

KAPITEL 5

ÜBER DIE VARIATION DREI VARIABLEN INVOLVIERENDER UND ZWEI RELATIONEN VERWICKELNDER INTEGRALFORMELN

Leonhard Euler

PROBLEM 12

§123 *Nachdem irgendeine Formel vorgelegt wurde, die die drei Variablen x, y, z mit ihren Differentialen irgendeines Grades involviert, ihre aus den Variationen aller drei Variablen abstammende Variation zu bestimmen.*

LÖSUNG

Es sei W diese vorgelegte Formel, von welcher Art zuerst der variierte Wert $W + \delta W$ werde, der entsteht, wenn anstelle von x, y, z die variierten Werte derselben geschrieben werden

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z,$$

und auf die gleiche Weise für deren Differentiale

$$dx + d\delta x, \quad dy + d\delta y, \quad dz + d\delta z,$$

und so weiter; wenn von diesen die Formel W weggeschafft wird, wird ihre Variation δW zurückbleiben. Daher wird eingesehen, dass diese Variation durch die übliche Differentiation erhalten wird, wenn nur anstelle des Differentiationszeichens d das Variationszeichen δ geschrieben wird. Es wird

nur förderlich sein bemerkt zu haben, wenn Variationen von Differentialen genommen werden müssen, dass es egal ist, an welcher Stelle das Variationszeichen zwischen die Differentiationszeichen gesetzt wird, wie wir oben [§37, 40] bewiesen haben; daher wird das Variationszeichen immer an die letzte Stelle gesetzt werden können, was, wenn wir zu Integralformeln fortschreiten werden, am angenehmsten zu sein scheint, so wie aus dem, was bisher über Integralformeln, die zwei Variablen involvieren, angegeben worden ist, zu Genüge klar ist.

KOROLLAR 1

§124 Weil ja z genauso wie y als eine Funktion von x betrachtet werden kann, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{dz}{dx} = p$ gesetzt wird, wird gelten

$$\delta p = \frac{d\delta y - p d\delta x}{dx} \quad \text{und} \quad \delta p = \frac{d\delta z - p d\delta x}{dx},$$

und auf die gleiche Weise weichen die daher derivierten Formeln von den oberen nicht ab.

KOROLLAR 2

§125 Wir wollen $\delta y - p\delta x = w$ und $\delta z - p\delta x = w$ setzen und es wird sein

$$d\delta y - p d\delta x - q dx \delta x = dw \quad \text{und} \quad d\delta z - p d\delta x - q dx \delta x = dw,$$

wenn wir natürlich setzen

$$\frac{dp}{dx} = q \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dx} = q,$$

woher klar ist, dass sein wird

$$\delta p - q\delta x = \frac{dw}{dx} \quad \text{und} \quad \delta p - q\delta x = \frac{dw}{dx}.$$

KOROLLAR 3

§126 Wenn wir weiter festlegen

$$\frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dq}{dx} = \tau, \quad \frac{dr}{dx} = s, \quad \frac{dt}{ds} = s \quad \text{etc.},$$

wird auf die gleiche Weise für konstant genommenes dx sein

$$\begin{aligned} \delta q - r\delta x &= \frac{ddw}{dx^2}, & \delta q - \tau\delta x &= \frac{ddw}{dx^2}, \\ \delta r - s\delta x &= \frac{d^3w}{dx^3}, & \delta \tau - s\delta x &= \frac{d^3w}{dx^3} \end{aligned}$$

und so weiter.

BEMERKUNG 1

§127 Ob also die zu variierende Formel einen endlichen Wert hatte oder einen unendlichen oder gar einen verschwindenden, es kann mit Hilfe der Vorschriften ihre Variation genauso wie oben gefunden werden; denn diese Vorschriften weichen von den oberen nicht ab, außer dass hier Differentialwerte zweier Arten, zum einen die mit lateinischen Buchstaben p, q, r, s etc., zum anderen die mit germanischen p, q, τ, s etc. angegebenen, eingeführt werden müssen; die Begründung dieser Sache ist darin gelegen, dass hier jede der beiden Variablen y und z als Funktion von x betrachtet werden kann. Wenn aber eine einzige Gleichung zwischen den drei Koordinaten gegeben wäre oder gesucht werden würde, würden die hier eingeführten Buchstaben p oder p keinen bestimmten Wert haben, weil ohne Veränderung jener Gleichung die Brüche $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ ganz und gar alle Werte erhalten könnten. Nachdem aber diese Buchstaben und die Differentiale selbst in der Rechnung beibehalten wurden, wird auch für diesen Fall die in der Lösung erläuterte Regel die Variation aufzeigen.

BEMERKUNG 2

§128 Oben [§12-24] habe ich schon bemerkt, dass dieser Fall dreier Variablen, deren Relation mit zwei Gleichungen bestimmt wird, sorgfältig von dem zu

unterscheiden ist, wo die Relation mit einer einzigen Gleichung bestimmt zu werden angenommen wird. Dieser Unterschied wird aus der Geometrie heraus am deutlichsten illustriert, wo die drei Variablen den Platz von drei Koordinaten einnehmen; genauso viele müssen aber in der Rechnung verwendet werden, nicht nur wann immer die Frage von Oberflächen handelt, sondern auch wann immer gekrümmte Linien, die nicht in derselben Ebene gelegen sind, zu erforschen sind. Und in diesem letztem Fall erfordert freilich die Bestimmung der gekrümmten Linie zwei Gleichungen zwischen drei Koordinaten, sodass zwei als Funktionen der dritten betrachtet werden können. Die Natur einer Oberfläche wird aber mit nur einer einzigen Gleichung zwischen drei Koordinaten bestimmt, sodass irgendeine als Funktion der zwei übrigen betrachtet werden kann, woher der riesige Unterschied in der Betrachtung selbst entsteht. Das gegenwärtige Kapitel wird also zum Finden gekrümmter Linien solcher Art dienen, die, nicht in derselben Ebene gelegen, sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen.

PROBLEM 13

§129 Wenn V irgendeine Funktion der drei Variablen x, y, z war, die darüber hinaus deren Differentiale irgendeiner Ordnung verwickelt, und die Variablen irgendwelche Variationen erhalten, ist die Variation der Integralformel $\int V dx$ zu finden.

LÖSUNG

Was für Differentiale auch immer in die Funktion V eingehen, sie werden mit diesen Substitutionen

$$\begin{aligned} dy &= p dx, & dp &= q dx, & dq &= r dx, & dr &= s dx & \text{etc.}, \\ dz &= p dx, & dp &= q dx, & dq &= r dx, & dr &= s dx & \text{etc.} \end{aligned}$$

beseitigt werden und die Größe V wird eine Funktion der endlichen Größen x, y, z, p, q, r, s etc., p, q, r, s etc. sein. Ihr Differential wird also eine Form dieser Art haben

$$\begin{aligned} dV &= M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{etc.} \\ &+ \mathfrak{N} dz + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \mathfrak{S} ds + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woher man nach Verwandeln der Differentiationszeichen d in δ zugleich die Variation δV haben wird. Aus dem oben Bewiesenen wird man aber auch für diesen Fall dreier Variablen haben

$$\delta \int V dx = \int (V d\delta x + dx \delta V) = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

Und nach einer Substitution wird werden

$$\begin{aligned} \frac{dx \delta V - dV \delta x}{dx} &= M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.} \\ &\quad + \mathfrak{N} \delta z + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r + \text{etc.} \\ &\quad - M \delta x - N p \delta x - P q \delta x - Q r \delta x - R s \delta x - \text{etc.} \\ &\quad - \mathfrak{N} p \delta x - \mathfrak{P} q \delta x - \mathfrak{Q} r \delta x - \mathfrak{R} s \delta x - \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn wir daher nun der Kürze wegen festlegen

$$\delta y - p \delta x = w \quad \text{und} \quad \delta z - p \delta x = \mathfrak{w},$$

wird für konstant genommenes Element dx aus §125 und §126 sein

$$\begin{aligned} \delta p - q \delta x &= \frac{dw}{dx}, & \delta p - q dx &= \frac{d\mathfrak{w}}{dx}, \\ \delta q - r \delta x &= \frac{ddw}{dx^2}, & \delta q - r dx &= \frac{dd\mathfrak{w}}{dx^2}, \\ \delta r - s \delta x &= \frac{d^3w}{dx^3}, & \delta r - s dx &= \frac{d^3\mathfrak{w}}{dx^3} \end{aligned}$$

etc.,

woher die gesuchte Variation auf diese Weise angenehm ausgedrückt werden wird

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \left\{ \begin{array}{l} Nw + \frac{Pdw}{dx} + \frac{Qddw}{dx^2} + \frac{Rd^3w}{dx^3} + \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\mathfrak{w}}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\mathfrak{w}}{dx^3} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

die wie oben [§80-85] auf diese Form zurückgeführt wird

$$\delta \int V dx = \int w dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int w dx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.} \right) \\
& + V\delta x + w \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
& + \text{konst.} + w \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
& \quad + \frac{dw}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
& \quad + \frac{dw}{dx} \left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
& \quad + \frac{ddw}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& \quad + \frac{ddw}{dx^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& \quad + \frac{d^3w}{dx^3} (S - \text{etc.}) \\
& \quad + \frac{d^3w}{dx^3} (\mathfrak{S} - \text{etc.}) \\
& \quad + \text{etc.,}
\end{aligned}$$

deren Gestalt aus dem Obigen zu Genüge klar ist, und es ist dasselbe über die Addition der Konstante zu bemerken [§118].

KOROLLAR 1

§130 In dieser Lösung werden aber die beiden Variablen y und z als Funktionen von x betrachtet, ob sie schon bekannt sind oder erst aus der Gestalt der Variation zu bestimmen sind. Denn es hätte auch die Integralformel $\int V dx$ keinen Wert, wenn nicht so y wie z durch x bestimmt zu werden aufgefasst würden.

KOROLLAR 2

§131 Wenn die Formel $V dx$ per se integrierbar ist, wobei keine Relation zwischen den drei Variablen angenommen worden ist, kann die Variation des

Integrals $\int V dx$ auch keine Integralformeln involvieren und es ist notwendig, dass dann gilt

$$\begin{aligned} \text{sowohl} \quad N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} &= 0 \\ \text{als auch} \quad \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.} &= 0. \end{aligned}$$

KOROLLAR 3

§132 Wenn also auch umgekehrt diese zwei Gleichungen Geltung haben, wird dies ein sicheres Anzeichen sein, dass die Differentialformel $V dx$ per se eine Integration zulässt, wobei keine Relation zwischen den Variablen festgesetzt wurde.

BEISPIEL

§133 Damit wir dieses Kriterium noch mehr illustrieren, wollen wir eine per se integrierbare Formel solcher Art annehmen und es sei $\int V dx = \frac{z dy}{x dz} = \frac{pz}{xp}$, woher

$$V = -\frac{pz}{x^2 p} + \frac{p}{x} + \frac{zq}{xp} - \frac{zpq}{x^2 p}$$

wird.

Aus deren Differentiation berechnen wir

$$N = 0 \quad \text{und} \quad P = -\frac{z}{x^2 p} + \frac{1}{x} - \frac{zq}{x^2 p}, \quad Q = \frac{z}{xq},$$

weiter

$$\mathfrak{N} = -\frac{p}{x^2 p} + \frac{q}{xp} - \frac{pq}{x^2 p}, \quad \mathfrak{P} = \frac{pz}{x^2 p} - \frac{zq}{x^2 p} + \frac{2zpq}{x^3 p} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = -\frac{zp}{x^2 p}.$$

Nun muss für die erste Gleichung wegen $N = 0$ werden

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} = 0 \quad \text{oder} \quad P - \frac{dQ}{dx} = \text{Konst.},$$

deren Gültigkeit aus der Differentiation von Q sofort klar wird.

Für die andere Gleichung

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\Omega}{dx^2} = 0,$$

weil daher $\int \mathfrak{N}dx = \mathfrak{P} - \frac{d\Omega}{dx}$ ist, ist zuerst notwendig, dass diese Formel integrierbar ist

$$\mathfrak{N}dx = -\frac{pdx}{xyp} + \frac{qdx}{xp} - \frac{pqdx}{xpp},$$

woher wegen $qdx = dp$ natürlich $\int \mathfrak{N}dx = \frac{p}{xp}$ wird. Es ist also übrig, dass gilt

$$\frac{d\Omega}{dx} = \mathfrak{P} - \int \mathfrak{N}dx = \frac{pz}{xxpp} - \frac{zq}{xpp} + \frac{2zpq}{xp^3} - \frac{p}{xp}.$$

Aber durch Differenzieren von $\Omega = -\frac{zp}{xpp}$ resultiert eine vollkommene Gleichheit der beiden Seiten.

BEMERKUNG 1

§134 Wenn daher also die Frage darauf zurückgeht, dass der Integralformel $\int Vdx$ ein maximaler oder minimaler Wert zu geben ist, dann müssen vor allem in ihrer Variation die beiden Integralanteile - und das getrennt voneinander - gleich Null werden, deshalb weil, wie auch immer die Variationen festgelegt werden, die Variation $\delta \int Vdx$ immer verschwinden muss; daher geben diese zwei Gleichungen

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

und

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\Omega}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.} = 0,$$

mit welchen die zwei Relationen zwischen den drei Variablen x, y, z so ausgedrückt werden, dass darauf so y wie z rechtens als Funktion von x betrachtet werden können. Wann immer aber diese Gleichungen Differentiale sind und das von höherem Grade, gehen bei beiden Seiten genauso viele beliebige Konstanten in die Rechnung ein, von wie vieltem Grad jede der beiden Differentialgleichungen war. Diese Konstanten müssen aber darauf so bestimmt werden, dass der so für den Anfang wie für das Ende der

Integration der Formel $\int V dx$ vorgeschriebenen Regel Genüge geleistet wird, welche Aufgabe darauf zurückgeht, dass außerdem die absoluten Anteile der Variation zu Null gemacht werden. Zuerst muss natürlich die Konstante so bestimmt werden, dass den für den Anfang vorgeschriebenen Bedingungen genügt wird, wo freilich aus der Gestalt der Frage die Stücke

$$w, \quad \mathfrak{w}, \quad \frac{dw}{dx}, \quad \frac{d\mathfrak{w}}{dx}, \quad \frac{ddw}{dx^2}, \quad \frac{dd\mathfrak{w}}{dx^2}, \quad \text{etc.}$$

bestimmte Werte erhalten müssen. Dann aber, weil dasselbe bezüglich des Endes der Integration passiert, werden sie aus den einzelnen durch Integration eingegangenen Konstanten bestimmt werden.

BEMERKUNG 2

§135 Es wird besonders zuträglich sein, hier bemerkt zu haben, dass die Glieder, mit denen die Variation $\delta \int V dx$ ausgedrückt wird, von selbst in zwei Klassen aufgeteilt werden, in deren einer nur die Buchstaben entdeckt werden, die auf die Variabilität von y oder auf sein Verhalten in Hinblick auf x bezogen werden und das so, als wenn die Größe z konstant angenommen worden wäre, die andere Klasse hingegen die gleichen nur von der Variabilität von z abhängenden Buchstaben enthält, als wäre die Größe y konstant. Daher lässt sich folgern, wenn eine vierte Variable v hinzukommt, die auch wie eine Funktion von x betrachtet werden kann, dass dann zu jenen zwei Klassen darüber hinaus eine dritte hinzuzufügen ist, die die gleichen von der Variabilität allein von v abhängenden Glieder umfasst. Deshalb kann die hier gegebene Lösung angesehen werden, als wenn sie auf wie viele Variablen auch immer ausgedehnt wird, solange so viele unter den Gleichungen gegeben zu sein aufgefasst werden, dass alle für Funktionen einer einzigen gehalten werden können. Auch wenn also dieses Kapitel im Titel nur drei Variablen zeigt, ist sie dennoch sich auf irgendwie viele zu erstrecken zu verstehen, wenn nur Bedingungen solcher Art vorgelegt werden, dass schließlich durch eine alle übrigen bestimmt werden. Eine solche Bedingung involvieren aber Integralformeln dieser Form $\int V dx$ notwendigerweise; wie viele Variablen nämlich auch immer in die Größe V eingehen, der Ausdruck $\int V dx$ kann ganz und gar keinen bestimmten Wert erhalten, wenn nicht alle Variablen schließlich als Funktion der einen x angesehen werden können. Weit anders hingegen ist die Art derer Integralformeln beschaffen, die auf zwei oder mehrere voneinander keineswegs abhängende Variablen bezogen werden.

PROBLEM 14

§136 Wenn die Funktion V außer den drei Variablen x, y, z und deren Differentialen irgendeines Grades darüber hinaus die Integralformel $v = \int \mathfrak{B}dx$ involviert, wo \mathfrak{B} irgendeine Funktion der Variablen x, y, z mit ihren Differentialen sei, die Variation der Integralformel $\int Vdx$ zu finden.

LÖSUNG

Damit zumindest die Gattung der Differentiale aus der Rechnung beseitigt wird, wollen wir wie zuvor festlegen

$$\begin{aligned} dy &= p dx, & dp &= q dx, & dq &= r dx, & dr &= s dx & \text{etc.}, \\ dz &= \mathfrak{p} dx, & d\mathfrak{p} &= \mathfrak{q} dx, & d\mathfrak{q} &= \mathfrak{r} dx, & d\mathfrak{r} &= \mathfrak{s} dx & \text{etc.}, \end{aligned}$$

und nach Differentieren der Funktion V geht hervor

$$\begin{aligned} dV &= Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} \\ &\quad + \mathfrak{N}dz + \mathfrak{P}d\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}d\mathfrak{q} + \mathfrak{R}d\mathfrak{r} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

dann aber sei wegen $dv = \mathfrak{B}dx$

$$\begin{aligned} d\mathfrak{B} &= M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr + \text{etc.} \\ &\quad + \mathfrak{N}'dz + \mathfrak{P}'d\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}'d\mathfrak{q} + \mathfrak{R}'d\mathfrak{r} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

wo ich wegen des Mangels an Buchstaben dieselben mit einem Akzent markiert gebrauche. Daher hat man aber zugleich die Variationen derselben Größen V und \mathfrak{B} . Weil nun die Variation $\delta \int Vdx$ gesucht wird, werden wir freilich zuerst wie zuvor haben

$$\delta \int Vdx = V\delta x + \int (dx\delta V - dV\delta x);$$

weil dort der Wert von V nicht vom vorhergehenden abweicht, außer dass hier zum Differential von dV der Anteil $Ldv = L\mathfrak{B}dx$ und zur Variation δV dieser Anteil $L\delta v = L\delta \int \mathfrak{B}dx$ hinzukommt, wird auch die gesuchte Variation $\delta \int Vdx$ mit der zuvor gefundenen Form ausgedrückt werden, wenn nur zu ihr dieses Glied hinzugefügt wird

$$\int L \left(dx\delta \int \mathfrak{B}dx - \mathfrak{B}dx\delta x \right) = \int Ldx \left(\delta \int \mathfrak{B}dx - \mathfrak{B}\delta x \right).$$

Weil aber die Integralformel $\int \mathfrak{B}dx$ dieselbe ist, die im vorhergehenden Problem behandelt worden ist, wenn, wie wir es dort gemacht haben, wir festsetzen

$$\delta y - p\delta x = w \quad \text{und} \quad \delta z - p\delta x = \mathfrak{w},$$

werden wir für konstant angenommenes Element dx haben

$$\delta \int \mathfrak{B}dx - \mathfrak{B}\delta x = \int dx \left\{ \begin{array}{l} N'w + \frac{P'dw}{dx} + \frac{Q'ddw}{dx^2} + \frac{R'd^3w}{dx^3} + \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}'\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}'d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}'dd\mathfrak{w}}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}'d^3\mathfrak{w}}{dx^3} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Wir wollen nun das Integral $\int Ldx = I$ setzen, wenn es natürlich so genommen wird, dass es für den Anfang der Integration verschwindet, dann aber für die obere Integrationsgrenze $I = A$ wird, wonach für die ganze Erstreckung der Integration sein wird

$$\int Ldx \left(\delta \int \mathfrak{B}dx - \mathfrak{B}\delta x \right) = \int (A - I)dx \left\{ \begin{array}{l} N'w + \frac{P'dw}{dx} + \frac{Q'ddw}{dx^2} + \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}'\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}'d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}'dd\mathfrak{w}}{dx^2} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Nun wollen wir daher die folgenden Abkürzungen einführen

$$\begin{array}{ll} N + (A - I)N' = N^0, & \mathfrak{N} + (A - I)\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}^0 \\ P + (A - I)P' = P^0, & \mathfrak{P} + (A - I)\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^0 \\ Q + (A - I)Q' = Q^0, & \mathfrak{Q} + (A - I)\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^0 \\ R + (A - I)R' = R^0, & \mathfrak{R} + (A - I)\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^0 \\ \text{etc.} & \text{etc.,} \end{array}$$

und es ist klar, dass die gesuchte Variation so ausgedrückt hervorgehen wird

$$\delta \int Vdx = V\delta x + \int dx \left\{ \begin{array}{l} N^0w + \frac{P^0dw}{dx} + \frac{Q^0ddw}{dx^2} + \frac{R^0d^3w}{dx^3} + \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}^0\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}^0d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}^0dd\mathfrak{w}}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}^0d^3\mathfrak{w}}{dx^3} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

welche auch wie zuvor in diese Form entwickelt wird

$$\delta \int Vdx = \int wdx \left(N^0 - \frac{dP^0}{dx} + \frac{ddQ^0}{dx^2} - \frac{d^3R^0}{dx^3} + \frac{d^4S^0}{dx^4} - \text{etc.} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int w dx \left(\mathfrak{N}^0 - \frac{d\mathfrak{P}^0}{dx} + \frac{dd\Omega^0}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}^0}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}^0}{dx^4} - \text{etc.} \right) \\
+ V\delta x & + w \left(P^0 - \frac{dQ^0}{dx} + \frac{ddR^0}{dx^2} - \frac{d^3S^0}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
+ \text{Konst.} & + \mathfrak{w} \left(\mathfrak{P}^0 - \frac{d\Omega^0}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}^0}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}^0}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{dw}{dx} \left(Q^0 - \frac{dR^0}{dx} + \frac{ddS^0}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
& + \frac{d\mathfrak{w}}{dx} \left(\Omega^0 - \frac{d\mathfrak{R}^0}{dx} + \frac{dd\mathfrak{S}^0}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
& + \frac{ddw}{dx^2} \left(R^0 - \frac{dS^0}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{dd\mathfrak{w}}{dx^2} \left(\mathfrak{R}^0 - \frac{d\mathfrak{S}^0}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{d^3w}{dx^3} \left(S^0 - \text{etc.} \right) \\
& + \frac{d^3\mathfrak{w}}{dx^3} \left(\mathfrak{S}^0 - \text{etc.} \right) \\
& + \text{etc.,}
\end{aligned}$$

wo freilich das den Buchstaben nachgestellte Nullzeichen keinen stören möge, weil es ja nicht den Exponenten bezeichnet, sondern nur, um diese Buchstaben von denselben ohne etwas zu unterscheiden, verwendet wird.

KOROLLAR 1

§137 Wenn also die Integralformel $\int V dx$ einen maximalen Wert haben muss, müssen die zwei ersten Glieder der gefundenen Variation sofort gleich Null gesetzt werden, woher zwei Differentialgleichungen resultieren, mit welchen die unbestimmte Relation jeder der beiden Variablen y und z zu x bestimmt wird.

KOROLLAR 2

§138 Auch wenn hier den Bedingungen, die unter Umständen für den Anfang und das Ende der Integration vorgelegt werden, noch keine Rechnung getragen wird, gehen sie dennoch schon verborgen in die Rechnung ein, weil die Buchstaben I und A die Integrationsgrenzen berücksichtigen. Dennoch werden sie wiederum in der Behandlung der Differentialgleichungen aus der Rechnung herausgeworfen, während nämlich die Integralformel $\int Ldx = I$ herausgestoßen wird, geht zugleich die konstante Größe A heraus.

KOROLLAR 3

§139 Nachdem aber diese zwei Differentialgleichungen erledigt worden sind und das sehr allgemein, dass genauso viele beliebige Konstanten in die Rechnung eingehen, wie Integrationen unternommen werden müssen, ist erst dann auf die Bedingungen jeder der beiden Integrationsgrenzen der Formel $\int Vdx$ zu achten, weil ja daher aus den übrigen absoluten Gliedern der Variation jene Konstanten bestimmt werden müssen.

BEMERKUNG

§140 Die Lösung dieses Problems ist also so beschaffen, dass schon zu Genüge klar ist, wie auch höher zusammengesetzte Formeln, wie wenn beispielsweise die Funktion V mehrere Integralformeln involviert oder wenn auch die Funktion \mathfrak{B} neue Integralformeln umfasst, erledigt werden müssen. Es ist sogar immer noch klar, wenn die Integralformeln dieser Art mehr als drei Variablen enthalten, wie dann die Variationen gefunden werden müssen, und daher wäre es nicht nur lästig, sondern auch überflüssig, wenn ich diesen zu arbeitsaufwendigen Gegenstand weiter verfolgen wollte. Ich schreite also zum anderen um vieles schwerer ergründbaren Teil dieser Lehre voran, wo auch, nachdem Relationen zwischen den Variablen festgelegt wurden, zwei oder mehrere in keinsten Weise voneinander abhängende in der Rechnung zurückgelassen werden.