Ein Beispiel für einen einzigartigen Algorithmus *

Leonhard Euler

§1 Die Betrachtung von Kettebrüchen, deren überaus weitreichenden Gebrauch durch die ganze Analysis hindurch ich schon einige Male gezeigt habe, hat mich zu auf eine gewisse Weise aus den Indizes gebildeten Größen geführt, deren Natur so beschaffen ist, dass sie einen einzigartigen Algorithmus verlangt. Weil also die größten Dinge der Analysis zum größten Teil auf einen an gewisse Größen angepassten Algorithmus gestützt sind, lässt sich nicht zu Unrecht vermuten, dass auch dieser einzigartige Algorithmus einen nicht geringen Nutzen für die Analysis mit sich bringen wird, wenn er freilich sorgfältiger noch weiter ausgebaut wird, auch wenn ich glaube, dass ihm noch nicht so viel zuzuteilen ist, dass er mit den bereits gebräuchlichen Algorithmen verglichen zu werden verdient.

§2 Ich bin aber auf die folgende Weise zu den Größen, über welche ich hier zu handeln beschlossen habe, geführt worden. Wenn man diesen Kettenbruch hat

*Originaltitel: "Specimen algorithmi sigularis", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9* 1764, pp. 53-69", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 31 - 49 ", Eneström-Nummer E281, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

dessen Wert ausfindig zu machen sei, werden aus den als Indizes angenommenen Zahlen a, b, c, d auf die folgende Weise die Brüche gebildet:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+c+a}{bc+1}, & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}. \end{array}$$

Den ersten Platz erhält natürlich immer der Bruch $\frac{1}{0}$, den zweiten $\frac{a}{1}$, dessen Zähler der erste Index a, der Nenner hingegen die Einheit ist. Der Zähler wie der Nenner eines jeden folgenden Bruches wird gefunden, wenn der letzte der vorhergehenden mit dem darüber geschriebenen multipliziert wird und zum Produkt der vorletzte hinzuaddiert wird.

§3 Es ist aber bekannt, dass der letzte dieser Brüche dem vorgelegten Kettenbruch selbst gleich wird, die vorhergehenden aber so nahe an diesen Wert selbst herankommen, dass kein in nicht größeren Zahlen enthaltener Bruch dargeboten werden kann, der näher an jenen herankommt. Und aus dieser Quelle wird jenes einst von Wallis behandelte Problem leicht aufgelöst, in welchem nach Vorlegen irgendeines aus riesigen Zahlen bestehenden Bruches andere aus kleineren Zahlen bestehende Brüche gesucht werden, die so wenig vom vorgelegten abweichen, dass überhaupt keine weniger abweichenden dargeboten werden können, außer wenn wir größere Zahlen verwenden wollen.

§4 Nachdem aber dieser und andere Nutzen, welche Kettenbrüche an die Hand geben, ausgelassen worden sind, bemerke ich hier besonders, dass in jener Reihe der aus den Indizes gebildeten Brüche so die Zähler wie die Nenner demselben Fortschreitungsgesetz folgen und einzeln daraus gebildet werden können. Denn in jeder der beiden Reihen, ob die der Zähler oder die der Nenner, liefert jeder beliebige Term mit dem darüber geschriebenen Index multipliziert und um den vorausgehenden vermehrt den folgenden Term. Aber die letzte Zahl der oberen Reihe wird aus allen vier Indizes a, b, c, d zusammengesetzt, die vorletzte nur aus den dreien a, b, c, die vorvorletzte nur aus den zwei a und b. Aber die unteren Zahlen involvieren den ersten Index a überhaupt nicht, sondern werden aus den übrigen b, c, d nach dem gleichen Gesetz gebildet.

§5 Weil ja also die Bildungsweise aus den Indizes so für die Zähler wie für die Nenner dasselbe ist und nach Angabe der Indizes die daher gebildete Zahl bekannt wird, werde ich die Zahlen selbst, in wie fern sie aus den Indizes gebildet worden sind, betrachten und werde einen Algorithmus für sie angeben. Nachdem aber irgendwelche und wie viele Indizes a, b, c, d auch immer vorgelegt worden sind, werde ich die aus ihnen gebildete Zahl auf auf diese Weise (a, b, c, d) bezeichnen und es wird also nach Durchführen der Entwicklung sein

$$(a, b, c, d) = abcd + cd + ad + ab + 1$$

und auf die gleiche Weise für den Nenner durch Weglassen des ersten Index' a

$$(b, c, d) = bcd + d + b.$$

§6 Diese Definition der Zeichen (), zwischen welche ich die Indizes der Reihe nach von links nach rechts zu schreiben, festlege, werde also festgehalten; und auf diese Weise in Klammern eingeschlossene Indizes werden im Nachfolgenden die aus diesen Indizes gebildete Zahl bezeichnen. So werden wir, indem wir von den einfachsten Fällen aus beginnen, haben

$$
\begin{aligned}
(a) &= a, \\
(a,b) &= ab + 1, \\
(a,b,c) &= abc + c + a, \\
(a,b,c,d) &= abcd + cd + ad + ab + 1, \\
(a,b,c,d,e) &= abcde + cde + ade + abc + e + c + a
\end{aligned}
$$

aus welcher Progression es klar zu tage tritt, dass die Einheit den Platz dieses Zeichens $()$ einnimmt, wenn natürlich kein Index da ist.

§7 Wie diese Ausdrücke, während die Anzahl der Indizes wächst, weiter fortzusetzen sind, ist aus dem Bildungsgesetz, nach welchem jeder beliebige Term aus den zwei vorhergehenden zusammengesetzt wird, von selbst klar. Es ist natürlich

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= b(a) + 1 = b(a) + (), \\
(a,b,c) &= c(a,b) + (a), \\
(a,b,c,d) &= d(a,b,c) + (a,b), \\
(a,b,c,d,e) &= e(a,b,c,d) + (a,b,c).
\end{aligned}
$$

Im Allgemeinen wird man also haben

$$
(a,b,c \dots p,q,r) = r(a,b,c \dots p,q) + (a,b,c \dots p),
$$

welcher Zusammenhang als Korollar der Definition der Zahlen, welche wir hier betrachten wollen, angesehen werden muss.

§8 In der Entwicklung dieser Werte, wie sie zuvor in § 6 dargeboten worden sind, wird allerdings die Zusammensetzungsart schwer erkannt. Sie können aber auch auf diese Weise dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
(a) \quad &= a(1), \\
(a.b) \quad &= ab\left(1+\frac{1}{ab}\right), \\
(a,b,c) \quad &= abc\left(1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}\right), \\
(a,b,c,d) \quad &= abcd\left(1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{abcd}\right), \\
[a,b,c,d,e) &= abcde\left(1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{de}+\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abde}+\frac{1}{bcde}\right)
\end{aligned}
$$

etc.

In diesen Nennern tauchen aber zuerst die Produkte aus zwei benachbarten Indizes auf, dann aber die Produkte aus je zweien jener Faktoren, welche keinen gemeinsamen Index involvieren, dann werden die Produkte aus je dreien, je vieren etc., die keinen gemeinsamen Index verwickeln,folgen; daher wird die Zusammensetzungsart schon offenbar.

§9 Aus dieser Entwicklung ist es schon offenbar, wenn die Indizes in rückwärtiger Reihenfolge angeordnet werden, dass daher vollkommen dieselben gebildeten Zahlen hervorgehen. Es wird natürlich sein

$$
\begin{aligned}
(a,b) \quad &= (b,a), \\
(a,b,c) \quad &= (c,b,a), \\
(a,b,c,d) \quad &= (d,c,b,a), \\
(a,b,c,d,e) &= (e,d,c,b,a)
\end{aligned}
$$

etc.

Solange also die Reihenfolge der Indizes gegeben ist, ist es nebensächlich, ob sie direkt oder rückwärtig ist; denn auf jede der beiden Weisen wird daher dieselbe gebildete Zahl erhalten.

§10 Daher folgt also, indem die Formeln in § 7 auf diese Weise invertiert werden, dass sein wird

$$\begin{aligned}
(a,b) &= a(b)+1,\\
(a,b,c) &= a(b,c)+(c),\\
(a,b,c,d) &= a(b,c,d)+(c,d)\\
(a,b,c,d,e) &= a(b,c,d,e)+(c,d,e),
\end{aligned}$$

und im Allgemeinen wird für wie viele folgende Indizes auch immer sein

$$(a,b,c,d \text{ etc.}) = a(b,c,d \text{ etc.}) + (c,d \text{ etc.}).$$

§11 Wenn also festgelegt wird

$$\begin{aligned}
(a,b,c,d,e \text{ etc.}) &= A,\\
(b,c,d,e \text{ etc.}) &= B,\\
(c,d,e \text{ etc.}) &= C,\\
(d,e \text{ etc.}) &= D,\\
(e \text{ etc.}) &= E\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

werden wir diese Gleichheiten haben:

$$\begin{aligned}
A &= aB + C \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}, \\
B &= bC + D \quad \text{oder} \quad \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}, \\
C &= cD + E \quad \text{oder} \quad \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D} \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

§12 Weil also gilt

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}, \quad \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}, \quad \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}} \quad \text{etc.,}$$

wird durch Einsetzen dieser Werte sein

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{F}{E}}}}.$$

Daher, wenn e der letzte der Indizes ist, so dass $E = e$ und $F = 1$ ist, wird gelten

$$\frac{A}{B} = \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}$$

§13 Wenn also die Anzahl der Indizes unendlich war, wird auch der Kettenbruch ins Unendliche laufen uns sein Wert wird sein

$$= \frac{(a,b,c,d,e \quad \text{etc.})}{(b,c,d,e \quad \text{etc.})}.$$

Umgekehrt werden uns aber die Eigenschaften von Kettenbrüchen vorzügliche Beschaffenheiten von aus den Indizes gebildeten Zahlen dieser Art offenbaren, welche sorgfältiger zu entwickeln, der Mühe wert sein wird. Es sei also ein Kettenbruch, ob ins Unendliche laufend oder nicht, vorgelegt

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{etc.}}}}}}$$

dessen Wert mit dem Buchstaben V angezeigt werde, und durch Nehmen aller Indizes a, b, c, d, e, f etc. wird, wie wir bewiesen haben, sein

$$V = \frac{(a,b,c,d,e,f \quad \text{etc.})}{(b,c,d,e,f \quad \text{etc.})}.$$

§14 Wenn ein gewisser dieser Indizes unendlich groß wird, wird er in diesem Ausdruck im Folgenden weggelassen werden können, und der Wert des Kettenbruches wird nur durch Indizes, die dem unendlichen vorausgehen, ausgedrückt werden.

So, wenn $b = \infty$ war, wird wein

$$V = \frac{(a)}{1};$$

wenn $c = \infty$ ist, wird sein

$$V = \frac{(a,b)}{(b)};$$

wenn $d = \infty$ ist, wird sein

$$V = \frac{(a,b,c)}{(b,c)};$$

wenn $e = \infty$ ist, wird sein

$$V = \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}.$$

Wie also in diesen Fällen der Kettenbruch abbricht, so verwickelt auch der Wert V nur die Indizes, die dem unendlichen Index vorausgehen.

§15 Wenn aber kein Index ins Unendliche wächst, kommen diese Werte selbst immer näher an den wahren Wert V heran. Natürlich, wenn war

$$V = \frac{(a,b,c,d,e \text{ etc.})}{(b,c,d,e \text{ etc.})},$$

kommen die in der folgenden Reihe dargebotenen Brüche

$$\frac{(a)}{1}, \quad \frac{(a,b)}{b}, \quad \frac{(a,b,c)}{(b,c)}, \quad \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}, \quad \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} \quad \text{etc.}$$

immer näher an den wahren Wert V heran und erst deren letzter wird seinen wahren Wert darbieten, wenn freilich die Indizes a, b, c, d etc. größere Zahlen als die Einheit waren. Freilich wird der erste $\frac{a}{1}$ merklich von V abweichen können, der zweite wird aber näher herankommen, der dritte noch näher und so weiter, bis schließlich der letzte den wahren Wert V liefern wird.

§16 Es ist also notwendig, dass die Differenzen zwischen zwei benachbarten Brüchen von dieser Art ununterbrochen kleiner werden; damit dies besser erkannt wird, wollen wir diese Differenzen untersuchen, welche sein werden

$$\begin{aligned}
\frac{(a)}{1} - \frac{(a,b)}{(b)} &= \frac{(a)(b) - 1(a,b)}{1(b)}, \\
\frac{(a,b)}{(b)} - \frac{(a,b,c)}{(b,c)} &= \frac{(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c)}{(b)(b,c)}, \\
\frac{(a,b,c)}{(b,c)} - \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} &= \frac{(a,b,c)(b,c,d) - (b,c)(a,b,c,d)}{(b,c)(b,c,d)}, \\
\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} - \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} &= \frac{(a,b,c,d)(b,c,d,e) - (b,c,d)(a,b,c,d,e)}{(b,c,d)(b,c,d,e)}
\end{aligned}$$

etc.

§17 Über die Nenner, die aus zwei Faktoren gebildet sind, dieser Differenzen bemerke ich zuerst, dass die Faktoren einander prime Zahlen sind, was freilich aus dem Vorausgehenden hinreichend offenbar ist. Weil nämlich für den Nenner $(b,c,d)(b,c,d,e)$ gilt

$$(b,c,d,e) = e(b,c,d) + (b,c),$$

wird sein

$$\frac{(b,c,d,e)}{(b,c,d)} = e + \frac{(b,c)}{(b,c,d)},$$

woher die Faktoren (b,c,d) und (b,c,d,e) nur einen gemeinsamen Teiler haben werden, wenn dieser zugleich ein gemeinsamer Teiler der Zahlen (b,c) und (b,c,d) ist; aber wegen derselben Begründung ist nur ein gemeinsamer Teiler dieser Zahler gegeben, wenn dieser zugleich ein gemeinsamer Teiler dieser (b) und (b,c) und schließlich dieser 1 und b ist; weil diese keinen gemeinsamen Teiler haben, werden auch jene keinen haben und deshalb werden die Zahlen einander prim sein. Daher wird aber auch eingesehen, dass die Zahlen $(a,b,c,d$ etc,) und $(b,c,d$ etc.) zueinander prim sind.

§18 Also können jene Differenzen nicht kleiner sein, als wenn die Zähler in die Einheit, ob die positive oder die negative, übergehen, was die Beispiele aufzeigen, dass es wirklich passiert. Es wird also passend sein, dasselbe aus der Natur dieser durch die Indizes gebildeten Zahlen zu beweisen. Für den ersten Zähler wird freilich, weil

$$(a,b) = b(a) + 1$$

durch § 7 ist, wird sein

$$(a)(b) - 1(a,b) = ab - b(a) - 1 = -1.$$

Dann wird aber für den zweiten wegen

$$(b,c) = c(b) + 1 \quad \text{und} \quad (a,b,c) = c(a,b) + (a)$$

sein

$$(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c) = (a,b)c(b) + (a,b) - (b)c(a,b) - (b)(a),$$

welche wegen der sich aufhebenden Terme $(a,b)c(b) - (b)c(a,b)$ übergeht in

$$(a,b) - (b)(a) = +1,$$

so dass der zweite Zähler ist

$$(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c) = +1.$$

§19 So wie hier der zweite Zähler auf den ersten negativ genommen reduziert wird, kann der dritte gezeigt werden, dem zweiten negativ genommen gleich zu sein.

Denn weil gilt

$$(b,c,d) = d(b,c) + (b)$$

und

$$(a,b,c,d) = d(a,b,c) + (a,b),$$

wird sein

$$\begin{aligned}&(a,b,c)(b,c,d)-(b,c)(a,b,c,d)\\ &=(a,b,c)d(b,c)+(a,b,c)(b)-(b,c)d(a,b,d)-(b,c)(a,b).\end{aligned}$$

welcher der zweite Zähler negativ genommen ist. Auf dieselbe Weise wird aber der vierte Zähler dem dritten ngeativ genommen gleich werden und im Allgemeinen jeder beliebige folgende dem vorhergehenden negativ genommen.

§20 Daher erlangen wir also die folgenden äußerst bemerkenswerten Reduktionen

$$\begin{aligned}(a)(b)-1(a,b)&=-1,\\ (a,b)(b,c)-(b)(a,b,c)&=+1,\\ (a,b,c)(b,c,d)-(b,c)(a,b,c,d)&=-1,\\ (a,b,c,d)(b,c,d,e)-(b,c,d)(a,b,c,d,e)&=+1\end{aligned}$$

und im Allgemeinen

$$(a,b,c,d\ldots m)(b,c,d\ldots m,n)-(b,c,d\ldots m)(a,b,c,d\ldots m,n)=\pm 1,$$

wo $+1$ gilt, wenn die Anzahl der Indizes in den ersten Klammern gerade war, andernfalls hingegen -1.

§21 Die oben dargestellten Differenzen werden also sein

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a,b)}{(b)} = -\frac{1}{1(b)},$$

$$\frac{(a,b)}{(b)} - \frac{(a,b,c)}{(b,c)} = +\frac{1}{(b)(b,c)},$$

$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)} - \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = -\frac{1}{(b,c)(b,c,d)},$$

$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} - \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = +\frac{1}{(b,c,e)(b,c,d,e)},$$

$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} - \frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = -\frac{1}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f)}$$

$$\text{etc.},$$

woher, weil diese Differenzen nicht kleiner sein können, kommen die Brüche so nahe an einander heran, wie es geschehen kann.

§22 Weil aus § 7 ist

$$(b,c)-1 = c(b), \quad (b,c,d)-(b) = d(b,c), \quad (b,c,d,e)-(b,c) = e(b,c,d) \quad \text{etc.},$$

wird durch Addieren je zweier dieser Differenzen sein

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a,b,c)}{(b,c)} = -\frac{c}{1(b,c)},$$
$$\frac{(a,b)}{(b)} - \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = +\frac{d}{(b)(b,c,d)},$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)} - \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = -\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)},$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} - \frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = +\frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$
etc.,

und es wird hier sein

$$\frac{(a)}{1} = a \quad \text{und} \quad \frac{(a,b)}{(b)} = a + \frac{1}{b},$$

woher die übrigen Formeln gefällig dargeboten werden können werden.

§23 Aus den Formeln in § 21 werden wir also die folgenden Werte der Kettenbrüche haben

$$\frac{(a)}{1} = a,$$
$$\frac{(a,b)}{(b)} = a + \frac{1}{1(b)},$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)} = a + \frac{1}{1(b)} - \frac{1}{(b)(b,c)},$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = a + \frac{1}{1(b)} - \frac{1}{(b)(b,c)} + \frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$$
etc.,

woher im Allgemeinen gelten wird, wenn auch die Indizes bis ins Unendliche laufen,

$$\frac{(a,b,c,d,e \;\text{ etc.})}{(b,c,d,e \;\text{ etc.})} = a + \frac{1}{1(b)} - \frac{1}{(b)(b,c)} + \frac{1}{(b,c)(b,c,d)} - \frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)} + \text{etc.}$$

§24 Aus den Formeln in § 22 werden wir aber erhalten

$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)} = a + \frac{c}{1(b,c)},$$

$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = a + \frac{c}{1(b,c)} + \frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)},$$

woher allgemein wird

$$\frac{(a,b,c,d,e \;\text{ etc.}}{(b,c,d,e \;\text{ etc.}} = a + \frac{c}{1(b,c)} + \frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)} + \frac{g}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f,g)} + \text{etc.}$$

Dann aber auch

$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)},$$

$$\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)} - \frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

und daher allgemein

$$\frac{(a,b,c,d,e\ \text{ etc.})}{(b,c,d,e\ \text{ etc.})} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)} - \frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$
$$-\frac{h}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f,g,h)} - \text{etc.}$$

§25 Aber nachdem nun diese Dinge, die die Reihen betreffen abgehandelt worden sind, weil ich sie ja schon an anderer Stelle gründlicher erforscht habe, wollen wir eingehender die Dinge betrachten, die sich auf den einzigartigen Algorithmus dieser Größen beziehen. Und freilich wird § 22 uns denen ähnliche Formeln, die in § 20 gefunden worden sind, an die Hand geben, woher es klar zutage tritt, dass gilt

$$\begin{aligned}
(a)(b,c) - 1(a,b,c) &= -c,\\
(a,b)(b,c,d) - (b)(a,b,c,d) &= +d,\\
(a,b,c)(b,c,d,e) - (b.c)(a,b,c,d,e) &= -e,\\
(a,b,c,d)(b,c,d,e,f) - (b,c,d)(a,b,c,d,e,f) &= +f
\end{aligned}$$

und daher allgemein

$$(a,b\ldots l)(b\ldots l,m,n) - (b\ldots l)(a,b\ldots l,m,n) = \pm n,$$

wo das Zeichen $+$ gilt, wenn die Anzahl der Indizes in der ersten Klammer gerade ist, andernfalls das Zeichen $-$.

§26 Durch die gleichen Reduktionen wird aber eingesehen, dass sein wird

$$\begin{aligned}(a)(b,c,d) - 1(a,b,c,d) &= -(c,d),\\ (a,b)(b,c,d,e) - (b)(a,b,c,d,e) &= +(d,e),\\ (a,b,cd)(b,c,d,e,f) - (b,c)(a,b,c,d,e,f) &= -(e,f)\end{aligned}$$

und allgemein

$$(a,b\ldots k)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k)(a,b\ldots k,l,m,n) = \pm(m,n)$$

wo entweder das obere oder das untere der Vorzeichen gilt, je nachdem ob die Anzahl der Indizes in der ersten Klammer gerade oder ungerade war.

§27 Die Beschaffenheit dieser Formeln wird aber aus den oben aufgefundenen Dingen leicht deriviert. Wenn nämlich festgelegt wird

$$\begin{aligned}(a,b\ldots k,l,m)\,(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k,l,m)\,(a,b\ldots k,l,m,n) &= A,\\ (a,b\ldots\ldots k,l)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots\ldots k,l)(a,b\ldots k,l,m,n) &= B,\\ (a,b\ldots\ldots\ldots k)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots\ldots\ldots l)\,(a,b\ldots k,l,m,n) &= C,\end{aligned}$$

ist es offenbar, dass gilt

$$A = mB + C.$$

Aber es ist

$$A = \pm 1 \quad \text{und} \quad B = \mp n$$

und daher

$$C = \pm 1 \pm mn = \pm(m, n),$$

wo über die Zweideutigkeit der Vorzeichen die obigen Vorschriften festzuhalten sind.

§28 Wenn die Reihenfolge der Indizes in diesen Formeln invertiert wird, werden sie werden

$$\begin{aligned}
&(a \ldots && y)(a, b \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)(a, b \ldots y) &&= 0\\
&(a, b \ldots && y)(b, c \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)(b, c \ldots y) &&= \pm 1,\\
&(a, b, c \ldots && y)(c, d \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)(c, d \ldots y) &&= \pm(a),\\
&(a, b, c, d \ldots && y)(d, e \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)(d, e \ldots y) &&= \pm(a, b),\\
&(a, b, c, d, e \ldots && y)(e, f \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)(e, f \ldots y) &&= \pm(a, b, c),\\
&(a, b \ldots && y)(f, g \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)(f, g \ldots y) &&= \pm(a, b, c, d),
\end{aligned}$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn die Anzahl der Indizes in der zweiten Klammer gerade war, andernfalls aber die unteren gelten.

§29 Wenn diese Reihe der Indizes am Ende um zwei beschnitten wird, wird auf die gleiche Weise entspringen

$$\begin{aligned}
(a \ldots x)(a \ldots z) - (a \ldots z)(a \ldots x) &= 0,\\
(a \ldots x)(b \ldots z) - (a \ldots z)(b \ldots x) &= \pm(z),\\
(a \ldots x)(c \ldots z) - (a \ldots z)(c \ldots x) &= \pm(a)(z),\\
(a \ldots x)(d \ldots z) - (a \ldots z)(d \ldots x) &= \pm(a, b)(z),\\
(a \ldots x)(e \ldots z) - (a \ldots z)(e \ldots x) &= \pm(a, b, c)(z)
\end{aligned}$$

und daher wird schließlich erschlossen, dass allgemein gelten wird

$$(a \dots l, m, n \cdots p)(n \dots p, q, r \dots z) - (a \dots l, m, n \dots p, q, r \dots z)(n \dots p)$$
$$= \pm (a \dots l)(r \dots z).$$

§30 Damit die Beschaffenheit der Zweideutigkeit der Vorzeichen klar zu tage tritt, ist es anzumerken, wenn $m = a$ ist, dass $(a \dots k) = 1$ sein wird, und wenn $q = z$ ist, dass $(r \dots z) = 1$ sein wird, woher Spezialfälle, in denen die Beschaffenheit der Vorzeichen bekannt ist, sein werden

$$\begin{aligned}
(a)(b) - (a,b)1 &= -1,\\
(a)(b,c) - (a,b,c)1 &= -(c),\\
(a,b)(c) - (a,b,c)1 &= -(a),\\
(a,b)(b,c,d) - (a,b,c,d)(b) &= +(d),\\
(a)(b,c,d) - (a,b,cd)1 &= -(c,d),
\end{aligned}$$

woher geschlossen wird, dass der Wert positiv sein wird, wenn die Anzahl der Indizes in der äußersten der Klammern ungerade war; wenn sie aber gerade war, wird der Wert negativ sein. So wird beispielsweise gelten

$$(a,b,c,d)(e,f,g,h) - (a,b,c,d,e,f,g,h)1 = -(a,b,c)(f,g,h),$$
$$(a,b,c,d,e)(c,d,e,f,g,h) - (a,b,c,d,e,f,g,h)(c,d,e) = +(a)(g,h).$$

§31 Aber es können so viele Formeln von dieser Art wie es beliebt leicht auf die folgende Weise dargeboten werden; es werde die dritte Klammer genommen, welche vollständig ist und alle Indizes enthält, vom Anfang aus werden oben die Indizes abgetrennt, die die erste Klammer festlegen, dann unten vom Ende aus die, die die zweite Klammer festlegen, so dennoch, dass in den zwei ersten Klammern alle Indizes auftreten. Dann werden die, die den abgetrennten Stellen auf beiden benachbart sind, entsprechend notiert und daher werden leicht Formeln dieser Art dargeboten: Wie

$$\overbrace{a,b,c,d}\!\!\!\!\!\underbrace{,e,f}$$

geben wird

$$(a,b,c,d)(c,d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(c,d)=-(a)(f),$$

wie

$$\overbrace{a,b,c},\underbrace{d,e,f}$$

gibt

$$(a,b,c)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)1=-(a,b)(e,f),$$

wie

$$\overbrace{a,b,c,d}\!\!\!\!\!\underbrace{,e,f}$$

gibt

$$(a,b,c,d)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(d)=+(a,b)(f).$$

§32 Wenn daher also in zwei Klammern kein Buchstabe zweimal auftaucht, wird die vierte Klammer die Einheit sein, woher die folgenden Formeln entsprießen:

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &= (a,b)(c) &&+ (a),\\
(a,b,c) &= (a)(b,c) &&+ (c);\\[1ex]
(a,b,c,d) &= (a,b,c)(d) &&+ (a,b),\\
(a,b,c,d) &= (a,b)(c,d) &&+ (a)(d),\\
(a,b,c,d) &= (a)(b,c,d) &&+ (c,d),\\[1ex]
(a,b,c,d,e) &= (a,b,c,d)(e) &&+ (a,b,c),\\
(a,b,c,d,e) &= (a,b,c)(d,e) &&+ (a,b)(e),\\
(a,b,c,d,e) &= (a,b)(c,d,e) &&+ (a)(d,e),\\
(a,b,c,d,e) &= (a)(b,c,d,e) &&+ (c,d,e),\\[1ex]
(a,b,c,d,e,f) &= (a,b,c,d,e)(f) &&+ (a,b,c,d),\\
(a,b,c,d,e,f) &= (a,b,c,d)(e,f) &&+ (a,b,c)(f),\\
(a,b,c,d,e,f) &= (a,b,c)(d,e,f) &&+ (a,b)(e,f),\\
(a,b,c,d,e,f) &= (a,b)(c,d,e,f) &&+ (a)(d,e,f),\\
(a,b,c,d,e,f) &= (a)(b,c,d,e,f) &&+ (c,d,e,f)
\end{aligned}$$

etc.

§33 Wenn die Reihenfolge der Indizes invertiert wird, werden daher leicht die folgenden Formeln gefunden werden

$$\begin{aligned}
(\alpha)(a,b,c,d\ldots) &= (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots),\\
(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) &= (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha)(b,c,d\ldots),\\
(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) &= (\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,\beta)(b,c,d\ldots)
\end{aligned}$$

woher die Produkte aus zwei Zahlen dieses Geschlechts auf einfache Zahlen solcher Art zurückgeführt werden können werden:

$$\begin{aligned}
(\alpha)(a,b,c,d\ldots) &= (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots),\\
(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) &= (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,b,c,d\ldots) + (c,d\ldots),\\
(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) &= (\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,\beta,b,c,d\ldots)\\
&\quad + (\alpha,c,d\ldots) - (d\ldots),\\
(\alpha,\beta,\delta,\delta)(a,b,c,d,e\ldots) &= (\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b,c,d,e\ldots)\\
&\quad - (\alpha,\beta,\gamma,b,c,d,e\ldots) + (\alpha,\beta,c,d,e\ldots)\\
&\quad - (\alpha,d,e\ldots) + (e\ldots)\\
&\text{etc.;}
\end{aligned}$$

weil also in jedem der beiden Faktoren die Reihenfolge der Indizes invertiert werden kann, werden diese Formeln auf sehr viele Weise variiert werden können.

§34 Wir wollen aber zu Kettenbüchen zurückkehren und dazu, woher diese entstanden sind, und es sei der Wert von diesem

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}$$

$= S$; und oben haben wir schon gefunden, dass diese Werte

$$A=\frac{(a)}{1},\quad B=\frac{(a,b)}{(b)},\quad C=\frac{(a,b,c)}{(b,c)},\quad D=\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)},\quad E=\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}\quad \text{etc.}$$

immer näher an den Wert von S herankommen. Wir wollen also die einzelnen Differenzen dieser Terme eingehender betrachten

$$
\begin{aligned}
A-B &= -\frac{1}{1(b)}, & B-C &= +\frac{1}{(b)(b,c)}, & C-D &= -\frac{1}{(b,c)(b,c,d)},\\
A-C &= -\frac{(c)}{1(b,c)}, & B-D &= +\frac{(d)}{(b)(b,c,d)}, & C-E &= -\frac{(e)}{(b,c)(b,c,d,e)},\\
A-D &= -\frac{(c,d)}{1(b,c,d)}, & B-E &= +\frac{(d,e)}{(b)(b,c,d,e)}, & C-F &= -\frac{(e,f)}{(b,c)(b,c,d,e,f)},
\end{aligned}
$$

$$A-E = -\frac{(c,d,e)}{1(b,c,d,e)}, \quad B-F = +\frac{(d,e,f)}{(b)(b,c,d,e,f)},$$

$$C-G = -\frac{(e,f,g)}{(b,c)(b,c,d,e,f,g)}.$$

§35 Weil ja also in der Lehre über Kettenbrüche, von welcher ich schon einige Beispiele gegeben habe, die durch die Indizes gebildeten Zahlen diesen Geschlechts die ganze Aufgabe erledigen, werden die Gattung des Algorithmus' für sie, welche ich hier dargestellt habe, und die vorzüglichen gefundenen Beschaffenheiten einen nicht geringen Nutzen dabei leisten, diesen Gegenstand weiterzuentwickeln, woher ich mir sicher bin, dass diese Bemerkungen nicht ohne Nutzen sein werden.