Über Progressionen von Kreisbogen, deren Tangenten nach einem gewissen Gesetz fortschreiten *

Leonhard Euler

§1 Dass unendlich viele Progressionen dieser Art dargeboten werden können, ist auch aus diesen Beispielen klar, die ich einst vorgelegt habe; natürlich, während π den zwei rechte Winkel messenden Bogen bezeichnet, habe ich gefunden, dass gilt

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{18} + \arctan\frac{1}{32} + \arctan\frac{1}{50} + \text{etc.},$$

welche Reihe von Bogen ins Unendliche fortschreitet, während der Tangens eines jeden unbestimmt dieser ist

$$= \frac{1}{2xx};$$

auf die gleiche Weise ist

*Originaltitel: "De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9 1764, pp. 40-52", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 16 - 30 ", Eneström-Nummer E280, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{51} + \text{etc.},$$

nachdem diese Reihe in gleicher Weise ins Unendliche fortgesetzt worden ist, von welcher ein jeder Term unbestimmt dieser ist

$$\arctan\frac{1}{xx+x+1}.$$

Solche Reihen scheinen aber umso mehr der ganzen Aufmerksamkeit würdig, weil noch keine Methode bekannt ist, deren Summe a priori zu finden und auch alle Bogen selbst einander inkommensurabel sind. Ja es lässt sich nicht einmal eine Methode erwarten, mit deren Hilfe im Allgemeinen die Summe von Reihen solcher Art, welchem Gesetz auch immer die Tangenten folgen, ausfindig gemacht werden kann; oder besser, wenn dieses Gesetz nicht durch gewisse Bedingungen eingeschränkt worden ist, scheinen sie auf keine Weise auf eine Summe zurückgeführt werden zu können, welche freilich mit einem Kreisbogen ausgedrückt wird. Deswegen steht bei dieser Aufgabe kein anderer Weg offen, außer dass wir a posteriori Reihen dieser Art ausfindig machen, deren Betrachtung unter Umständen zu einem späteren Zeitpunkt einen gewissen direkten Weg eröffnen wird; und daher möchte ich eine leichte die Art und Weise erläutern, zu wie vielen Reihen dieser Art auch immer zu gelangen, welche, weil sie auf einfachste Prinzipien gestützt zu so tief liegenden Dingen führt, es ganz und gar zu verdienen scheint, dass sie sorgfältiger entwickelt wird.

§2 Nicht nur werden wir aber auf diese Weise zu unendlichen Reihen geführt, sondern können auch nach Belieben aus einer gegebenen Anzahl an Termen bestehende Progressionen erhalten. Denn das Fundament der ganzen Untersuchung besteht darin, dass wir nach Belieben wie viele Zahlen auch immer annehmen, welche seien

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon \quad \text{etc.}$$

welche man wie Tangenten von Winkeln ansehe. Weil nämlich offenbar gilt

$$\left\{\begin{matrix} + \arctan\alpha + \arctan\beta + \arctan\gamma + \arctan\delta \\ - \arctan\beta + \arctan\gamma + \arctan\delta + \arctan\varepsilon \end{matrix}\right\} = + \arctan\alpha - + \arctan\varepsilon$$

werden wir durch Zusammenfassen von je zwei übereinander geschriebenen Bogen wegen

$$\arctan p - \arctan q = \arctan\frac{p-q}{pq-1}$$

haben

$$\arctan\alpha - \arctan\varepsilon$$

$$= \arctan\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1} + \arctan\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1} + \arctan\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1} + \arctan\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1}$$

$$= \arctan\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha\varepsilon+1}$$

Betrachte also diese sehr allgemeine Form, woher alle Reihen von Bogen dieser Art ihren Ursprung haben, ob sie ins Unendliche laufen oder aus einer endlichen Anzahl an Termen bestehen:

$$\arctan\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1} + \arctan\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1} + \arctan\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1} + \arctan\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1} + \cdots$$

$$= \arctan\frac{\psi-\omega}{\psi\omega+1} + \arctan\frac{\alpha-\omega}{\alpha\omega+1}.$$

§3 Mich mit dem Fall, in welchem die Anzahl der Terme endlich ist, nicht weiter aufhaltend, möchte sofort nach unendlichen Reihen suchen. Zuerst werde ich also für α, β, γ etc. eine harmonische Reihe im Allgemeinen annehmen

$$\text{(Annahme I.)} \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{a+3b}, \quad \frac{1}{a+4b}, \quad \frac{1}{a+5b} \quad \text{etc.,}$$

woher, weil $\omega = 0$ ist, wir haben werden

$$\arctan\frac{1}{a} = \arctan\frac{b}{aa+ab+1} + \arctan\frac{b}{aa+3ab+3bb+1}$$
$$+\arctan\frac{b}{aa+5ab+6bb+1} + \arctan\frac{b}{aa+7ab+12bb+1} + \text{etc. ins Unendliche}$$

Und wenn wir jenen einzelnen Brüchen den gemeinsamen Zähler c zuteilen, wird auf die gleiche Weise sein

$$\arctan\frac{c}{a} = \arctan\frac{bc}{a(a+b)+cc} + \arctan\frac{bc}{(a+b)(a+2b)+cc}$$
$$\arctan\frac{bc}{(a+2b)(1+3b)+cc} + \arctan\frac{bc}{(a+3b)(a+4b)+cc} + \text{etc. ins Unendliche}$$

Daher verdienen besonders die Fälle bemerkt zu werden, in denen der Zähler dieser Tangenten die Einheit wird, was passiert, wenn entweder $bc = 1$ war oder wenn die einzelnen Nenner durch bc teilbar werden.

§4 In jedem der beiden Fälle muss entweder $c = 1$ oder $c = 2$ genommen werden; und wenn für den ersten Fall $b = 1$ genommen wird, wird hervorgehen

$$\arctan\frac{1}{a} = \arctan\frac{1}{aa+a+1} + \arctan\frac{1}{aa+3a+3} + \arctan\frac{1}{aa+5a+7}$$

$$\arctan\frac{1}{aa+7a+13}+\text{etc.},$$

deren Term im Allgemeinen dieser ist

$$\arctan\frac{1}{aa+(2x-1)a+xx-x+1},$$

woher für die einfacheren Werte von a diese Reihen entsprißen

$$\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{0} &= \arctan 1 + \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{31} + \text{etc.}\\
\arctan 1 &= \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{31} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{2} &= \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{31} + \arctan\frac{1}{43} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{3} &= \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{31} + \arctan\frac{1}{43} + \arctan\frac{1}{57} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{4} &= \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{31} + \arctan\frac{1}{43} + \arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{73} + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

§5 Für b lassen sich nur Zahlen nehmen, die Teiler von $aa+1$ sind, woher, wenn $b=2$ ist, es notwendig ist, dass a eine ungerade Zahl ist; und daher entsprießen die folgenden Reihen

$$\begin{aligned}
\arctan 1 &= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{18} + \arctan\frac{1}{32} + \arctan\frac{1}{50} + \arctan\frac{1}{72} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{3} &= \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{18} + \arctan\frac{1}{32} + \arctan\frac{1}{50} + \arctan\frac{1}{72} + \arctan\frac{1}{98} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{5} &= \arctan\frac{1}{18} + \arctan\frac{1}{32} + \arctan\frac{1}{50} + \arctan\frac{1}{72} + \arctan\frac{1}{98} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{7} &= \arctan\frac{1}{32} + \arctan\frac{1}{50} + \arctan\frac{1}{72} + \arctan\frac{1}{98} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

§6 Wenn $b = 5$ genommen wird, muss $a = 5n \pm 2$ genommen werden; daher wird

$$\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{2} &= \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{17} + \arctan\frac{1}{41} + \arctan\frac{1}{75} + \arctan\frac{1}{119} + \arctan\frac{1}{173} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{3} &= \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{47} + \arctan\frac{1}{83} + \arctan\frac{1}{129} + \arctan\frac{1}{185} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{7} &= \arctan\frac{1}{17} + \arctan\frac{1}{41} + \arctan\frac{1}{75} + \arctan\frac{1}{119} + \arctan\frac{1}{173} + \text{etc.}\\
\arctan\frac{1}{8} &= \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{47} + \arctan\frac{1}{83} + \arctan\frac{1}{129} + \arctan\frac{1}{185} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Der allgemeine Term der ersten ist

$$\arctan\frac{1}{5xx - x - 1},$$

der der zweiten

$$\arctan\frac{1}{5xx + x - 1},$$

die folgenden werden aber leicht aus der ersten abgeleitet, welche wir von nun an auslassen werden.

§7 Wenn $b = 10$ ist, muss $a = 10n \pm 3$ genommen werden,woher diese zwei Reihen entspringen:

$$\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{30} + \arctan\frac{1}{76} + \arctan\frac{1}{142} + \arctan\frac{1}{228} + \text{etc.}$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{10xx - 4x - 2},$$

$$\arctan\frac{1}{7} = \arctan\frac{1}{12} + \arctan\frac{1}{46} + \arctan\frac{1}{100} + \arctan\frac{1}{174} + \arctan\frac{1}{268} + \text{etc.},$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{10xx + 4x - 2}.$$

§8 Auf gleiche Weise werden nach Setzen von $b = 13$ und $a = 13n \pm 5$ diese hervorgehen

$$\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{43} + \arctan\frac{1}{105} + \arctan\frac{1}{193} + \text{etc.}$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{13xx - 3x - 3},$$

$$\arctan\frac{1}{8} = \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{55} + \arctan\frac{1}{123} + \arctan\frac{1}{217} + \text{etc.}$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan \frac{1}{13xx + 3x - 3}.$$

§9 Es sei $b = 17$ und man nehme $a = 17n \pm 4$; und es werden diese hervorgehen

$$\arctan \frac{1}{4} = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{47} + \arctan \frac{1}{123} + \arctan \frac{1}{233} + \arctan \frac{1}{377} + \text{etc.}$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan \frac{1}{17xx - 9x - 3},$$

$$\arctan \frac{1}{13} = \arctan \frac{1}{23} + \arctan \frac{1}{83} + \arctan \frac{1}{177} + \arctan \frac{1}{305} + \arctan \frac{1}{467} + \text{etc.},$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan \frac{1}{17xx + 9x - 3}.$$

§10 Es sei $b = 25$ und nach Nehmen von $a = 25n + \pm 7$ wird sein

$$\arctan\frac{1}{7} = \arctan\frac{1}{9} + \arctan\frac{1}{73} + \arctan\frac{1}{187} + \arctan\frac{1}{351} + \arctan\frac{1}{565} + \text{etc.}$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{25xx - 11x - 5},$$

$$\arctan\frac{1}{18} = \arctan\frac{1}{31} + \arctan\frac{1}{117} + \arctan\frac{1}{253} + \arctan\frac{1}{439} + \arctan\frac{1}{675} + \text{etc.}$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{25xx + 11x - 5}.$$

§11 Daher werden wir schon im Allgemeinen erschließen können, wenn a irgendeine Zahl war und $aa + 1 = mn$ ist, dass sein wird

$$\arctan\frac{1}{a} = \arctan\frac{1}{a+m} + \arctan\frac{1}{3a+m+2n} + \arctan\frac{1}{5a+m+6n} + \arctan\frac{1}{7a+m+12n} + \text{etc.},$$

während der allgemeine Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$$

oder auf diese Weise

$$\arctan\frac{1}{nx(x-1)+a(2x-1)+m}.$$

Wenn wir also die Summe dieser unendlichen Reihe durch

$$\int\arctan\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$$

anzeigen, werden wir diesen Lehrsatz erlangen

$$\int\arctan\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}=\arctan\frac{1}{a},$$

während $aa+1=mn$ ist.

§12 Wir wollen also sehen, in welchen Fällen die Reihe, deren allgemeiner Term dieser ist

$$\arctan\frac{1}{Lxx+Mx+N},$$

summiert werden können. Und nach Anstellen eines Vergleiches werden wir entdecken, dass dies geschehen kann, sooft galt

$$MM+4=LL+4LN$$

und daher entweder

$$L = -2N + \sqrt{MM + 4NN + 4}$$

oder

$$M = \sqrt{LL + 4LN - 4}$$

oder

$$N = \frac{MM - LL + 4}{4L}.$$

Und wenn diese Relation zwischen den Koeffizienten L, M, N Geltung hatte, wird sein

$$\int \arctan \frac{1}{Lxx + Mx + N} = \arctan \frac{2}{L+M}$$

oder es wird sein

$$\begin{aligned} \arctan \frac{2}{L+M} &= \arctan \frac{1}{L+M+N} + \arctan \frac{1}{4L+2M+N} \\ &+ \arctan \frac{1}{9L+3M+N} + \arctan \frac{1}{16L+4M+N} + \text{etc.} \end{aligned}$$

§13 Weil diese Dinge aus der harmonischen Progression folgen, wollen wir für α, β, γ, δ etc. diese Reihe nehmen

$$\text{(Annahme II.)} \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c+d}{a+b}, \quad \frac{c+2d}{a+2b}, \quad \frac{c+3d}{a+3b}, \quad \frac{c+4d}{a+4b} \quad \text{etc.},$$

woher, weil $\alpha = \frac{c}{a}$ und $\omega = \frac{d}{b}$ ist, wir diese Summation erhalten werden

$$\arctan \frac{bc - ad}{ab + cd}$$

$$= \arctan \frac{bc - ad}{a(a+b) + c(c+d)} + \arctan \frac{bc - ad}{(a+b)(a+2b) + (c+d)(c+2d)} + \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\arctan \frac{bc - ad}{a + b(x-1))(a+bx) + (c + d(x-1))(c+dx)}.$$

§14 Damit nun der Zähler dieses Tangens der Einheit gleich wird, muss entweder $bc - ad = 1$ oder der Nenner durch den Zähler $bc - ad$ teilbar sein, welches Letztere passiert, indem man nimmt

$$a = pr + qs, \quad c = ps - qr, \quad b = pt + qu, \quad a = pu - qs, \quad d = pu - qt,$$

solange nur gilt

$$st - ru = 1,$$

dann wird nämlich werden

$$\arctan \frac{1}{rt + su} = \int \arctan \frac{1}{rr + ss + (rt + su)(2x - 1) + (tt + uu)x(x-1)}.$$

Aber diese Formel stimmt mit der vorhergehenden so überein, dass daher keine neuen Reihen gefunden werden.

§15 Allerdings liefern aber Kettenbrüche geeignete für die Zahlen α, β, γ, δ etc. anzunehmende Werte. Wenn nämlich war

$$\text{(Annahme III.)} \qquad z = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \cfrac{1}{g + \text{etc.}}}}}}}$$

wird daher die folgende Reihe an für α, β, γ, γ etc. zu nehmenden Brüchen festgelegt

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \dfrac{1}{0}, & \dfrac{a}{1}, & \dfrac{ab+1}{b}, & \dfrac{abc+c+a}{bc+1}, & \dfrac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} \end{array} \quad \text{etc.}$$

deren letzter dem Wert von z selbst gleich ist.

§16 Wenn wir daher die Bezeichnungsweise, die ich in *Algorithmi singularis specimen* angegeben habe, einführen, werden diese Brüche so ausgedrückt werden

$$\begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \dfrac{1}{a}, & \dfrac{(a)}{1}, & \dfrac{(a,b)}{(b)}, & \dfrac{(a,b,c)}{(b,c)}, & \dfrac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}, & \dfrac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} \end{array} \quad \text{etc.,}$$

wo bemerkt werden muss, dass gilt

$$\begin{array}{lllll}
(a,b) & = a(b) & +1 & = b(a) & +1, \\
(a,b,c) & = a(b,c) & +(c) & = c(a,b) & +(a), \\
(a,b,c,d) & = a(b,c,d) & +(c,d) & = d(a,b,c) & +(a,b), \\
(a,b,c,d,e) & = a(b,c,d,e) & +(c,d,e) & = e(a,b,c,d) & +(a,b,c)
\end{array}$$

etc.

§17 Weil also $\alpha = \frac{1}{0}$ und $\omega = z$ ist, wird sein

$$\arctan\frac{1}{z} = \arctan\frac{1}{\beta} + \arctan\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1} + \arctan\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1} + \arctan\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1} + \text{etc.},$$

wo gilt

$$\beta = a$$

und

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1} = \frac{-1}{(a)(a,b)+(b)},$$

dann aber

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1} &= \frac{+1}{(a,b)(a,b,c)+(b)(b,c)}, \\
\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1} &= \frac{-1}{(a,b,c)(a,b,c,d)+(b,c)(b,c,d)}, \\
\frac{\varepsilon-\zeta}{\varepsilon\delta+1} &= \frac{+1}{(a,b,c,d)(a,b,c,d,e)+(b,c,d)(b,c,d,e)}
\end{aligned}$$

etc.,

sodass alle Zähler nun entweder $+1$ oder -1 sind.

§18 Wenn wir daher der Kürze wegen anstelle jener Reihe schreiben

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{B}{\mathfrak{B}}, & \frac{C}{\mathfrak{C}}, & \frac{D}{\mathfrak{D}}, & \frac{E}{\mathfrak{E}}, & \frac{F}{\mathfrak{F}} \end{array} \text{ etc.,}$$

dass ist

$$\begin{aligned} B &= ab + 1, & \mathfrak{B} &= b, \\ C &= cB + a, & \mathfrak{C} &= c\mathfrak{B} + 1, \\ D &= dC + B, & \mathfrak{D} &= d\mathfrak{C} + \mathfrak{B}, \\ E &= eD + C, & \mathfrak{E} &= e\mathfrak{D} + \mathfrak{C}, \\ F &= fE + D, & \mathfrak{F} &= f\mathfrak{E} + \mathfrak{D}, \\ &\text{etc.,} & &\text{etc.,} \end{aligned}$$

wird sein

$$\arctan\frac{1}{z} = \arctan\frac{1}{a} - \arctan\frac{1}{a+b(aa+1)} + \arctan\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})}$$

$$\begin{aligned} &- \arctan\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})} \\ &+ \arctan\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})+e(DD+\mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \text{etc.} \end{aligned}$$

§19 Wir wollen diesen bestimmten Kettenbruch betrachten

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}$$

dessen Wert $=\sqrt{2}$ ist, woher die Brüche, deren letzter $=\sqrt{2}$ ist, diese sind

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169} \end{array} \quad \text{etc.},$$

Weil nun nun $\alpha=\infty$ und $\omega=\sqrt{2}$ ist, wird sein

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}=\arctan 1-\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{31}-\arctan\frac{1}{179}$$
$$+\arctan\frac{1}{1045}+\text{etc.},$$

deren Bildungsgesetz nicht hinreichend klar ist, deshalb weil im Kettenbruch die Ordnung der Indizes unterbrochen; wenn diese bewahrt wird, dass gilt

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}=1+\sqrt{2}$$

woher diese Kettenbrüche entspringen

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{12}{5}, & \frac{29}{12}, & \frac{70}{29}, & \frac{169}{70}, & \frac{408}{169} \end{array} \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$\arctan\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{12} + \arctan\frac{1}{70} - \arctan\frac{1}{408}$$
$$+ \arctan\frac{1}{2378} - \text{etc.},$$

wo gilt

$$70 = 6\cdot 12 - 2, \quad 408 = 6\cdot 70 - 12, \quad 2378 = 6\cdot 408 - 70 \quad \text{etc.}$$

und

$$\arctan\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

§20 Und auf diese Weise kann jeder beliebige andere Kettenbruch behandelt werden; wie weil beispielsweise ist

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

daher entspringen die folgenden Brüchen aus den Indizes

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{19}{11}, & \frac{26}{15}, & \frac{71}{41} & \frac{97}{56} & \text{etc.,} \end{array}$$

wo wegen $\alpha = \infty$ und $\omega = \sqrt{3}$ sein wird

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan 1 - \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{13} - \arctan\frac{1}{47} + \arctan\frac{1}{177} - \arctan\frac{1}{659} + \text{etc.};$$

wenn aber nur alle zweiten Brüche genommen werden

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{26}{15}, \quad \frac{97}{56}, \quad \frac{362}{209} \quad \text{etc.,}$$

werden wir erhalten

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{18} + \arctan\frac{1}{242} + \arctan\frac{1}{3362} + \text{etc.,}$$

deren Nenner alle doppelte Quadrate sind, natürlich

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{2\cdot 1^2} + \arctan\frac{1}{2\cdot 3^2} + \arctan\frac{1}{2\cdot 11^2} + \arctan\frac{1}{2\cdot 41^2} + \arctan\frac{1}{2\cdot 153^2} + \text{etc.}$$

Nachdem aber alle anderen je zweiten genommen worden sind, geht wegen

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad \text{und} \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

hervor

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{64} + \arctan\frac{1}{900} + \arctan\frac{1}{12544} + \text{etc.},$$

welche Nenner Quadrate sind, deren Wurzeln diese Progression festlegen

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & x \\ 2, & 8, & 30, & 112, & 418 & \cdots & \dfrac{(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x}{\sqrt{3}}. \end{array}$$

§21 Weil aber Kettenbrüche auf Reihen von Bogen dieser Art geführt haben, wird umgekehrt die Summe einer solchen Reihe mit Hilfe eines Kettenbruches dargeboten werden können, was am bequemsten auf die folgende Weise geleistet werden wird. Es sei

$$\arctan\frac{1}{z} = \arctan\frac{1}{a} - \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} - \arctan\frac{1}{d} + \arctan\frac{1}{e} - \arctan\frac{1}{f} + \text{etc.}$$

und es werde gesetzt

$$\begin{array}{llll}
\arctan\frac{1}{z} = \arctan\frac{1}{a} - \arctan\frac{1}{B}, & \text{es wird sein} & z = \frac{aB+1}{B-a} & = a + \frac{aa+1}{-a+B}, \\
\arctan\frac{1}{B} = \arctan\frac{1}{b} - \arctan\frac{1}{C}, & \text{es wird sein} & B = \frac{bC+1}{C-b} & = b + \frac{bb+1}{-b+C}, \\
\arctan\frac{1}{C} = \arctan\frac{1}{c} - \arctan\frac{1}{D}, & \text{es wird sein} & C = \frac{cD+1}{D-c} & = c + \frac{cc+1}{-c+D}, \\
\arctan\frac{1}{D} = \arctan\frac{1}{d} - \arctan\frac{1}{E}, & \text{es wird sein} & D = \frac{dE+1}{E-d} & = d + \frac{dd+1}{-d+E}
\end{array}$$

etc.;

daher wird man also durch Sammeln diesen Kettenbruch haben

$$z = a + \cfrac{aa+1}{-a+b+\cfrac{bb+1}{-b+c+\cfrac{cc+1}{-c+d+\cfrac{dd+1}{-d+e+\cfrac{ee+1}{-e+f+\text{etc.}}}}}}$$

woher der Wert von z definiert wird.