Problem 1

Wenn Z irgendeine Funktion der Variablen x und y und deren Differentiale involvierenden Größen p, q, r, s etc. ist, sodass ihr Differential von dieser Art ist

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + etc.,$$

die Differentialvariation der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt zu finden.

Lösung

Es muss also $\delta \int Z\mathrm{d}x$ gesucht werden, und weil $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ ist, werden wir sofort wegen $\delta x = 0$ haben

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.}$$

Es ist aber für konstant genommenes Differential $\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\delta p &= \frac{\delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x},\\
\delta q &= \frac{\delta \mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2},\\
\delta r &= \frac{\delta \mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3},\\
\delta s &= \frac{\delta \mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

woher wir erhalten werden

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + Q\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + R\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} + S\frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}$$

Nun haben wir für die termweise zu unternehmende Integration der Formel $\int \delta Z\mathrm{d}x$ gesehen, dass ist

$$\begin{aligned}
\int N\delta y\mathrm{d}x &= \int \delta y\mathrm{d}x \cdot N,\\
\int P\mathrm{d}\delta y &= P\delta y - \int \delta y\mathrm{d}P,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int Q\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x} &= Q\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}Q + \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{dd}Q,\\
\int R\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^2} &= R\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}R + \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{dd}R - \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^3R,\\
\int S\frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^3} &= S\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{dd}S - \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}^3S - \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}^4S
\end{aligned}
$$

etc.

Aus diesen wird also die gesuchte Differentialvariation berechnet:

$$
\begin{aligned}
\delta\int Z\mathrm{d}x = \int \delta y\mathrm{d}x & \left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right)\\
+ \quad \delta y & \left(P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} & \left(Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} & \left(R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} & \left(S - \text{etc.}\right)\\
+ \text{etc.,} &
\end{aligned}
$$

wo der erste Integralanteil von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt werden muss, welcher also alle dazwischen liegenden Variationen umfasst; in den übrigen Anteilen lässt sich aber sofort $x = a$ setzen, und δy wird den Zuwachs des äußersten Wertes von y bezeichnen; aber $\mathrm{d}\delta y$, $\mathrm{dd}\delta y$ etc. werden darüber hinaus von den Zuwächsen der benachbarten Werte abhängen.

KOROLLAR 1

Wenn also die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ ein Maximum oder Minimum für die Grenze $x = a$ sein muss, ist es notwendig, dass ihr Variationsdifferential verschwindet, auf welche Weise auch immer die Variationen δy angenommen werden. Zuerst ist es also nötig, dass für alle Zwischenwerte von x gilt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0,$$

in welcher Gleichung die gesuchte Relation zwischen x und y enthalten ist.

KOROLLAR 2

Daher aber, wenn die Terme P, Q, R etc. vorhanden sind, wird wegen der zu untersuchenden Integrationen die Relation zwischen x und y nicht völlig bestimmt, weil in sie durch die einzelnen Integrationen beliebige konstante Größen eingehen. In diesen Fällen können also zur Frage des Maximums oder Minimums einige Bedingungen hinzugefügt werden, wie beispielsweise dass für gewisse Werte von x die andere Variable y gegebene Werte erhält.

KOROLLAR 3

Nachdem aber Bedingungen solcher Art weggelassen werden, kann eine neue Frage gestellt werden, wie jene durch Integration eingeführten Konstanten bestimmt werden müssen, sodass entweder das Maximum der Maxima oder das Minimum der Minima erhalten wird: Dafür ist es aber notwendig, dass für $x = a$ diesen Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\begin{aligned}
&P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3 S}{\mathrm{d}x^3} = 0, \\
&Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} = 0, \\
&R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 0, \\
&S = 0.
\end{aligned}$$

KOROLLAR 4

Des Weiteren ist es aber wegen derselben Gründe von Nöten, dass für die andere Grenze $x = 0$ diesen selben Gleichungen Genüge geleistet wird. Denn weil das Variationsdifferential für $x = 0$ gesetzt verschwinden muss, involviert der Integralanteil eine Konstante solcher Art, die diese Bedingung erfüllt; aber diese Konstante muss die absoluten Terme, wenn in ihnen $x = 0$ gesetzt wird, zu Null machen. Daher müssen jene Formeln

$$P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}, \quad Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}, \quad R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}$$

gleichermaßen im Fall $x = 0$ und im Fall $x = a$ verschwinden.

Problem 2

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch eine gewisse Integralgröße $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ wie auch immer verwickelt, dass gilt

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + etc.,$$

in der Formel Φ aber $\mathfrak{Z}$ irgendeine Funktion von x, y, p, q, r etc. ist, wobei gilt

$$\mathrm{d}\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \mathfrak{S}\mathrm{d}s + etc.,$$

und diese sich so verhalten, soll die Differentialvariation dieser Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt bestimmt werden.

Lösung

Weil $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ gilt, wollen wir vor allem δZ suchen, und zuerst ist freilich sofort klar, dass gilt

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

wo man wie zuvor haben wird

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^4} \quad \text{etc.},$$

aber wegen $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ wird auf die gleiche Weise sein

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

und daher

$$\delta\Phi = \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right).$$

Weil also $L\mathrm{d}x\delta\Phi$ das erste Glied der Formel $\delta Z\mathrm{d}x$ ist, wird sein

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = \int L\mathrm{d}x \int \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right)\mathrm{d}x.$$

Es werde nun $\int L\mathrm{d}x = V$ festgelegt, und man wird haben

$$\begin{aligned}\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = {} & V \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{etc.}\right) \\ & - \int V\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Es ist hier egal, nach welchem Gesetz das Integral $\int L\mathrm{d}x = V$ genommen wird; was für eine Konstante auch immer wir nämlich hinzufügen würden, sie würde in diesem Ausdruck wiederum beseitigt werden. Wir wollen also dieses Integral festlegen so genommen zu werden, dass es für $x = a$ gesetzt verschwindet, und weil die Differentialvariation an die Grenze $x = a$ angepasst werden muss, wird sein

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = -\int V\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right),$$

wenn zu welchem die übrigen Teile addiert werden, berechnen wir, dass sein wird:

$$\delta\int Z\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x(N - V\mathfrak{N})\delta y + (P - V\mathfrak{P})\delta p + (Q - V\mathfrak{Q})\delta q + \text{etc.},$$

wo, wenn wir die oben angegebenen Reduktionen verwenden, diese schon auf die Grenze beschränkte Differentialvariation hervorgehen wird

$$\begin{aligned}
&\int \delta y\mathrm{d}x\left((N - V\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - V\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&+ \ \delta y \ \left((P - V\mathfrak{P}) - \frac{\mathrm{d}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left((Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{\mathrm{d}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\left((R - V\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

die Konstruktion welches Ausdrucks per se klar ist.

Korollar 1

Diese Lösung entsteht also aus den vorhergehenden, wenn anstelle der einfachen Größen N, P, Q, R etc. diese zusammengesetzten eingesetzt werden

$$N - V\mathfrak{N}, \quad P - V\mathfrak{P}, \quad Q - V\mathfrak{Q}, \quad R - V\mathfrak{R} \quad \text{etc.},$$

wo $V = \int L\mathrm{d}x$ ist, nachdem dieses Integral so genommen wurde, dass es für $x = a$ gesetzt verschwindet.

KOROLLAR 2

Wenn also die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ für die Grenze $x = a$ zum Maximum oder Minimum gemacht werden muss, ist dafür zu sorgen, dass aus der Variation aller Zwischenwerte von x keine Differentialvariation entsteht, woher die Relation zwischen x und y so bestimmt wird, dass gilt

$$(N - V\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - V\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} = 0,$$

welche Relation also schon die vorhergehende Grenze $x = a$ involviert, sodass, wenn eine andere Grenze vorgeschrieben wird, auch eine andere unbestimmte Relation zwischen x und y resultieren wird, deshalb weil die Größe V diesen Wert $x = a$ in sich umfasst.

KOROLLAR 3

Auf diese Weise wird eine Relation solcher Art zwischen x und y gefunden, aus welcher die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ so einen maximalen oder minimalen Wert erhält, dass, während die äußersten Werte von y dieselben bleiben, auf welche Weise auch immer die Zwischenwerte verändert werden, der Wert der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ immer entweder kleiner als der Fall des Maximums oder größer als der Fall des Minimums hervorgehen wird, als wenn die richtige Relation verwendet werden würde.

KOROLLAR 4

Wenn aber auch die äußersten Werte für unsere Bestimmung zugelassen werden, lassen sich aus der gefundenen Differentialvariation auch diese bestimmen. Die gefundene Relation muss natürlich durch Integration so bestimmt werden, dass für $x = a$ gesetzt auch der absolute Teil verschwindet. Daher ist deshalb zu erwirken, dass für $x = a$ gesetzt gilt

$$\begin{aligned}
(P - V\mathfrak{P}) - \frac{\mathrm{d}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} = 0, \\
(Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{\mathrm{d}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(S - V\mathfrak{S})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} = 0,
\end{aligned}$$

$$(R - V\mathfrak{R}) - \frac{\mathrm{d}(S - V\mathfrak{S})}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} = 0$$

etc.

KOROLLAR 5

In diesem Fall wird freilich $V = 0$, aber dennoch lassen sich daher nur die Grenzen, die die Größe V selbst involviert, herauswerfen. Wo nämlich ihre Differentiale auftauchen, weil $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = L$ ist, muss für L der Wert geschrieben werden, welchen es für $x = a$ gesetzt annimmt, der unter Umständen in diesem Fall nicht verschwindet, welches selbe freilich über die folgenden Differentiale festzuhalten ist:

$$\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{dd}L}{\mathrm{d}x^2} \quad \text{etc.},$$

welche Werte zuerst im Allgemeinen zu nehmen sind, bevor in ihnen $x = a$ gesetzt wird.

KOROLLAR 6

Wenn aber die ersten Werte von y unserer Bestimmung überlassen werden, dann muss denselben Gleichungen durch Setzen von $x = 0$ Genüge geleistet werden, wo dasselbe zu bemerken ist, was wir gerade bemerkt haben. Diese Gleichungen müssen natürlich zuvor vollkommen entwickelt werden, bis in ihnen $x = 0$ gesetzt wird. Mit diesen Bedingungen werden aber nur die in die unbestimmte Relation zwischen x und y eingehenden konstanten Größen bestimmt.

PROBLEM 3

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch diese zwei Integralformeln $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ *und* $\Phi' = \int \mathfrak{Z}'\mathrm{d}x$ *wie auch immer involviert, dass gilt*

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + L'\mathrm{d}\Phi' + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \textit{etc.},$$

in diesen Formeln Φ und Φ' aber die Funktionen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ nur durch die Größen x, y, p, q, r etc. bestimmt werden, sodass ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{Z} &= \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc., \\ \mathrm{d}\mathfrak{Z}' &= \mathfrak{M}'\mathrm{d}x + \mathfrak{N}'\mathrm{d}y + \mathfrak{P}'\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}'\mathrm{d}q + \mathfrak{R}'\mathrm{d}r + etc., \end{aligned}$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$, sofern sie von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.

LÖSUNG

Es muss also die Differentialvariation der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ bestimmt werden, weil welche $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ ist, haben wird zuerst:

$$\delta Z = L\delta\Phi + L'\delta\Phi' + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

darauf ist aber

$$\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \delta\Phi' = \int \delta\mathfrak{Z}'\mathrm{d}x$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{Z} &= \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}, \\ \delta\mathfrak{Z}' &= \mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r + \text{etc.}, \end{aligned}$$

aus welchen wir berechnen

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int \mathrm{d}x(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}), \\ \delta\Phi' &= \int \mathrm{d}x(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r + \text{etc.}). \end{aligned}$$

Weil also die gesuchte Differentialvariation ist

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi + \int L'\mathrm{d}x\delta\Phi' + \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \text{etc.},$$

wollen wir $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int L'\mathrm{d}x = V'$ festsetzen, und es wird wie oben sein

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = V \int \mathrm{d}x\ (\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

$$-\int V\mathrm{d}x \ \ (\mathfrak{N}\delta y \ +\mathfrak{P}\delta p \ +\mathfrak{Q}\delta q \ +\mathfrak{R}\delta r \ +\text{etc.}),$$

$$\begin{aligned}\int L'\mathrm{d}x\delta\Phi' &= V'\int \mathrm{d}x(\mathfrak{N}'\delta y+\mathfrak{P}'\delta p+\mathfrak{Q}'\delta q+\mathfrak{R}'\delta r+\text{etc.})\\ &\quad -\int V'\mathrm{d}x \ (\mathfrak{N}'\delta y+\mathfrak{P}'\delta p+\mathfrak{Q}'\delta q+\mathfrak{R}'\delta r-\text{etc.}).\end{aligned}$$

Wir wollen aber diese Integrale $V = \int L\mathrm{d}x$ und $V' = \int L'\mathrm{d}x$ festlegen so genommen zu werden, dass sie für $x = a$ gesetzt verschwinden, und die ersten Teile der vorausgehenden Formeln werden von selbst verschwinden, wenn freilich deren Werte für die Grenze $x = a$ genommen werden. Indem also alle Teile zusammengefasst werden, werden wir erhalten

$$\begin{aligned}\delta\int Z\mathrm{d}x = \int &\mathrm{d}x\delta y(N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}'),\\ +\int &\mathrm{d}x\delta p\,(P \ - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}'),\\ +\int &\mathrm{d}x\delta q\,(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')\\ +\int &\mathrm{d}x\delta r\,(R \ - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')\end{aligned}$$

$$\text{etc.}$$

Weil aber gilt

$$\begin{aligned}\int P\mathrm{d}x\delta p &= P\delta y - \int \delta y\mathrm{d}P,\\ \int Q\mathrm{d}x\delta q &= Q\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}Q + \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{dd}Q,\\ \int R\mathrm{d}x\delta r \ &= R\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}R + \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{dd}R - \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^3R\end{aligned}$$

$$\text{etc.,}$$

werden wir die gesuchte Differentialvariation finden

$$\begin{aligned}&\delta\int Z\mathrm{d}x\\ &= \int \mathrm{d}x\delta y\left((N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') - \frac{\mathrm{d}(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\ &+ \delta y\left((P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}') - \frac{\mathrm{d}(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left((Q-V\mathfrak{Q}-V'\mathfrak{Q}')-\frac{\mathrm{d}(R-V\mathfrak{R}-V'\mathfrak{R}')}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\left((R-V\mathfrak{R}-V'\mathfrak{R}')-\text{etc.}\right)$$
$$+\text{etc.}$$

KOROLLAR 1

Wir wollen der Kürze wegen festlegen:

$$N-V\mathfrak{N}-V'\mathfrak{N}'=(N),\ P-V\mathfrak{P}-V'\mathfrak{P}'=(P),\ Q-V\mathfrak{Q}-V'\mathfrak{Q}'=(Q)\ \text{etc.},$$

und die unbestimmte Relation zwischen x und y wird mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$(N)-\frac{\mathrm{d}(P)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}(Q)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3(R)}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}=0,$$

die dennoch nur die vorgeschriebene Grenze $x=a$ involviert, weil die Integralformeln $V=\int L\mathrm{d}x$ und $V'=\int L'\mathrm{d}x$ so genommen wurden, dass sie für $x=a$ gesetzt verschwinden.

KOROLLAR 2

Weil aber die Integration dieser Gleichung, wenn sie eine differentiale war, beliebige Konstanten involviert, wenn auch diese unserer Bestimmung überlassen werden, dass die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ den größten oder kleinsten Wert aller erhält, ist es gefällig, dass sie so bestimmt werden, dass so für $x=0$ wie $x=a$ gesetzt auch diesen Gleichungen Genüge geleistet wird

$$(P=-\frac{\mathrm{d}(Q)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}(R)}{\mathrm{d}x^2}-\text{etc.}=0,\quad (Q)-\frac{\mathrm{d}(R)}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}=0,\quad (R)-\text{etc.}=0.$$

KOROLLAR 3

Wenn die Funktion Z nicht nur zwei Integralformeln dieser Art $\Phi=\int\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$, $\Phi'=\int\mathfrak{Z}'\mathrm{d}x$ involviert, sondern auch noch $\Phi''=\int\mathfrak{Z}''\mathrm{d}x$, $\Phi'''=\int\mathfrak{Z}'''\mathrm{d}x$ etc.

involviert, so werden dennoch, dass die Buchstaben $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ etc. nur Funktionen der Größen x, y, p, q, r etc. bezeichnen und weiter keine Integralformeln involvieren, aus der Lösung des Problems auch derartig Differentialvariationen der Formeln dieser Art leicht angegeben.

PROBLEM 4

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ *irgendwie verwickelt, sodass gilt*

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + etc.,$$

die Funktion $\mathfrak{Z}$ *aber außer x, y, p, q, r etc. erneut eine andere Integralformel* $\Phi = \int \mathfrak{z}\mathrm{d}x$ *involviert, sodass gilt*

$$\mathrm{d}\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\mathrm{d}\Phi + \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc.,$$

die Funktion $\mathfrak{z}$ *hingegen nur aus den Größen x, y, p, q, r etc. zusammengesetzt ist, wobei gilt*

$$\mathrm{d}\mathfrak{z} = \mathfrak{m}\mathrm{d}x + \mathfrak{n}\mathrm{d}y + \mathfrak{p}\mathrm{d}p + \mathfrak{q}\mathrm{d}q + \mathfrak{r}\mathrm{d}r + etc.,$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$*, sofern sie von der Grenze* $x = 0$ *bis hin zur Grenze* $x = a$ *erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.*

LÖSUNG

Für dieses Ziel muss also die Differentialvariation der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ herausgefunden werden; weil diese $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ ist, haben wird zuerst:

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

und daher wird die Differentialvariation sein

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi + \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \int Q\mathrm{d}x\delta q + \int R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.}$$

Nun werden wir aber wegen $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ und

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\Phi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

auf die gleiche Weise auch haben

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x\delta\Phi + \int \mathfrak{N}\mathrm{d}x\delta y + \int \mathfrak{P}\mathrm{d}x\delta p + \int \mathfrak{Q}\mathrm{d}x\delta q + \int \mathfrak{R}\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.}$$

Schließlich ist aber $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{z}\mathrm{d}x$, und daher wird wegen

$$\delta\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.}$$

sein

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{n}\mathrm{d}x\delta y + \int \mathfrak{p}\mathrm{d}x\delta p + \int \mathfrak{q}\mathrm{d}x\delta q + \int \mathfrak{r}\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.}$$

Es sei nun $\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x = v$, und es wir werden

$$\begin{aligned}\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x\delta\Phi = v\int \mathrm{d}x(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ - \int v\mathrm{d}x\ (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.}),\end{aligned}$$

woher wir erhalten

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= v\int \mathrm{d}x\,(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + r\delta r + \text{etc.})\\ &+ \int \mathrm{d}x\delta y\,(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + \int \mathrm{d}x\delta p\,(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + \int \mathrm{d}x\delta q\,(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Wir wollen also weiter $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int Lv\mathrm{d}x = T$ setzen, und es wird sein

$$\begin{aligned}\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = T\int \mathrm{d}x\,(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ - \int T\mathrm{d}x\,(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ +V\int \mathrm{d}x\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int \mathrm{d}x\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int \mathrm{d}x\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\\ - \int V\mathrm{d}x\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + \int V\mathrm{d}x\delta p(\mathfrak{P} - r\mathfrak{p}) + \int V\mathrm{d}x\mathrm{d}q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Durch Sammeln all dieser wird also die gewollte Differentialvariation hervorgehen

$$\begin{aligned}\delta\int Z\mathrm{d}x &= T\int \mathrm{d}x(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ &+ V\int \mathrm{d}x\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int \mathrm{d}x\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int \mathrm{d}x\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

$$+ V \int \mathrm{d}x\delta y(N - V\mathfrak{N} + Vv\mathfrak{n} - T\mathfrak{n})$$
$$+ \int \mathrm{d}x\delta p(P - V\mathfrak{P} + Vv\mathfrak{p} - T\mathfrak{p})$$
$$+ \int \mathrm{d}x\delta q(Q - V\mathfrak{Q} + Vv\mathfrak{q} - T\mathfrak{q})$$
$$\text{etc.},$$

weil welche bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt werden muss, wollen wir die Integrale $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int L\mathrm{d}x \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x = T$, weil ja die Bestimmung der Integration unserem Belieben überlassen wird, festlegen so genommen zu werden, dass unser Ausdruck vereinfacht wird. Des Weiteren wollen wir aber der Kürze wegen festlegen

$$\begin{aligned}
N - V\mathfrak{N} - (Vv - T)\mathfrak{n} &= (N),\\
P - V\mathfrak{P} - (Vv - T)\mathfrak{p} &= (P),\\
Q - V\mathfrak{Q} - (Vv - T)\mathfrak{q} &= (Q),\\
R - V\mathfrak{R} - (Vv - T)\mathfrak{r} &= (R)\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

während, wie wir angenommen haben, $v = \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x$ ist, und die gesuchte Differentialvariation wird auf diese Form zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x\delta y &\left((N) - \frac{\mathrm{d}(P)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R)}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+ \quad \delta y &\left((P) - \frac{\mathrm{d}(Q)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R)}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} &\left((Q) - \frac{\mathrm{d}(R)}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} &\left((R) - \text{etc.}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Korollar 1

Weil $v = \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x$ ist, wird sein

$$Vv = \int L\mathrm{d}x \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x \text{ und } Vv - T = \int L\mathrm{d}x \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x - \int L\mathrm{d}x \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x = \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x \int L\mathrm{d}x.$$

Weil aber durch die angenommenen Bestimmungen der Ausdruck $Vv - T$ für $x = a$ gesetzt verschwindet, wenn wir $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int \mathfrak{L}V\mathrm{d}x = \mathfrak{V}$ setzen, müssen diese beiden Integrale so genommen werden, dass sie für $x = a$ gesetzt verschwinden.

KOROLLAR 2

Nachdem also diese Formeln $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int \mathfrak{L}V\mathrm{d}x = \mathfrak{V}$ in die Rechnung eingeführt worden sind, wird festzulegen sein

$$\begin{aligned} N - V\mathfrak{N} + \mathfrak{V}\mathfrak{n} &= (N), \\ P - V\mathfrak{P} + \mathfrak{V}\mathfrak{p} &= (P), \\ Q - V\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} &= (Q), \\ R - V\mathfrak{R} + \mathfrak{V}\mathfrak{r} &= (R) \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

und die Differentialvariation wird durch die Buchstaben (N), (P), (Q) etc. genauso ausgedrückt werden, wie sie oben im ersten Fall durch die Buchstaben N, P, Q etc. bestimmt worden war.

KOROLLAR 3

Aus diesen lässt sich schon leicht berechnen, wenn auch die Funktion $\mathfrak{z}$ eine neue Integralformel involviert, wie dann die Differentialvariation ausgedrückt wird; wenn natürlich galt

$$\mathrm{d}\mathfrak{z} = \mathfrak{l}\mathrm{d}\Phi' + \mathfrak{m}\mathrm{d}x + \text{etc.},$$

dann käme zu den Formeln $v = \int L\mathrm{d}x$ und $\mathfrak{V} = \int \mathfrak{L}V\mathrm{d}x$ darüber hinaus die dritte $\mathfrak{v} = \int \mathfrak{l}\mathfrak{V}\mathrm{d}x$ hinzu; das Übrige wird sich dem Achtsamen leicht ergeben.

PROBLEM 5

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ *irgendwie verwickelt, sodass gilt*

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + etc.,$$

die Funktion $\mathfrak{Z}$ aber außer den Größen x, y, p, q, r etc. erneut dieselbe Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ involviert, sodass gilt

$$\mathrm{d}\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\mathrm{d}\Phi + \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \textit{etc.},$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$, sofern sie von der Grenze $x = 0$ bis hin zur gegebenen Grenze $x = a$ erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.

LÖSUNG

Die Differentialvariation ist wie bisher

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \int Q\mathrm{d}x\delta q + \int R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.},$$

darauf haben wir aber $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ und

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\Phi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

Weil aber $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ ist, wird sein

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta\mathfrak{Z} = \frac{\delta\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta\Phi}{\mathrm{d}x}.$$

Wir wollen durchgehend festlegen

$$\delta\Phi = u \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.} = w,$$

sodass man diese Gleichung hat

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathfrak{L}u + w,$$

deren Integral nach Nehmen von e für die Zahl, deren Logarithmus gleich 1 ist, gilt

$$\mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} u = \int \mathrm{e}^{-\mathfrak{L}\mathrm{d}x} w\mathrm{d}x,$$

und daher

$$\delta\Phi = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right),$$

woher abgeleitet wird

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = \int \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x \int \mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right).$$

Es werde nun $\int \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x = V$ gesetzt, welches Integral so genommen werde, dass es für $x = a$ gesetzt verschwinde, und es sei $\mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}V = U$, es wird gelten

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = -\int U\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right);$$

wenn welchem Teil die übrigen Teile hinzuaddiert werden und die oberen Reduktionen gemacht werden, wird die gesuchte Differentialvariation $\delta \int Z\mathrm{d}x$ hervorgehen als

$$\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}x\delta y\left((N - U\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - U\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - U\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - \mathfrak{U}\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&\quad + \;\delta y\;\left((P - U\mathfrak{P}) - \frac{\mathrm{d}(Q - U\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R - U\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left((Q - U\mathfrak{Q}) - \frac{\mathrm{d}(R - U\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\left((R - U\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

aus welcher wie oben die Relation zwischen x und y gefunden wird, mit welcher der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ für die Grenze $x = a$ der größte oder kleinste Wert zugeteilt wird; diese Relation wird nämlich mit dieser Gleichung ausgedrückt werden:

$$(N - U\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - U\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - U\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - U\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} = 0.$$

Dann werden aber für die Bestimmung der durch Integration eingebrachten Konstanten die absoluten Teile so für den Fall $x = a$ wie für den Fall $x = 0$ zu Null gemacht werden können.

Korollar

Weil wir $\mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}V = U$ gesetzt haben, wird $V = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}U$ sein, woher durch Differentieren werden wird

$$\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}(\mathrm{d}U + U\mathfrak{L}\mathrm{d}x).$$

Weil aber $\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x$ ist, wird man diese Differentialgleichung haben

$$\mathrm{d}U + U\mathfrak{L}\mathrm{d}x = L\mathrm{d}x,$$

aus welcher die Größe U so bestimmt werden muss, dass sie für $x = a$ gesetzt verschwindet.

PROBLEM 6

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel $\Phi = \int Z\mathrm{d}x$ involviert, sodass gilt

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \textit{etc.},$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Formel $\int Z\mathrm{d}x$ den maximalen oder minimalen Wert annimmt, sofern sie freilich von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird.

LÖSUNG

Weil die Differentialvariation diese ist

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi + \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \int Q\mathrm{d}x\delta q + \int R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.},$$

wird man auch $\delta\Phi = \delta \int Z\mathrm{d}x$ haben, woher durch Differentieren wird

$$\mathrm{d}\delta\Phi = L\mathrm{d}x\delta\Phi + N\mathrm{d}x\delta y + P\mathrm{d}x\delta p + Q\mathrm{d}x\delta q + R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.},$$

und daher wird wie zuvor gefunden

$$\delta\Phi = \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int L\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \left(N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right),$$

woher wir wegen $\int \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x}$ erhalten

$$\begin{aligned}\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = {} & \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int L\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \left(N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right) \\ & - \int \mathrm{d}x \left(N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right),\end{aligned}$$

welches übrigen Glied von den übrigen Teilen weggeschafft wird. Daher, wenn wir $e^{-\int L dx} = T$ festlegen, wird die ganze Differentialvariation sein

$$\begin{aligned}\delta \int Z dx = \frac{1}{T} \int dx \delta y & \left(TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3.TR}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ + \quad \delta y & \left(TP - \frac{d.TQ}{dx} + \frac{dd.TR}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{d\delta y}{dx} & \left(TQ - \frac{d.TR}{dx} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{dd\delta y}{dx^2} & \left(TR - \text{etc.} \right) \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

Damit also die Formel $\int Z dx$ maximal oder minimal wird, wird die unbestimmte Relation zwischen x und y mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3.TR}{dx^3} + \text{etc.} = 0;$$

die absoluten Anteile werden also zur Bestimmung der durch Integration eingegangenen Konstanten dienen.

Bemerkung

Während diese Analysis also keine geometrische Betrachtungen involviert, haben wir nicht nur dieselben Lösungen aller sich auf die Methode der Maxima und Minima beziehenden Probleme erhalten, welche ich in meinem Buch über Maxima und Minima angegeben habe, sondern auch hat diese Methode eine spezielle Bestimmung der Konstanten geliefert, die bei der ersten Methode unbestimmt blieben; daher können unzählige einzelne Probleme bequem aufgelöst werden, auf welche die erste Methode weniger passend angewendet wird. Wie wenn beispielsweise unter allen von einem gegebenen Punkt aus nicht zu einem anderen Punkt, sondern zu einer gewissen anderen entweder geraden oder gekrümmten Linie zu ziehenden Linien die verlangt wird, über welcher ein von jenem Punkt aus herabsinkender Körper in der kürzesten Zeit zu dieser Linie gelangt, wird durch Betrachtung jener absoluten Teile dieses Problem leicht gelöst, während ihnen diese Bedingung vorgeschrieben wird, dass die gesuchte Kurve zur gegebenen normal ist. Bevor ich aber zum Ende komme, möchte ich den Analytikern ein außergewöhnliches Theorem zur Untersuchung vorlegen, dessen Gültigkeit aus den bisher aufgestellten Prinzipien nicht schwer erkannt wird und was im Integralkalkül einen außerordentlichen Nutzen zu leisten scheint.

Theorem

Nach Vorlegen der Differentialformel $Z\mathrm{d}x$, in welcher Z irgendeine Funktion der Größen x, y, $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, $r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$ etc. sei, und nach ihrer Differentiation hervorgehe:

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

sodass diese Differentialformel $Z\mathrm{d}x$ nicht nur erste, sondern auch höhere Differentiale jeder Ordnung involviert, dann wird leicht beurteilt werden können, ob diese Formel eine Integration zulässt oder ob das Differential vollständig ist oder nicht. Es werde nämlich dieser Ausdruck für konstant genommenes $\mathrm{d}x$ betrachtet

$$V = N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.};$$

wenn welcher gleich Null gefunden wird, wird die Formel $Z\mathrm{d}x$ integrierbar sein, wenn aber nicht $V = 0$ war, wird sie nicht integrierbar sein.