Bemerkungen zu einem gewissen Auszug des Descartes, der sich auf die Quadratur des Kreises bezieht

Leonhard Euler

In den Auszügen aus den Manuskripten von Descartes wird zwar in wenigen Worten eine bestimmte Konstruktion angegeben um sehr schnell das wahre Maß des Kreises anzunähern, die aber, ob Descartes selbst sie gefunden hat oder ob sie von einem anderen mitgeteilt wurde, glänzend den sehr scharfsinnigen Geist des Finders, zumal zu jener Zeit, aufzeigt. Die darauf diesen selben Gegenstand betrachtet haben, sofern ich mich für meine Person erinnere, kommen nicht auf diese außerordentliche Konstruktion zu sprechen, dass die Gefahr besteht, sodass sie schließlich völlig in Vergessenheit gerät. Der Beweis, den man nicht beigefügt findet, wird freilich nicht schwer ergänzt; aber nicht nur die Eleganz der Konstruktion verdient ergiebigere Erklärung, sondern man kann auch so außergewöhnliche Schlussfolgerungen daraus ableiten, die für sich schon jeder Aufmerksamkeit würdig scheinen. Diese sehr schöne Konstruktion ist in Worten von Descartes selbst so vorgelegt worden:

> „Um den Kreis zu quadrieren, finde ich nichts geeigneter, als wenn einem gegebenen Quadrat bf (Fig. 1) ein Rechteck cg beigefügt wird, welches durch die Linien ab und bc ausgedrückt wird und welches gleich dem vierten Teil des Quadrates bf sei, genauso sei das Rechteck dh das Produkt aus den Linien da, dc gleich dem vierten Teil des vorhergehenden; und auf dieselbe Weise das Rechteck ei und andere unendlich viele bis hin zu x; und es wird diese Linie ax der Durchmesser des Kreises sein, dessen Umfang gleich dem Umfang des Quadrates bf ist.“

Die Tragweite dieser Konstruktion besteht also darin, dass durch wiederholte Hinzufügung von Rechtecken cg, dh, ei etc dieser Art, deren oben rechte Winkel genau in die fortgesetzte Diagonale des Quadrates, schließlich zu einem Punkt x gelangt wird, durch den der Durchmesser ax des Kreises begrenzt wird, dessen Peripherie gleich dem Perimeter des Quadrates bf oder dem Vierfachen der Gerade ab ist.

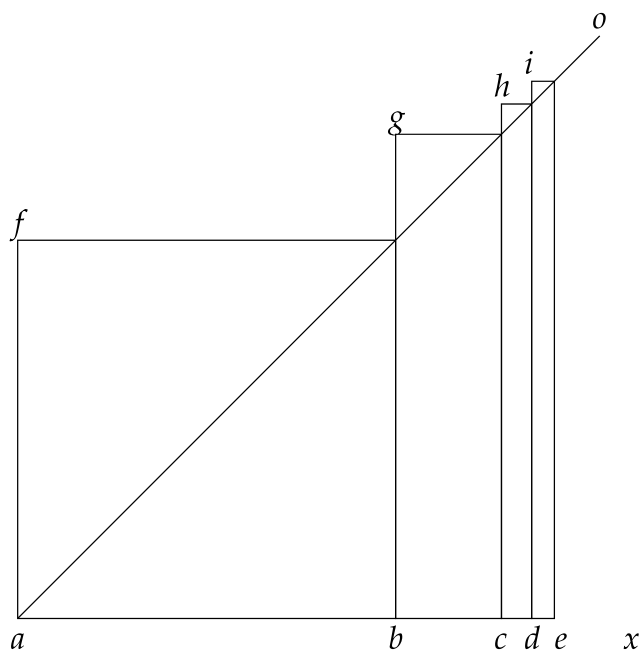

FIG. 1

Weil jedes dieser Rechtecke dem vierten Teil des vorhergehenden gleich wird, bemerkt schon Descartes selbst, dass die Summe all dieser Rechtecke gleich dem dritten des Quadrates bf sein wird; dies ist freilich klar, weil die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \text{etc}$$

ins Unendliche fortgesetzt gleich $\frac{1}{3}$ ist.

Außerdem zeigt Descartes die Begründung, auf welche diese Konstruktion gestützt ist; er nimmt natürlich die regulären Polygone mit 8, 16, 32, 64, etc Seiten, deren Durchmesser einander gleich sein sollen und gleichzeitig gleich dem Perimeter des Quadrates bf. Weil nun ab der Durchmesser des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises ist, so versichert er, dass ac der Durchmesser des dem Oktagon einbeschriebenen Kreises sein wird, dann aber ad der Durchmesser des dem 16-gon, ae dem 32-gon einbeschriebenen Kreises und so weiter. Daher ist klar, dass ax der Durchmesser des dem regulären Polygon mit unendlich vielen Seiten einbeschriebenen Kreises sein wird und daher seine Peripherie dem Perimeter gleich wird. Um den Beweis dieser Konstruktion leichter anzugehen, bemerke ich, dass das, was hier über die Durchmesser der Kreise gesagt wird, auch für die Radien gilt, sodass ab, ac, ad, ae, etc als die Radien der Kreise betrachtet werden können, welche durch die regelmäßige Polygone mit 4, 8, 16, 32, etc Seiten umbeschrieben werden, deren Perimeter auch einander gleich sein werden.

Problem

Nachdem ein Kreis gegeben worden ist, welchem irgendein reguläres Polygon umschrieben worden sei, ist ein anderer Kreis zu finden, wenn diesem ein regelmäßiges Polygon mit doppelt so vielen Seiten umschrieben wird, dass die Perimeter dieses Polygons dann gleich dem Perimeter jenes Polygons sein wird.

Lösung

Es sei ENM (Fig. 2) der gegebene Kreis und EP die Halbseite des selbigen umschriebenen Problems, während das Zentrum in C liegt; CF aber sei der der Radius des gesuchten Radius und FQ die Halbseite des selbigen zu umschreibenden Polygons. Es ist also nötig, dass FQ die Hälfte von EP ist und der Winkel FCQ die Hälfte des Winkels ECP. Daher wird die Gerade CQ den Winkel ECP und die Gerade QO, die zu CE parallel ist, wird die Linie EP schneiden. Weil nun

$$EV : CE = FQ : CF$$

und

$$EV : CE = EP : CE + CP$$

ist, wird

$$FQ : CF = EP : CE + CP$$

sein; aber weil $FQ = \frac{1}{2}EP$ ist, wird auch

$$CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$$

sein. Daher schaffe man CF weg und man wird

$$EF = \tfrac{1}{2}(CP - CE)$$

haben, woraus das Rechteck

$$CF \cdot EF = \tfrac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \tfrac{1}{4}EP^2$$

sein wird und daher muss der Punkt F so bestimmt werden, dass das Rechteck, das durch CF und EF beschrieben wird, gleich dem vierten Teil des Quadrates der Gerade EP oder dem Quadrat selbst der Gerade FQ gleich wird.

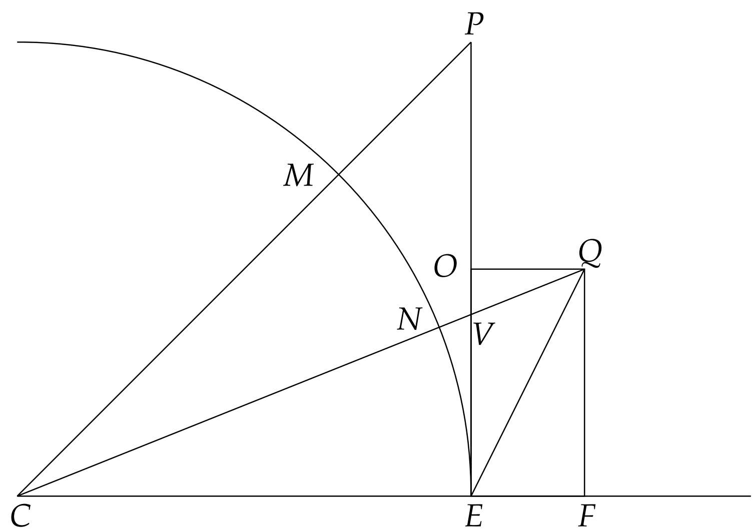

FIG. 2

Korollar 1

Weil $CF \cdot EF = FQ^2$ ist, wird $CF : FQ = FQ : EF$ sein, woher die gezogene Gerade QE das dem Dreieck FCQ oder ECV ähnliche Dreieck FQE werden wird und daher der Winkel FQE gleich dem Winkel ECV sein wird.

Korollar 2

Weil $CE : EV = EO : EF$ ist, wird der Punkt F auch so bestimmt werden können: aus O ziehe man die zu fortgeführten Gerade CV senkrechte Gerade, und diese wird die Basis CE in F treffen.

Korollar 3

Wenn das dem Kreis ENM umschriebene Polygon n Seiten hat, wird der Winkel $ECP = \frac{\pi}{n}$, während π das Maß zweier rechter Winkel bezeichnet, und der Winkel $FCQ = \frac{\pi}{2n}$ sein. Daher wird, wenn der Radius $CE = r$ ist,

$$EP = r \tan \tfrac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad FQ = \tfrac{1}{2} r \tan \tfrac{\pi}{n}$$

sein.

Korollar 4

Weil nun der Winkel $FQE = \frac{\pi}{2n}$ ist, wird

$$EF = FQ \tan \tfrac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{2} r \tan \tfrac{\pi}{n} \cdot \tan \tfrac{\pi}{2n}$$

sein. Wenn wir aber $CF = s$ nennen, wird

$$FQ = s \tan \tfrac{\pi}{2n}$$

sein, woher wegen

$$\begin{aligned} FQ &= \tfrac{1}{2} r \tan \tfrac{\pi}{n} \\ s &= \tfrac{1}{2} r \tan \tfrac{\pi}{n} \cot \tfrac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

werden wird.

Beweis der Descartes'schen Konstruktion

Es sei nun CE (Fig. 3) der Radius des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises, CF des dem Oktagon einbeschriebenen, CG des dem regulären Polygon mit 16 Seiten einbeschriebenem, CH des dem Polygon mit 32 Seiten einbeschriebenen und so weiter. Es sei weiter EP die Halbseite des Quadrates, FQ die Halbseite des Oktagons, GR die des 16-seitigen Polygons, HS die des Polygons mit 32 Seiten etc, und weil Polygone desselben Perimeters genommen werden, wird

$$FQ = \tfrac{1}{2} EP, \quad GR = \tfrac{1}{2} FQ = \tfrac{1}{4} EP, \quad HS = \tfrac{1}{2} GR = \tfrac{1}{4} FQ = \tfrac{1}{8} EP, \quad \text{etc}$$

sein.

Nun ist aus dem vorausgeschickten Problem

$$CF \cdot EF = \tfrac{1}{4} EP^2 = FQ^2;$$

dann ist aber aus demselben auf die gleiche Weise

$$CG \cdot FG = \tfrac{1}{4}FQ^2 = \tfrac{1}{4}CF \cdot EF = GR^2$$
$$CH \cdot GH = \tfrac{1}{4}GR^2 = \tfrac{1}{4}CG \cdot FG = HS^2$$
$$\text{etc}$$

und so werden die Punkte F, G, H, etc auf dieselbe Weise bestimmt, wie es die Descartes'sche Konstruktion vorgibt; und weil die Intervalle EF. FG, GH, etc immer kleiner werden, nähert man sich hinreichend schnell dem letzten Punkt x und es wird Cx der Radius des Kreises sein, dessen Peripherie dem Perimeter der vorhergehenden Polygone gleich wird und daher der Gerade EP achtfach genommen wird.

Q.E.D.

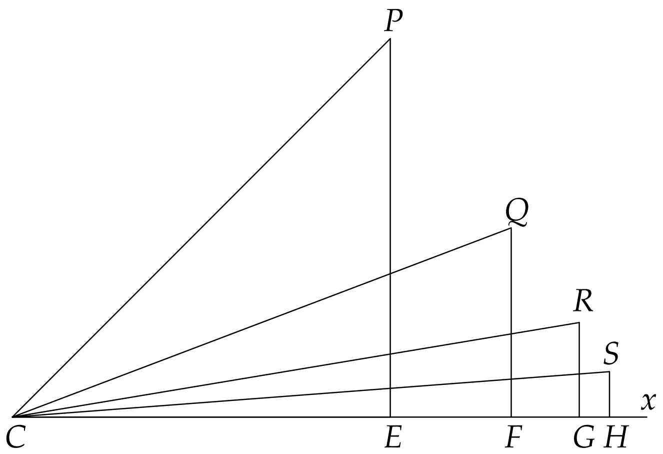

FIG. 3

Korollar 1

Wenn man $CE = a$, $CF = b$, $CG = c$, $CH = d$, etc setzt, ist die Progression dieser Größen so beschaffen, dass wegen $EP = a$

$$b(b-a) = \tfrac{1}{4}aa, \quad c(c-b) = \tfrac{1}{4}b(b-a), \quad d(d-c) = \tfrac{1}{4}c(c-b), \quad \text{etc}$$

ist und daher

$$b = \frac{a+\sqrt{2aa}}{2}, \quad c = \frac{b+\sqrt{2bb-ab}}{2}, \quad d = \frac{c+\sqrt{2cc-bc}}{2}, \quad \text{etc}$$

und die infinitesimale dieser Größen ist der Radius des Kreises, dessen Peripherie gleich $8a$ ist.

Korollar 2

Weil der Winkel ECP ein halbrechter ist oder $ECP = \frac{\pi}{4}$, werden die Winkel

$$FCQ = \frac{\pi}{8}, \quad GCR = \frac{\pi}{16}, \quad HCS = \frac{\pi}{32}, \quad \text{etc}$$

sein. Daher wird wegen

$$EP = a, \quad FQ = \tfrac{1}{2}a, \quad GR = \tfrac{1}{4}a, \quad HS = \tfrac{1}{8}a, \quad \text{etc}$$

durch Kotangenten

$$CE = a\cot\tfrac{\pi}{4}, \quad CF = \tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{\pi}{8}, \quad CG = \tfrac{1}{4}a\cot\tfrac{\pi}{16}, \quad CH = \tfrac{1}{8}a\cot\tfrac{\pi}{32}, \quad \text{etc}$$

sein. Daher wird, während n eine unendliche Zahl bezeichnet, die letzte dieser Linien gleich

$$\tfrac{1}{n}a\cot\tfrac{\pi}{4n}$$

sein.

Korollar 3

Aber $\cot\frac{\pi}{4n} = 1 : \tan\frac{\pi}{4n}$; und weil der Winkel $\frac{\pi}{4n}$ unendlich klein ist, wird

$$\tan\tfrac{\pi}{4n} = \tfrac{\pi}{4n} \quad \text{und daher} \quad \cot\tfrac{\pi}{4n} = \tfrac{4n}{\pi}$$

sein. Daher wird die letzte jener Linien gleich $\frac{4a}{\pi}$; wenn durch diesen Radius ein Kreis beschrieben wird, wird seine Peripherie gleich $2\pi \cdot \frac{4a}{\pi} = 8a$ sein.

Korollar 4

Weil darauf aus Korollar 4 des vorhergehenden Problems

$$EF = FQ\tan FCQ$$

ist, wird wegen derselben Begründung

$$FG = GR\tan GCR, \quad GH = HS\tan HCS, \quad \text{etc}$$

sein, woher diese Intervalle auf die folgende Weise ausgedrückt werden

$$EF = \tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{\pi}{8}, \quad FG = \tfrac{1}{4}a\tan\frac{\pi}{16}, \quad GH = \tfrac{1}{8}a\tan\tfrac{\pi}{32}, \text{etc,}$$

die vorhergehende aber in Analogie

$$CE = a\tan\tfrac{\pi}{4} = a.$$

Korollar 5

Nachdem diese mit den vorhergehenden zusammengebracht worden sind, werden wir

$$\begin{aligned}
CF &= a\left(\tan\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{8}\right) = \tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{\pi}{8}\\
CG &= a\left(\tan\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{\pi}{16}\right) = \tfrac{1}{4}a\cot\frac{\pi}{16}\\
CH &= a\left(\tan\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{\pi}{16} + \tfrac{1}{8}\tan\tfrac{\pi}{32}\right) = \tfrac{1}{8}a\cot\tfrac{\pi}{32}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

erhalten und so können die Summen aller Progressionen dieser Art angenehm angegeben werden.

Korollar 6

Indem wir also ins Unendliche fortschreiten, werden wir die Summation dieser Reihe

$$\tan\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{\pi}{16} + \tfrac{1}{8}\tan\tfrac{\pi}{32} + \text{etc} = \tfrac{4}{\pi}$$

erhalten, die also durch die Quadratur des Kreises bestimmt wird. Ich ergreife daher die Gelegenheit, das folgende Problem zu lösen.

Problem

Während φ irgendeinen Winkel des Kreises bezeichnet, dessen Radius gleich 1 ist, ist die Summe dieser unendlichen Reihe

$$\tan\varphi + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{4}\varphi + \tfrac{1}{8}\tan\tfrac{1}{8}\varphi + \tfrac{1}{16}\tan\tfrac{1}{16}\varphi + \text{etc}$$

zu finden.

Lösung

Wenn man in Fig. 2, wie sie oben konstruiert worden ist, den Winkel $ECP = \varphi$ setzt, wird $FCQ = \tfrac{1}{2}\varphi$ sein; nun wird für $FQ = 1$ gesetzt $EP = 2$ sein und daher

$$CE = 2\cot\varphi, \quad CF = \cot\tfrac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad EF = \tan\tfrac{\varphi}{2},$$

woraus man

$$2\cot\varphi = \cot\tfrac{1}{2}\varphi - \tan\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad \tan\tfrac{1}{2}\varphi = \cot\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cot\varphi$$

hat und auf dieselbe Weise

$$\tan\varphi = \cot\varphi - 2\cot 2\varphi.$$

Man stelle diese Werte der Tangenten durch Kotangenten ausgedrückt in der vorgelegten Reihe dar

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \cot\varphi - 2\cot 2\varphi \\
\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\varphi &= \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \cot\varphi \\
\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{4}\varphi &= \tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{4}\varphi - \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\varphi \\
\tfrac{1}{8}\tan\tfrac{1}{4}\varphi &= \tfrac{1}{8}\cot\tfrac{1}{8}\varphi - \tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{4}\varphi \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

und durch Sammeln werden wir

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \cot\varphi - 2\cot 2\varphi \\
\tan\varphi + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\varphi &= \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cot 2\varphi \\
\tan\varphi + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{4}\varphi &= \tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{4}\varphi - 2\cot 2\varphi \\
\tan\varphi + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{4}\varphi + \tfrac{1}{8}\tan\tfrac{1}{8}\varphi &= \tfrac{1}{8}\cot\tfrac{1}{8}\varphi - 2\cot 2\varphi \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

woher, indem man ins Unendliche fortschreitet, wenn n eine unendliche Zahl bezeichnet, weil $\tan\frac{1}{n}\varphi = \frac{\varphi}{n}$ und daher $\cot\frac{1}{n}\varphi = \frac{n}{\varphi}$ ist, $\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\varphi = \frac{1}{\varphi}$ sein wird und daher die Summe der vorgelegten Reihe

$$\tan\varphi + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{4}\varphi + \tfrac{1}{8}\tan\tfrac{1}{8}\varphi + \text{etc} = \tfrac{1}{\varphi} - 2\cot 2\varphi.$$

Daher, wenn 2φ der rechte Winkel oder $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist, wird wegen $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ die Summe der Reihe $\frac{1}{\varphi} = \frac{4}{\pi}$ sein, welcher der oben behandelte Fall ist.

Aus dieser Reihe können viele andere nicht weniger bemerkenswerte berechnet werden.

I: Aus ihrer Ableitung erhalten wir

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{1}{4}\varphi} + \frac{1}{4^3\cos^2\frac{1}{8}\varphi} + \frac{1}{4^4\cos\frac{1}{16}\varphi} + \text{etc}$$
$$= -\frac{1}{\varphi\varphi} + \frac{4}{\sin^2 2\varphi}$$

oder weil

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

ist, wird auch

$$(\sec\varphi)^2 + \tfrac{1}{4}(\sec\tfrac{1}{2}\varphi)^2 + \tfrac{1}{4^2}(\sec\tfrac{1}{4}\varphi)^2 + \tfrac{1}{4^3}(\sec\tfrac{1}{8}\varphi)^2 + \text{etc} = \frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} - \frac{1}{\varphi\varphi}$$

sein.

II. Darauf wird wegen

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2 2\varphi = \frac{1-\cos 4\varphi}{2},$$

indem man überall durch 2 teilt,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\cos 2\varphi} + \frac{1}{4(1+\cos\varphi)} + \frac{1}{4^2(1+\cos\frac{1}{2}\varphi)} + \frac{1}{4^3(1+\cos\frac{1}{4}\varphi)} + \text{etc}\\ =&\frac{2}{1-\cos 4\varphi} - \frac{1}{2\varphi\varphi}\end{aligned}$$

sein oder, indem man $\frac{1}{2}\varphi$ für φ schreibt,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\cos\varphi} + \frac{1}{4(1+\cos\frac{1}{2}\varphi)} + \frac{1}{4^2(1+\cos\frac{1}{4}\varphi)} + \frac{1}{4^3(1+\cos\frac{1}{8}\varphi)} + \text{etc}\\ =&\frac{2}{1-\cos 2\varphi} - \frac{2}{\varphi\varphi}.\end{aligned}$$

III. Wenn man die gefundene Reihe mit $d\varphi$ multipliziert und integriert, wird man wegen

$$\int d\varphi\tan\varphi = \int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\log\cos\varphi \quad \text{und} \quad \int 2d\varphi\cot 2\varphi = \log\sin 2\varphi$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned}&-\log\cos\varphi - \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \log\cos\tfrac{1}{4}\varphi - \log\cos\tfrac{1}{8}\varphi - \log\cos\tfrac{1}{16}\varphi - \text{etc}\\ =&\log\varphi - \log\sin 2\varphi + \text{const.}\end{aligned}$$

haben; um diese Konstante zu bestimmen, wollen hier $\varphi = 0$ setzen, und weil $\log\cos 0 = \log 1 = 0$ ist, werden wir aus dem ersten Teil 0 haben, aus dem zweiten aber haben wir wegen $\sin 2\varphi = 2\varphi$ gleich $\log\varphi - \log 2\varphi + \text{const} = -\log 2 + \text{const}$, woher $\text{const} = \log 2$ ist. Daher wird durch Übergehen in Zahlen

$$\frac{1}{\cos\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{4}\varphi\cos\frac{1}{8}\varphi\cos\frac{1}{16}\varphi \;\text{ etc}} = \frac{2\varphi}{\sin 2\varphi}$$

sein.

IV. Weil

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

ist, wird man auch dieses Theorem

$$\sec\varphi\cdot\sec\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sec\tfrac{1}{4}\varphi\cdot\sec\tfrac{1}{8}\varphi\sec\tfrac{1}{16}\varphi\cdot\text{etc} = \tfrac{2\varphi}{\sin 2\varphi}$$

für die Sekanten haben; daher wird, wenn das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie gleich $1 : \pi$ gesetzt wird und q den rechten Winkel bezeichnet, wenn man $2\varphi = q = \frac{\pi}{2}$ setzt,

$$\sec\tfrac{1}{2}q\cdot\sec\tfrac{1}{4}q\cdot\sec\tfrac{1}{8}q\cdot\sec\tfrac{1}{16}q\cdot\sec\tfrac{1}{32}q\cdot\text{etc} = \tfrac{\pi}{2}$$

sein.

Problem

Es ist die Reihe der Größen a, b, c, d, e, f, etc zu finden, welche diese Eigenschaft habe, dass

$$c(c-b) = \tfrac{1}{4}b(b-a), \quad d(d-a) = \tfrac{1}{4}c(c-b), \quad e(e-d) = \tfrac{1}{4}d(d-c), \quad \text{etc}$$

ist oder dass die daher abgeleiteten Größen

$$b(b-a), \quad c(c-b), \quad d(d-c), \quad e(e-d), \quad f(f-e)$$

gemäß dem vierfachen Verhältnis schrumpfen.

Lösung

Weil $\tan\frac{1}{2}\varphi = \cot\frac{1}{2}\varphi - 2\cot\varphi$ ist, wird, wenn wir auf beiden Seiten mit $\cot\frac{1}{2}\varphi$ multiplizieren, wegen $\tan\frac{1}{2}\varphi\cot\frac{1}{2}\varphi = 1$

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi(\cot\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cot\varphi) = 1$$

sein. Man setze also

$$a = r\cot\varphi, \quad b = \tfrac{1}{2}r\cot\tfrac{1}{2}\varphi, \quad c = \tfrac{1}{4}r\cot\tfrac{1}{4}\varphi, \quad d = \tfrac{1}{8}r\cot\tfrac{1}{8}\varphi, \quad \text{etc}$$

und es wird

$$\begin{aligned}
\frac{2b}{r}\left(\frac{2b}{r} - \frac{2a}{r}\right) &= 1, \quad \text{daher} \quad b(b-a) = \frac{rr}{4}\\
\frac{4c}{r}\left(\frac{4c}{r} - \frac{4b}{r}\right) &= 1, \quad \text{daher} \quad c(c-b) = \frac{rr}{4^2}\\
\frac{8d}{r}\left(\frac{8d}{r} - \frac{8c}{r}\right) &= 1, \quad \text{daher} \quad d(d-c) = \frac{rr}{4^3}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

sein. Daher hat diese Reihe

$$a = r\cot\varphi, \quad b = \tfrac{1}{2}r\cot\tfrac{1}{2}\varphi, \quad c = \tfrac{1}{4}r\cot\tfrac{1}{4}\varphi, \quad d = \tfrac{1}{8}r\cot\tfrac{1}{8}\varphi, \quad \text{etc}$$

diese Eigenschaft, dass die daher gebildeten Größen

$$b(b-a), \quad c(c-b), \quad d(d-c), \quad e(e-d), \text{etc}$$

im 4-fachen Verhältnis schrumpfen.

Korollar 1

Nachdem die beiden ersten Terme a und b gegeben worden sind, werden die übrigen c, d, e, f, etc daher nacheinander so bestimmt, dass

$$c = \frac{b + \sqrt{2bb - ab}}{2}, \quad d = \frac{c + \sqrt{2cc - bc}}{2}, \quad e = \frac{d + \sqrt{2dd - cd}}{2}. \quad \text{etc}$$

ist und daher, nachdem diese beiden eingangs nach Belieben angenommen worden sind, kann die ganze Reihe mithilfe dieser Formeln beschafft werden.

Korollar 2

Nachdem aber die Terme a und b gegeben worden sind, kann daher der Winkel φ mit der Größe r so bestimmt werden, dass

$$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{bb-ab}}{a} \quad \text{und} \quad r = 2\sqrt{bb-ab}$$

ist, woher nach dem Fund des Winkels φ die übrigen Terme auch so ausgedrückt werden, dass

$$c = \tfrac{1}{4}r\cot\tfrac{1}{4}\varphi, \quad d = \tfrac{1}{8}r\cot\tfrac{1}{8}\varphi, \quad e = \tfrac{1}{16}r\cot\tfrac{1}{16}\varphi, \quad \text{etc}$$

ist.

Korollar 3

Daher werden die infinitesimalen Terme dieser Reihe gleich $\frac{r}{\varphi}$ werden, zu welchem Wert die Terme hinreichend schnell konvergieren. Man siehe natürlich im Kreis vom Radius gleich 1 den Bogen, dessen Tangens gleich

$$\frac{2\sqrt{bb-ab}}{a}$$

ist, welcher Bogen gleich φ sei, und die infinitesimalen Terme unserer Reihe werden gleich

$$\frac{2\sqrt{bb-ab}}{\varphi}$$

sein.

Bemerkung

Dazu wird es förderlich sein, hier erwähnt zu haben, dass die Punkte P, Q, R, S, x (Fig. 3) auf der Curva Quadratix der alten Griechen liegen, deshalb weil die Ordinaten EP, FQ, GR, HS dasselbe Verhältnis zueianander haben wie die Winkel ECP, FCG, GCR, HCS, etc. Und weil ja x, wo diese Kurve auf die Basis trifft, schon damals gefunden worden ist die Quadratur des Kreises anzugeben, woher ihr dieser Name gegeben worden ist, stimmt die Descartes'sche Konstruktion mit dieser Quadratur der Alten zwar vollkommen überein, aber liefert um Vieles gefälliger und genauer nacheinander die Punkte E, F, G, H, etc, als man von wiederholter Zweiteilung der Winkel erwarten kann.