned} &xx(1-4x)\mathrm{dd}u-(n-3)x\mathrm{d}x\mathrm{d}u-(n-2)(n-3)xu\mathrm{d}x^2\\ &+2(2n-7)xx\mathrm{d}x\mathrm{d}u=0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &x(1-4x)\mathrm{dd}u-(n-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}u-(n-2)(n-3)u\mathrm{d}x^2\\ &+2(2n-7)x\mathrm{d}x\mathrm{d}u=0, \end{aligned}$$

deren Integral also

$$u=C\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{n-2}+D\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{n-2}$$

ist.

§36 Wenn in dieser Gleichung

$$\sqrt{1-4x}=y$$

gesetzt wird, und das Element $\mathrm{d}y$ als konstant eingeführt wird, wird diese einfachere Gleichung hervorgehen

$$(1-yy)\mathrm{dd}u+2(n-3)y\mathrm{d}y\mathrm{d}u-(n-2)(n-3)u\mathrm{d}y^2=0,$$

deren Integral schon bekannt ist

$$u=C\left(\frac{1+y}{2}\right)^{n-2}+D\left(\frac{1-y}{2}\right)^{n-2}$$

zu sein. Damit also klar wird, wie diese daher gefunden werden kann, wollen wir $n=m+2$ setzen, sodass wir

$$(1-yy)\mathrm{dd}u+2(m-1)y\mathrm{d}y\mathrm{d}u-m(m-1)u\mathrm{d}y^2=0$$

haben, wo klar ist, dass diese Position

$$u=(\alpha+\beta y)^m$$

angenehm betrachtet werden kann, woher

$$\mathrm{d}u = m\beta \mathrm{d}y(\alpha + \beta y)^{m-1}$$

und

$$\mathrm{dd}u = m(m-1)\beta\beta \mathrm{d}y^2(\alpha + \beta y)^{m-2}$$

wird; nachdem das gemacht wurde, wird

$$m(m-1)(\alpha + \beta y)^{m-2}(\beta\beta(1-yy) + 2\beta(\alpha y + \beta yy) - \alpha\alpha - 2\alpha\beta y - \beta\beta yy) = 0$$

sein und daher $\beta\beta = \alpha\alpha$, also

$$u = C(1 \pm y)^m.$$

Und wegen des doppeldeutigen Zeichen wird man als vollständiges Integral

$$u = C(1+y)^m + D(1-y)^m$$

erhalten.

§37 Im Übrigen wird es förderlich sein, bemerkt zu haben, dass diese letzte Gleichung

$$(1-yy)\mathrm{dd}u + 2(m-1)y\mathrm{d}y\mathrm{d}u - m(m-1)u\mathrm{d}y^2 = 0$$

integrierbar gemacht wird, wenn sie durch $(1 \pm y)^m$ geteilt wird. Aber die erste Gleichung

$$x(1-4x)\mathrm{dd}u - (n-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}u - (n-2)(n-3)u\mathrm{d}x^2 + 2(2n-7)x\mathrm{d}x\mathrm{d}u = 0$$

wird integrierbar, wenn sie mit

$$x^{-n+3}\mathrm{d}u - \frac{n-2}{2}x^{-n+2}u\mathrm{d}x$$

multipliziert wird. Im Allgemeinen aber wird die vorgelegte durch diese Gleichung

$$\begin{aligned} &xx(A+Bx)\mathrm{dd}u + \frac{1}{2}(2\alpha+\lambda)Ax\mathrm{d}x\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\alpha(\lambda-2)Au\mathrm{d}x^2 \\ &+ \frac{1}{2}(2\alpha+\lambda+1)Bxx\mathrm{d}x\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\alpha(\lambda-1)Bxu\mathrm{d}x^2 = 0, \end{aligned}$$

wenn sie mit $x^{\lambda-2}\mathrm{d}u + \alpha x^{\lambda-3}u\mathrm{d}x$ multipliziert wird, integrierbar werden und das Integral wird

$$\frac{1}{2}x^{\lambda}(A+Bx)\mathrm{d}u^2 + \alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)u\mathrm{d}u\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\alpha\alpha x^{\lambda-2}(A+Bx)u^2\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}C\mathrm{d}x^2$$

sein oder

$$x^{\lambda}\mathrm{d}u^2 + 2\alpha x^{\lambda-1}u\mathrm{d}u\mathrm{d}x + \alpha\alpha x^{\lambda-2}u^2\mathrm{d}x^2 = \frac{C\mathrm{d}x^2}{A+Bx},$$

also

$$x^{\frac{1}{2}\lambda}\mathrm{d}u + \alpha x^{\frac{1}{2}\lambda-1}u\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x\sqrt{C}}{\sqrt{A+Bx}}$$

und daher

$$u = x^{-\alpha}\int \frac{x^{\alpha-\frac{1}{2}\lambda}\mathrm{d}x\sqrt{C}}{\sqrt{A+Bx}}.$$

§38 In dieser allgemeinen Gleichung aber ist unsere obere nicht enthalten; daher wollen wir die Bedingungen dieser Gleichung

$$xx(A+Bx)\mathrm{dd}u + x(C+Dx)\mathrm{d}u\mathrm{d}x + (E+Fx)u\mathrm{d}x^2 = 0$$

genauer untersuchen, dass sie mit

$$x^{\lambda-2}\mathrm{d}u + \alpha x^{\lambda-3}u\mathrm{d}x$$

multipliziert integrierbar wird. Und zuerst wird das Integral

$$\frac{1}{2}x^{\lambda}(A+Bx)\mathrm{d}u^2 + \alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)u\mathrm{d}u\mathrm{d}x + \frac{\alpha E}{\lambda-2}x^{\lambda-2}uu\mathrm{d}x^2$$

$$+\frac{\alpha F}{\lambda-1}x^{\lambda-1}u^2\mathrm{d}x^2 = G\mathrm{d}x^2;$$

es benötigt aber, dass zuerst

$$C = \left(\alpha + \frac{1}{2}\lambda\right)A, \quad D = \left(\alpha + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right)B$$

ist, dann aber auf dreifache Weise

I. entweder $E = \frac{1}{2}\alpha(\lambda-2)A$ und $F = \frac{1}{2}\alpha(\lambda-1)B$, welches der obere Fall ist.

II. oder $\lambda = 2\alpha+2$, $F = \frac{1}{2}\alpha(2\alpha+1)B$, während E unbestimmt bleibt.

III. oder $\lambda = 2\alpha+1$, $E = \frac{1}{2}\alpha(2\alpha-1)A$, während F unbestimmt bleibt.

§39 Siehe also die zwei Differenzen-Differentialgleichungen, die sich hinreichend weit erstrecken, welche sich mit dieser Methode integrieren lassen:

I.

$$\begin{aligned}xx(A+Bx)\mathrm{dd}u + (2\alpha+1)Ax\mathrm{d}x\mathrm{d}u + Eu\mathrm{d}x^2\\ +\left(2\alpha+\tfrac{3}{2}\right)Bxx\mathrm{d}x\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}\alpha(2\alpha+1)Bxu\mathrm{d}x^2 = 0,\end{aligned}$$

die mit

$$x^{2\alpha}\mathrm{d}u + \alpha x^{2\alpha-1}u\mathrm{d}x$$

multipliziert das Integral

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^{2\alpha+2}(A+Bx)\mathrm{d}u^2 + \alpha x^{2\alpha+1}(A+Bx)u\mathrm{d}u\mathrm{d}x\\ +\frac{1}{2}Ex^{2\alpha}uu\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{2}\alpha\alpha Bx^{2\alpha+1}uu\mathrm{d}x^2 = G\mathrm{d}x^2\end{aligned}$$

gibt. Die andere Form aber ist

II.

$$\begin{aligned}xx(A+Bx)\mathrm{dd}u + (2\alpha+\tfrac{1}{2})Ax\mathrm{d}x\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\alpha(2\alpha-1)Au\mathrm{d}x^2\\ +(2\alpha+1)Bxx\mathrm{d}x\mathrm{d}u + Fxu\mathrm{d}x^2 = 0,\end{aligned}$$

welche mit

$$x^{2\alpha-1}\mathrm{d}u + \alpha x^{2\alpha-2}u\mathrm{d}x$$

multipliziert dieses Integral liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^{2\alpha+1}(A+Bx)\mathrm{d}u^2 + \alpha x^{2\alpha}(A+Bx)u\mathrm{d}u\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\alpha\alpha Ax^{2\alpha-1}\\ +\frac{1}{2}Fx^{2\alpha}u^2\mathrm{d}x^2 = G\mathrm{d}x^2.\end{aligned}$$

Wenn in der ersten

$$A=1,\quad B=-4,\quad \text{und}\quad 2\alpha+1=-n+3\quad \text{und}\quad E=0$$

gesetzt wird, geht die in §35 vorgelegte Gleichung hervor.

§40 Aber es ist ein anderer Weg gegeben, die Summe der Progressionen aus §23

$$\frac{dP}{dx} = x^{n-1} + \frac{n}{1}x^n + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}x^{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n+2} + \text{etc}$$

zu finden; in diesem, weil x wie eine Konstante betrachtet wird, wollen wir diese Reihe betrachten

$$s = 1 + \frac{n}{2}a^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot 4}a^4 + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6}a^6 + \text{etc},$$

wo

$$aa = 2x \quad \text{und} \quad \frac{dP}{dx} = x^{n-1}s$$

ist. Man nehme gleich diese Reihe

$$\frac{(1+ay)^{-n+1} + (1-ay)^{-n+1}}{2}$$
$$= 1 + \frac{(n-1)n}{1\cdot 2}aay^2 + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4y^4 + \text{etc}$$

zur Hilfe, für welche wir der Kürze wegen

$$1 + Aa^2y^2 + Ba^4y^4 + Ca^6y^6 + \text{etc}$$

schreiben wollen und es wird

$$s = 1 + \frac{1}{n-1}Aa^2 + \frac{1\cdot 3}{(n-1)n}Ba^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(n-1)(n+1)}Ca^6 + \text{etc}$$

sein. Man setze nun

$$s = \frac{1}{z}\int dz(1 + Aa^2y^2 + Ba^4y^4 + Ca^6y^6 + \text{etc}),$$

und es muss

$$\int yydz = \frac{1}{n-1}\int dz$$
$$\int y^4dz = \frac{3}{n}\int yydz$$
$$\int y^6dz = \frac{5}{n+1}\int y^4dz$$

werden und daher im Allgemeinen

$$\int y^{2\lambda}dz = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}dz,$$

wenn nach der Integration y ein bestimmter Wert zugeteilt wird.

§41 Wir wollen also setzen, dass im Allgemeinen

$$\int y^{2\lambda}\mathrm{d}z = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}\mathrm{d}z + \frac{Qy^{2\lambda-1}}{n+\lambda-2}$$

ist, und daher, indem man differentiert und durch $y^{2\lambda-2}$ teilt, berechnet man

$$(n+\lambda-2)yy\mathrm{d}z = (2\lambda-1)\mathrm{d}z + y\mathrm{d}Q + (2\lambda-1)Q\mathrm{d}y,$$

welche Gleichung für alle Zahlen λ Geltung haben muss, woher so wie

$$yy\mathrm{d}z = 2\mathrm{d}z + 2Q\mathrm{d}y$$

auch genauso

$$(n-2)yy\mathrm{d}z = -\mathrm{d}z + y\mathrm{d}Q - Q\mathrm{d}y$$

sein wird, also

$$\mathrm{d}z = \frac{2Q\mathrm{d}y}{yy-2} = \frac{y\mathrm{d}Q - Q\mathrm{d}y}{(n-2)yy+1},$$

woher

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{(2n-3)y\mathrm{d}y}{2-yy} \quad \text{und} \quad Q = (2-yy)^{n-\frac{3}{2}}$$

sein wird und daher

$$\mathrm{d}z = -2\mathrm{d}y(2-yy)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Daher wird, nachdem nach der Integration $y=\sqrt{2}$ gesetzt wurde,

$$\int y^{2\lambda}\mathrm{d}z = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}\mathrm{d}z,$$

und man findet

$$s = \frac{\int \mathrm{d}y(2-yy)^{n-\frac{1}{2}}((1+ay)^{-n+1}+(1-ay)^{-n+1})}{2\int \mathrm{d}y(2-yy)^{n-\frac{1}{2}}},$$

wenn nach der Integration $y=\sqrt{2}$ gesetzt wird.

§42 Auch wenn diese Methode sofort für die gesuchte Summe eine Integralformel beschafft, zeigt sie dennoch nicht den wahren Wert in einem algebraischen Ausdruck. In dem oberen Zeilen haben wir aber gesehen, dass

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \right)^{n-2}$$

ist, woher wir schließen, dass hier

$$s = \frac{x^{2-n}}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \right)^{n-2} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \right)^{n-2}$$

sein wird. Wenn wir daher $2x = aa$ setzen, wird auch der Wert der oberen Integralformeln im Fall $y = \sqrt{2}$

$$s = \frac{1}{\sqrt{1-2aa}} \left(\frac{1-\sqrt{1-2aa}}{aa} \right)^{n-2}$$

algebraisch sein, welcher Umstand keineswegs zu verachten scheint, weil sich daher vielleicht andere hochberühmte Sachen in dieser Art berechnen lassen.