DE PARTITIONE NUMERORUM

Over partities van getallen.
Auteur: L. Euler

§1.

Het Probleem *over het partitioneren van getallen* is eerst aan mij voorgelegd door de zeer beroemde Professor Naude[1], waarin hij vroeg, hoeveel positieve, gehele getallen, (want dit is altijd een gesprek over slechts gehele en positieve getallen,) op verschillende manieren toegevoegd moeten kunnen zijn, van twee of drie of vier, of op een wijze, zoveel als het van de getallen gewenst is. Of, wat daarop neerkomt, wordt gevraagd, hoeveel gegeven getallen op verschillende manieren, of in twee, of drie, of vier, of zoveel als het gewenst is de delen te kunnen verdelen, waar dit Probleem zeer passend een gegeven naam heeft, *over het delen van getallen.* Dit Probleem door de zeer bekende man is echter tweedelig: zo wordt het voorgelegd: eerst verlangt hij namelijk slechts die manieren van delen, waaruit enkele delen, waarin het gegeven getal wordt gedeeld, onderling ongelijk zijn; maar dan verlangt hij alle manieren van het delen in zijn geheel, als deze voorwaarde van ongelijkheid is overgeslagen, of delen waren onder elkaar zeker gelijk, of allen ongelijk. Het is echter duidelijk, dat hierin het aantal partities voor het latere geval meestal veel groter is, dan voor het eerste, wanneer niet alleen alle partities, die in het eerste geval voldoen, maar ook meestal andere, die tegelijkertijd in het laatste geval, waarin gelijke delen bij elkaar worden opgeteld, kunnen voldoen, gelden.

§2. Om dit Probleem makkelijker te begrijpen, ontbreken er geen tamelijk simpele gevallen, die gedeeld werden met een praktische, simpele opsomming van partities. Als wordt gevraagd, op hoeveel verschillende wijzen het getal 6. in twee delen gedeeld kan worden, wordt meteen zichtbaar, dat dit op drie manieren kan gebeuren, omdat geldt:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

als de gelijkheid van delen tenminste niet wordt uitgesloten. Als daarentegen echter slechts ongelijke delen worden gewenst, moet de laatste partitie, $3 + 3$, achterwege worden gelaten, en in dit geval kan het getal 6 slechts op twee manieren worden opgedeeld in twee delen, die onderling ongelijk zijn. Maar als een oneven getal in twee delen moet worden gedeeld, laat het getal 9 worden voorgelegd om te gebruiken, verschijnen vier partities, die zijn:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

waar, omdat ongelijke delen niet voorkomen, het getal 9 op vier manieren in twee delen wordt gedeeld, of geen gelijke delen toegestaan, of anders. [2] Als meer dan twee delen worden gewenst, alsof wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 12 in drie delen kan worden uitgedeeld, zal dit op de volgende 12 manieren kunnen gebeuren:

$$12 = 1 + 1 + 10\ ;\ \ 12 = 1 + 2 + 9\ ;\ 12 = 1 + 3 + 8$$
$$12 = 1 + 4 + 7\ \ ;\ \ 12 = 1 + 5 + 6\ ;\ 12 = 2 + 2 + 8$$
$$12 = 2 + 3 + 7\ \ ;\ \ 12 = 2 + 4 + 6\ ;\ 12 = 2 + 5 + 5$$

$12 = 3 + 3 + 6$; [3] $12 = 3 + 4 + 5$; [4] $12 = 4 + 4 + 4$

Als echter gelijke delen worden uitgesloten, zal geantwoord moeten worden, dat het getal 12 slechts op 7 wijzen in drie delen verdeeld kan worden.

---

[1] Professor Naude
[2] *Het geval waar wel gelijke delen zijn toegestaan. (In beide gevallen resulteert het dus in 4)*
[3] In het Manuscript staat er 2 op de plaats van de tweede 3, dat is natuurlijk fout.
[4] *In het Manuscript staat er 11 i.p.v. 12, dat is natuurlijk ook fout.*

§3. Vandaar wordt makkelijk begrepen als zo een groter getal zal moeten worden gedeeld, en het aantal delen, waarin het moet worden gedeeld, moge het boven telkens drie of vier zitten, dat het aantal partities zo groot wordt, dat het door het opstellen van een opsomming met de hand zeer lastig kan worden verkregen. [5] Want het doen bij dit werk is niet meer dan proberen, dat meestal bedriegt, zodra het gevaar voor degene die het doet gemakkelijker duidelijk zal zijn, als hij van die opsomming, die hij gemaakt heeft voor simpelere gevallen, meer geordende conclusies wilde vormen. Zo zal uit de methode na het uitleggen duidelijk zijn, dat het getal 50, niet zonder gelijkheid van delen, op 8946 manieren opgedeeld kan worden in zeven delen; maar als daarentegen gelijke delen echter worden uitgesloten, blijven slechts 522 partities over. Verder kan het getal 42000 helemaal in twintig delen worden opgedeeld op verschillende manieren. Maar als wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 125 in 12 delen, die onderling alle ongelijk zijn, kan worden gevonden dat dat kan gebeuren op 64707 wijzen.

§4. Zoals alle gehele getallen de plaatsen van delen hier kunnen hebben, zo kan dit Probleem tot in het oneindige worden afgewisseld, al naargelang bepaalde delen van een getal achterwege worden gelaten. Zo zal het Probleem anders zijn, als je vraagt, op hoeveel verschillende wijzen het gegeven getal n in p delen, waarvan geen het gegeven getal m overschrijdt, kan worden opgedeeld. Het aantal delen kan ook achterwege worden gelaten, zodat, als wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 6 uit deze getallen 1, 2, 3, 4 door optelling kan worden gemaakt, dat op de volgende 9 manieren kan gebeuren:

$6 = 1+1+1+1+1+1$	$6 = 1+1+1+3$
$6 = 1+1+1+1+2$	$6 = 1+1+4$
$6 = 1+1+2+2$	$6 = 1+2+3$
$6 = 2+2+2$	$6 = 2+4$
	$6 = 3+3$

Want anders kan de eigenschap van de getallen, die de delen samenstellen, worden opgeschreven; als delen of oneven getallen, of kwadraten, of derde machten, of een andere van deze soort moeten zijn. Alleen als wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren een gegeven getal de som kan zijn van vier kwadraten, zal deze vraag betrekking hebben op deze soort. Lang geleden was het delen van getallen in delen, die de termen waren van deze meetkundige reeks, 1, 2, 4, 8, 16, 32, *etc*. ook al bekeken, en ieder mogelijk getal is bekeken te kunnen worden samengesteld op slechts één unieke manier door optellen van deze getallen 1, 2, 4, 8, 16, 32, *etc*. Na *Stifelius* maakte *Scotcnius* een opmerking voor deze vraag in zijn *Oefeningen*, waar hij aantoonde dat de gewichten 1, 2, 4, 8, 16, 32, *etc*. voor weegschalen genoeg konden zijn om hoeveel handelswaar ook maar voor weegschalen te wegen. Maar men gebruikte geen andere methode om dit aan te tonen dan uitschrijven. Voor deze zaak zal de waarheid van deze uitspraak van deze zaak[6] niet gedemonstreerd worden.[7]

§5. Zoals dus deze en andere gelijke Problemen zouden moeten worden opgelost, leg ik deze zekere en veilige methode zodanig uit, dat het duidelijk niet nodig is door te proberen, waaraan het in het algemeen zeer veel gewoon is toegedeeld te worden voor de oplossing voor de vragen van deze manier. Ik gebruik daarvoor het volgende, zeer bekende Lemma:

Als dit product

[5] Als het getal dat je deelt en het aantal delen waarin je dat getal moet delen, vergroot. Als je in meer dan 3 of 4 delen deelt, wordt het moeilijker om het uit te schrijven.
[6] Dat elk getal gemaakt kan worden uit 1,2,4,8,16, etc.
[7] Dit helpt niet aan een uitleg voor partities, dus werkt Euler het niet uit.

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\ \ etc.$$

wordt uitgeschreven door praktische vermenigvuldiging, zijn de getallen van de factoren of eindig, of oneindig, zodat de vorm zodanig naar voren komt:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+etc.$$

De coëfficiënt van de tweede term A zal de som zijn van alle hoeveelheden a, b, c, d, e, etc. De coëfficiënt B zal waarlijk de som zijn van de producten uit telkens twee ongelijke van deze hoeveelheden. De coëfficiënt C zal de som zijn van de producten uit telkens drie ongelijke van deze hoeveelheden en de coëfficiënt D zal de som van de producten van telkens vier van deze zelfde hoeveelheden zijn; en zo voort. Want in dergelijke producten kan dezelfde hoeveelheid, neem a, of welke dan ook maar nergens meer dan eenmaal zitten. Waarvandaan dit Lemma mij de basis verschaft voor partities in ongelijke delen.

§6. Daarentegen wordt de ongelijkheid van delen echter niet uitgesloten, ik gebruik dit Lemma: *Als deze formule*

$$\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\ etc.}$$

van de factoren, die de noemer samenstellen ,ofwel eindig is, ofwel oneindig, na het doen van uitwerken van de noemer met behulp van vermenigvuldiging, wordt het door het delen van de reeks van deze vorm:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+etc.$$

zoals A zeker de som van de hoeveelheden $a+b+c+d+e+etc$. zal zijn. Maar de coëfficiënt B zal de som van het product uit telkens twee van deze hoeveelheden zijn, niet met uitzondering van herhaling van dezelfde hoeveelheden, zal dat natuurlijk zijn:

$$B=aa+ab+bb+ac+bc+cc+ad+bd+cd+dd+ae+etc.$$

Op een vergelijkbare manier zal de coëfficiënt C de som zijn uit telkens drie van deze hoeveelheden a, b, c, d, e, etc. zonder dat gelijke delen in welk product dan ook zijn uitgesloten. En met dezelfde voorwaarde toegevoegd zal de coëfficiënt D de som zijn uit telkens vier van deze hoeveelheden, en zo verder. En van nu af aan zal dit Lemma de weg openen voor het delen van partities, waarin de gelijkheid van delen niet wordt uitgesloten.

§7. Zodat de vraag met betrekking tot het voorgelegde Probleem, niet door producten, maar door sommen van getallen, wordt opgesteld, stel ik voor dat de machten $x^p, x^q, x^r, x^s, x^t, etc$. op de plaats van de hoeveelheden a, b, c, d, e, etc. staan. Want zo komen de machten zodanig voor in producten van telkens twee uit de reeks p, q, r, s, t, etc. Op een vergelijkbare manier komen zodanig de producten van telkens drie constante[8] machten voor, waarvan de exponenten de sommen zijn van drie getallen uit dezelfde reeks p, q, r, s, etc. En de producten van telkens vier zijn machten, waarvan de exponenten toegevoegd zijn uit telkens vier van deze getallen, en zo voort. En zo zijn ze eerst genoteerd door de producten, nu worden ze overgegaan op de sommen; en zo is het zeker, dat, als dit eerdere Lemma erbij wordt gehaald, de sommen gemaakt worden uit zoveel ongelijke delen, als echter dit latere Lemma in gebruik wordt geroepen, wordt de gelijkheid van delen niet uitgesloten. Op deze manier zullen beide Lemma's naar de oplossing van de eerder vermelde vragen moeten worden aangepast.

§8. We beginnen dan aan deze eerste vraag:

[8] De exponent is altijd een constante en voor x vullen we nooit iets in, dus een desbetreffende macht heeft altijd dezelfde identiteit.

Uitvinden op hoeveel verschillende wijzen het gegeven getal N kan worden gedeeld in p *delen, die onderling ongelijk zijn:*

Aangezien hierbij alle gehele, positieve getallen passend zijn om delen samen te stellen, moet voor de reeks van eerder genoemde exponenten de reeks van positieve gehele getallen wordt genomen: $1, 2, 3, 4, 5, 6, etc$. Dus wordt het tweede Lemma eerder gevormd tot deze vorm:

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\ etc.$$ [9]

tot in het oneindige, die, na het uitvoeren van vermenigvuldiging is ingezet, wordt ontwikkeld tot deze reeks:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

ook zal zijn:

$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + etc.$$

omdat die x is toegevoegd aan alle machten. Vervolgens, omdat B de som van producten van telkens twee ongelijke termen van de reeks A is, zal B de som zijn van alle machten van x, waarvan de exponenten opgeteld zijn uit twee ongelijke getallen en, omdat dezelfde macht vaker kan voorkomen, zal ze een bepaalde numerieke aanduiding hebben, namelijk,op hoeveel manieren ze het product kan zijn uit twee termen van de reeks A; of op hoeveel verschillende manieren de exponent van x de som kan zijn van twee ongelijke delen. Door het vermenigvuldigen van telkens twee van de reeks A wordt echter bij deze zaak gevonden:

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + etc.$$

Een willekeurige coëfficiënt van deze reeks toont aan, op hoeveel verschillende manieren de exponent van de macht van de desbetreffende x in twee ongelijke delen kan worden opgedeeld.[10] Omdat deze reeks tot in het oneindige doorgaat, met hulp van het later zoeken van de regelmaat, wordt het geval val het voorgelegde Probleem opgelost, waarin een partitie in twee delen wordt verlangd.

§9. Vervolgens zal de hoeveelheid C bestaan uit een reeks van de machten van juist x, omdat het alle producten omvat, die verschijnen door het vermenigvuldigen van telkens afwisselend drie ongelijke termen van de reeks A, waarvan de exponenten de som zijn van drie ongelijke getallen. En dezelfde komt zo vaak voor in die serie C, zo vaak als de exponent zal kunnen resulteren uit drie onderlinge getallen door op te tellen, en ontdekt wordt:

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + etc.$$

Iedere willekeurige coëfficiënt van deze reeks toont aan, op hoeveel verschillende manieren de exponent van de macht van juist de desbetreffende x in drie onderling ongelijke delen kan worden gedeeld, zo wordt uit de term $8x^{13}$ afgeleid dat het getal 13 op 8 diverse manieren in drie ongelijke delen kan worden gescheiden, die zijn:

$$\begin{array}{l|l} 13 = 1 + 2 + 10 & 13 = 2 + 3 + 8 \\ 13 = 1 + 3 + 9 & 13 = 2 + 4 + 7 \\ 13 = 1 + 4 + 8 & 13 = 2 + 5 + 6 \\ 13 = 1 + 5 + 7 & 13 = 3 + 4 + 6 \end{array}$$

[9] Zie de bijlage aan het eind van het document voor een nadere toelichting.
[10] *Neem bijvoorbeeld* $3x^8$ *, 8 kan op 3 manieren in 2 ongelijke delen worden gedeeld.*

Dus de reeks C, die in het oneindige doorgaat, zal zorgen voor het delen van alle getallen in drie ongelijke delen.

§10. Verder zal de hoeveelheid D, omdat het alle producten uit telkens vier ongelijke termen van de reeks:

$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$$

bevat, bestaan uit de reeks van de machten van x, waarvan de exponenten bestaan uit vier onderling ongelijke getallen; en in deze reeks zal welke macht dan ook zodanig de coëfficiënt hebben, die aantoont, op hoeveel verschillende manieren de exponent van deze door optellen van vier onderling ongelijke getallen kan resulteren. Verder wordt ontdekt:

$$D = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + etc.$$

Deze reeks, die in het oneindige doorgaat, toont dus aan, op hoeveel verschillende manieren ieder getal de som van vier ongelijke getallen kan zijn. Namelijk uit term $9x^{16}$ wordt geleerd dat het getal 16 op negen manieren kan worden gedeeld in vier ongelijke delen.

§11. Als we verder op deze manier doorgaan, zal duidelijk zijn dat de letter E zo ongeveer vergelijkbare reeks van machten van x is, zodat de coëfficiënt van welke term dan ook aangeeft, op hoeveel verschillende manieren de exponent van x in vijf ongelijke delen kan worden gedeeld. Dat is verder:

$$E = x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + etc.$$

Op een vergelijkbare manier zal de waarde van de letter F de reeks zijn, die zorgt voor partities in zes ongelijke delen, en de letters $G, H, I, etc.$ hebben betekenis voor de partities in respectievelijk zeven, acht, negen etc. delen, en ze zijn:

$$F = x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + etc.$$

$$G = x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + etc.$$

$$etc.$$

Vanwaar duidelijk wordt gezien dat de exponent van de eerste term van iedere reeks een trigonaal[11] getal van het voorgestelde aantal delen is: dan is de coëfficiënt van deze werkelijk zo 1, net als dat de coëfficiënt van de tweede term 1 is. Zo wordt de berekening daarvan makkelijk begrepen: want het kleinste getal, dat de som van zeven getallen, die onderling ongelijk zijn, is, is zeker:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2} \times 7 \times 8$$

= bestaand uit deze zeven delen en een trigonaal getal: en dit getal, en tegelijk ook de volgende, vergroot met één, kan niet op meer dan één manier worden gedeeld in zeven ongelijke delen.[12]

§12. Het gehele werk komt neer op een geschikte uitdrukking van de reeksen $B, C, D, E, F, etc.$, opdat het, wat wordt gevraagd, natuurlijk het aantal partities, niet gebruikt wordt voor de opstelling van een zodanige reeks.[13] Maar de wet van de voortgang van A en B is voor het eerst zeker

---

[11] Een getal van de vorm $\frac{m^2+m}{2}$

[12] Dit trigonale getal, en het getal dat erna komt (het trigonale getal + 1) kunnen niet op meer dan 1 manier in zeven ongelijke delen gedeeld worden.

duidelijk, omdat alle coëfficiënten van de eerste gelijk zijn aan enen, maar de termen van de latere reeks van gehele positieve getallen zijn dubbel[14]: maar de kleine wet van de volgende reeksen is duidelijk, en tot hoever we ze hier uitbreiden, stellen we de coëfficiënten van elk exponent uit deze vast met partities. En zo moeten op een andere manier de waarden van de letters $A, B, C, D, etc.$ worden uitgezocht, vanwaar dit onderzoek opkomt:

De waardes uitzoeken van de letters $A, B, C, D, E, etc.$ zo dat het de som is van deze reeks:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

gelijk zal hij van deze vorm worden:

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\ etc.$$ [15]

De verbinding in het eindige, die tussen deze twee vormen optreedt, moet dus worden onderzocht, en zo moet de andere worden veranderd, als de verandering in de andere wordt opgesteld.

§13. Omdat van beide vormen de waarde s hetzelfde is, blijven beide onderling gelijk, als aan beide kanten op de plaatsen van z welke andere hoeveelheid ook maar wordt geschreven. Laten we dan xz aan beide kanten op de plaatsen van z plaatsen, en laat de waarde, waarin het aan beide kanten resulteert, worden genoemd en het zal eerst zijn:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + etc.$$

maar dan zal de andere vorm worden verruild met deze:

$$t = (1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\ etc.$$

deze is de latere waarde van t, als hij wordt vergeleken met de latere waarde van s, waardoor was gebleken:

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)\ etc.$$

spoedig zal blijken dat $s = (1 + xz)t$. Omdat ook dat verband in andere waarden van de plaatsen van s en t moet hebben, zal het ons de vergelijking tonen:

$$\begin{array}{r} s=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+etc.= \\ \hline (1+xz)t=1+Axz+Bx^2z^2+Cx^3z^3+Dx^4z^4+etc. \\ +\ \ xz+Ax^2z^2+Bx^3z^3+Cx^4z^4+etc. \end{array}$$

Vanwaar, door het gelijkstellen van de onderling gelijke termen, wordt:

$$A = \frac{x}{1-x}$$

[13] We zoeken partities, dus we hebben er niks aan om te zeggen dat een partitie even groot is als zichzelf.
[14] *Van de coëfficiënten van reeks B zijn er telkens twee gelijk*
[15] Zie wederom de bijlage voor nadere toelichting.

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$
$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

etc.

§14. De reeksen die boven voor de letters $A, B, C, D, E, etc.$ verschijnen, ontstaan uit het uitwerken van de breuken, die we hier vinden, vanwaar bekend is, dat de reeks A meetkundig is, stellig $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + etc.$ die, omdat hij zeker zeer helder is, aantoont dat ieder getal op één manier uit een geheel getal kan bestaan. Maar de overgebleven reeksen $B, C, D, E, etc.$ zijn recursief, waarvan een onderling verband duidelijk zal zijn uit een uitgewerkte noemer van welke breuk dan ook, door vermenigvuldiging. Om dit aan te tonen verwaarlozen we intussen de teller, die de machten zijn van x, waarvan de exponenten trigonale getallen zijn, op de plaats daarvan schrijven we een één. Laat dus zijn.

$$\frac{A}{x} = 1 + \alpha' x + \beta' x^2 + \gamma' x^3 + \delta' x^4 + \varepsilon' x^5 + \cdots + \nu' x^V = \mathfrak{A}$$

$$\frac{B}{x^3} = 1 + \alpha'' x + \beta'' x^2 + \gamma'' x^3 + \delta'' x^4 + \varepsilon'' x^5 + \cdots + \nu'' x^V = \mathfrak{B}$$

$$\frac{C}{x^6} = 1 + \alpha''' x + \beta''' x^2 + \gamma''' x^3 + \delta''' x^4 + \varepsilon''' x^5 + \cdots + \nu''' x^V = \mathfrak{C}$$

$$\frac{D}{x^{10}} = 1 + \alpha^{IV} x + \beta^{IV} x^2 + \gamma^{IV} x^3 + \delta^{IV} x^4 + \varepsilon^{IV} x^5 + \cdots + \nu^{IV} x^V = \mathfrak{D}$$

$$\frac{E}{x^{15}} = 1 + \alpha^{V} x + \beta^{V} x^2 + \gamma^{V} x^3 + \delta^{V} x^4 + \varepsilon^{V} x^5 + \cdots + \nu^{V} x^V = \mathfrak{E}$$

$$\frac{F}{x^{21}} = 1 + \alpha^{VI} x + \beta^{VI} x^2 + \gamma^{VI} x^3 + \delta^{VI} x^4 + \varepsilon^{VI} x^5 + \cdots + \nu^{VI} x^V = \mathfrak{F}$$

etc.

§15. Dus de oplossing van deze vraag wordt teruggebracht tot het vinden van de reeksen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, etc.$, waarvan duidelijk is dat ze alleen recursief zijn. En althans de reeks $\mathfrak{A}$ eerst meetkundig is, omdat geldt $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, maar $\alpha' = 1, \beta' = 1, \gamma' = 1, \delta' = 1, etc.$, dat is op zich duidelijk. De reeks $\mathfrak{B}$ zal verder recursief zijn, omdat geldt $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$, omdat het onderlinge verband bestaat uit $+1, +1, -1$.

Vandaar zal zijn:

$$\alpha'' = 1,$$
$$\beta'' = \alpha'' + 1$$
$$\gamma'' = \beta'' + \alpha'' - 1$$

$$\delta'' = \gamma'' + \beta'' - \alpha''$$
$$\varepsilon'' = \delta'' + \gamma'' - \beta''$$
$$\zeta'' = \varepsilon'' + \delta'' - \gamma''$$
$$etc.$$

Op een vergelijkbare manier zal de reeks van $\mathfrak{C}$ wegens $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$ recursief zijn en het onderlinge verband hebben $+1, +1, 0, -1, -1, +1$. Vandaar zal zijn:

$$\alpha''' = 1,$$
$$\beta''' = \alpha''' + 1$$
$$\gamma''' = \beta''' + \alpha''' + *$$
$$\delta''' = \gamma''' + \beta''' + * -1$$
$$\varepsilon''' = \delta''' + \gamma''' + * - \alpha''' + 1$$
$$\zeta''' = \varepsilon''' + \delta''' + * - \beta''' + \alpha''' + 1$$
$$\eta''' = \zeta''' + \varepsilon''' + * - \gamma''' - \beta''' + \alpha'''$$
$$\theta''' = \eta''' + \zeta''' + * - \delta''' - \gamma''' + \beta'''$$ [16]
$$etc.$$ [17]

Op dezelfde manier wordt duidelijk gezien dat de volgende reeksen recursief zijn, en op deze manier kunnen de onderlinge verbanden van afzonderlijke termen worden toegedeeld. Hoewel deze reeksen op deze manier niet mogelijk kunnen worden gevormd, zal ik toch spoedig, als deze berekening achtergebleven is, een nog aangepastere manier tonen, ook al moeten ze van deze reeks gevormd worden uit een vorige, als het observeren van de meeste situaties zal zijn medegedeeld.

§16. Omdat geldt:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)},$$

is het duidelijk in de uitgeschreven reeks, dat de macht van x zo vaak moet voorkomen, zo vaak als deze uit de machten x^3, x^4 door vermenigvuldiging kan ontstaan, of zo vaak als de exponent van x uit de getallen 1 en 2 kan worden gemaakt door op te tellen. Omdat zo geldt:

$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \cdots + \nu'' x^n$$

wordt uit de term $3x^4$ begrepen, dat het getal 4 op drie manieren uit de getallen 1 en 2 door optellen kan ontstaan, die zijn $4 = 1 + 1 + 1 + 1$; $4 = 1 + 1 + 2$; $en\ 4 = 2 + 2$. Dus bij het bekijken op deze manier van de coëfficiënt $\nu'' x^n$, zal ν'' tonen, op hoeveel manieren de exponent n uit de getallen 1 en 2 door optellen kan worden gemaakt. Omdat dus geldt $B = \mathfrak{B}x^3$, zal deze term $\nu'' x^{n+3}$, omdat hij aantoont, dat het getal $n + 3$ op zoveel verschillende manieren in twee ongelijke delen kan worden gedeeld, als hoeveel enen de coëfficiënt ν'' in zich bevat, in de reeks B plaatshebben, en is duidelijk, dat het getal $n + 3$ op zoveel manieren in twee ongelijke delen kan worden verdeeld, als op hoeveel manieren het getal n uit de getallen 1 en 2 door optellen kan worden gemaakt.

§17. Vervolgens, omdat geldt

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

[16] In het manuscript staat een ε op de plek van de ζ en in de regel erboven een θ in plaats van de γ, maar dat is natuurlijk niet goed.
[17] Zie wederom de bijlage voor extra toelichting.

is duidelijk dat welke macht ook van x zo vaak moet voorkomen in de reeks $\mathfrak{C}$, als hij uit de machten van x^1, x^2, x^3 door vermenigvuldiging kan ontstaan, of wat hetzelfde is, als de exponent van deze x uit de getallen 1, 2, 3 door optellen gemaakt kan worden.

Omdat zo geldt:

$$\mathfrak{C} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \cdots + \nu'''x^n$$

wordt uit $5x^5$, uit welke term ook maar van deze, opgemerkt, dat de exponent op vijf manieren uit de getallen 1, 2, 3 door optellen kan worden gemaakt, die zijn:

$$5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\ ;\ 5 = 1 + 1 + 1 + 2\ ;\ 5 = 1 + 1 + 3\ ;$$
$$5 = 1 + 2 + 2\ ;\ 5 = 2 + 3.$$

Verder, bij het bekijken op deze manier van de term $\nu'''x^n$, zal de coëfficiënt tonen, op hoeveel verschillende manieren het getal n uit de getallen 1, 2, 3 door optellen kan worden gemaakt. Omdat eerder genoemd geldt: $C = \mathfrak{C}x^6$, zal deze term $\nu'''x^{n+6}$, waardoor wordt aangetoond dat het getal $n + 6$ op zoveel manieren, als hoeveel enen worden omvat in de coëfficiënt ν''', in drie ongelijke delen kan worden gedeeld. Vanwaar onmiddellijk volgt, dat het getal $n + 6$ op net zoveel manieren in drie ongelijke delen kan worden gedeeld, als het getal n uit de getallen 1, 2, 3, door optellen kan worden gemaakt.[18]

§18. Het is niet nodig, om deze berekening langer te behandelen, omdat hierdoor al in overvloed wordt ingezien, dat welk getal $n + 10$ dan ook op zoveel manieren in vier ongelijke delen kan worden gedeeld, als dat het getal n uit deze vier getallen 1, 2, 3, 4, door optellen kan worden gemaakt. Op een vergelijkbare manier zal elk getal $n + 15$ gedeeld kunnen zijn op zoveel verschillende manieren in vijf ongelijke delen, als dat het getal n uit deze vijf getallen 1, 2, 3, 4, 5 door optellen kan worden gemaakt. In het algemeen zal het getal $n + \frac{m(m+1)}{2}$ dan op zoveel verschillende manieren in m ongelijke delen gedeeld kunnen zijn, als dat het getal n op verschillende manieren uit deze getallen 1, 2, 3, 4 … … m door optellen kan worden gemaakt. Maar indien wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal N in m ongelijke delen kan worden gedeeld, wordt het antwoord gevonden, als het aantal van deze gevallen wordt onderzocht, waar het getal $N - \frac{m(m+1)}{2}$ uit de getallen 1, 2, 3, 4 … … m door optellen gemaakt kan worden.[19]

§19. Op deze manier wordt dus de oplossing van de voorgestelde vraag over partities van elk getal, in hoeveel ongelijke delen het mogelijk geweest zal zijn, herleid tot de oplossing van een ander Probleem, dat we al hiervoor hebben besproken waarin wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren elk getal uit enkele termen van deze rekenkundige reeks 1, 2, 3, 4, 5, *etc*. kan worden gemaakt door optellen. Als deze latere vraag opgelost is, wordt tegelijkertijd de eerste opgelost. We halen er nieuwe notaties bij om de vorm weer aan te passen, zodat we dit duidelijker uitleggen. Deze notatie maakt dan duidelijk:

- dat $n^{(2)}$ een getal is in de gevallen, waarin het getal n uit twee getallen 1, 2 door optellen kan worden gevormd.
- Het toont aan dat het getal $n^{(3)}$ in de gevallen, waarin het getal n uit deze getallen 1, 2, 3 door optellen kan worden gevormd.

---

[18] *Op de plaats van n stond in het manuscript 6, dit is natuurlijk vreemd en kan niet goed zijn.*
[19] Dit volgt overigens m.b.v. een Ferrers diagram.

- En het toont aan dat het getal $n^{(m)}$ in de gevallen, waarin het getal n uit de getallen $1, 2, 3, \ldots, m$ door optellen kan worden gemaakt.

Omdat dat de waarden van zulke tekens bekend zullen zijn, zullen we vervolgens dit aantonen, het voorgelegde Probleem wordt zo opgelost. Als natuurlijk wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal N in m ongelijke delen wordt gedeeld; het gevraagde getal wordt in deze gevallen uitgedrukt in deze vorm $\left(N - \frac{m(m+1)}{2}\right)^{(m)}$, waardoor immers wordt aangetoond, op hoeveel verschillende manieren het getal $N - \frac{m(m+1)}{2}$ uit deze getallen $1, 2, 3, \ldots, m$ door optellen kan worden gemaakt.

§20. De oplossing van het andere Probleem, dat voorgelegd is door de zeer beroemde Naude, wordt ook herleid tot deze zelfde vraag, waarom dit nuttig is, en dit Probleem heb ik eerder opgelost dan wij een betere uitwerking van de zojuist erbij gehaalde notatie opnemen, want zo lossen wij drie Problemen op, die onderling zeer verschillend lijken, met éénzelfde klus.
Het Probleem luidt zo:

Uitvinden op hoeveel verschillende manieren het gegeven getal N kan worden gedeeld in p delen, waarbij de gelijkheid van de delen niet is uitgesloten.

Aangezien hier de gelijkheid van delen niet wordt uitgesloten, zal de volgende uitdrukking worden onderzocht, die de oplossing van die vraag bevat.

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ etc.}}$$ [20]

die, volgens de machten van z uitgewerkt, deze reeks bevat:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

en zal de coëfficiënt A, zoals we in §VI aangaven, de som zijn van alle termen van deze reeks $x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc.$ of $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + etc.$ die dezelfde reeks is, die we in de oplossing van het voorgaande Probleem verkregen voor de letter A.

§21. Verder is B zeker de som van de producten uit telkens twee termen uit de serie A, kwadraten van dezelfde termen niet uitgesloten. Daarom zal B de som zijn van alle machten van x, waarvan de exponenten bestaat uit twee getallen, ofwel gelijk, ofwel ongelijk: en omdat dezelfde macht op deze manier vaker kan voorkomen, zal hij een bepaalde aanduiding hebben, namelijk, op hoeveel manieren deze macht het product is uit telkens twee termen uit de reeks A; of op hoeveel verschillende manieren de exponent van deze de som kan zijn van twee getallen, zowel gelijk, als ongelijk.
Uit deze bron wordt gevonden:

$$B = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + etc.$$

waarvan iedere exponent van de reeks toont op hoeveel verschillende manieren de exponent van de macht van de desbetreffende x in twee delen kan worden gedeeld.
Deze reeks, die in het oneindige doorgaat, van het geval van het voorgelegde Probleem, waarin een partitie in twee delen wordt gevraagd, wordt makkelijk opgedeeld.

§22. Verder, omdat hij alle producten bevat, die ontstaan door telkens drie, ofwel gelijke, ofwel ongelijke termen uit de reeks A te vermenigvuldigen, zal de hoeveelheid C bestaan uit de reeks van de

[20] Zie de bijlage voor extra toelichting.

machten van x, waarvan de exponenten de som zijn van afwisselend drie positieve gehele getallen. En dezelfde macht x^n komt zo vaak voor in de reeks C, als dat de exponent n van deze term uit telkens drie getallen, die ofwel gelijk, ofwel ongelijk zijn, door optellen kan resulteren. Verder zal zijn:

$$C = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + etc.$$

waarvan iedere coëfficiënt van de reeks aantoon, op hoeveel manieren de exponent van de macht van de desbetreffende x in drie delen, ofwel gelijk, of ongelijk zijn, kan worden gedeeld. Zo wordt uit de term $8x^{10}$ afgeleid, dat het getal 10 op acht diverse manieren in drie delen gedeeld kan worden, die partities zijn:

$$\begin{array}{l|l} 10 = 1 + 1 + 8 & 10 = 2 + 2 + 6 \\ 10 = 1 + 2 + 7 & 10 = 2 + 3 + 5 \\ 10 = 1 + 3 + 6 & 10 = 2 + 4 + 4 \\ 10 = 1 + 4 + 5 & 10 = 3 + 3 + 4 \end{array}$$

Deze reeks C, die in het oneindige doorgaat, is dus dienstbaar voor het delen van alle getallen in drie delen.

§23. Op een vergelijkbare manier de hoeveelheid D, omdat die alle producten uit vier termen van de reeks $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$ bevat, als herhaling van dezelfde term niet is uitgesloten: Hij zal bestaan uit de reeks van de machten van x, waarvan de exponenten bestaan uit vier getallen, die of gelijk, of ongelijk zijn. In deze reeks zal iedere macht van een zodanige x dus een coëfficiënt hebben, die toont, op hoeveel verschillende manieren de exponent door optellen van 4 getallen kan resulteren. Verder wordt hierdoor gevonden:

$$D = x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + etc.$$

Deze reeks, die in het oneindige doorgaat, toont dus, op hoeveel verschillende manieren ieder getal in vier delen kan worden gedeeld. Zo wordt uit de term $9x^{10}$ geconcludeerd dat het getal 10 op negen manieren in vier delen kan worden gedeeld. Namelijk, deze partities zijn:

$$\begin{array}{r|l} 10 = 1 + 1 + 1 + 7 & 10 = 1 + 2 + 2 + 5 \\ 10 = 1 + 1 + 2 + 6 & 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ 10 = 1 + 1 + 3 + 5 & 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ 10 = 1 + 1 + 4 + 4 & 10 = 2 + 2 + 2 + 4 \end{array}$$
$$10 = 2 + 2 + 3 + 3$$

§24. Door het voortgaan op deze manierzal verdernog zijn, dat de letter E zo de reeks samengesteld zal zijn uit de machten van x, dat de coëfficiënt van welke term dan ook aantoont, op hoeveel verschillende manieren de exponent van x in vijf delen kan worden gedeeld. Verder zal gelden:

$$E = x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + etc.$$

Op een gelijke manier zal de waarde van de letter F de reeks zijn, die zorgt voor partities in zes delen, en de waarden van de letters $G, H, I, etc.$ gelden voor partities in respectievelijk zeven, acht, negen, etc. delen, verder geldt:

$$F = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + etc.$$
$$G = x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + etc.$$
$$etc.$$

Als deze reeksen met die worden vergeleken, die we in de oplossing van het eerder genoemde Probleem voor dezelfde letters vinden, zal spoedig blijken dat al het onderscheid slechts in de macht van x staat, en dat de beide corresponderende coëfficiënten vergelijkbaar voortgaan. Opdat wij niet door uitschrijven verder naar een zekere plek gaan, overwinnen we die overeenstemming met de volgende demonstratie.

§25. Laten we de twee eerdergenoemde waardes van s bekijken, die zijn:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ etc.}$$

die, als xz overal op de plaats van z wordt geplaatst, afwezig zijn in t en dan geldt:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5\ etc.$$

$$t = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ etc.}$$

vanwaar, als de latere waarden van s en t afwisselend worden vergeleken, spoedig duidelijk is: $s = \frac{t}{1-xz}$, of $t = (1-xz)s$, wat duidelijk hetzelfde verband zal zijn, omdat het ook de plaats moet innemen tussen de eerdere waarden van de letters s en t:

$$\begin{aligned} &t=1+Axz+Bx^2z^2+Cx^3z^3+Dx^4z^4+Ex^5z^5\ etc.= \\ \hline &(1-xz)s=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+etc. \\ &\qquad -xz-Axz^2-Bxz^3-Cxz^4-Dxz^5+etc. \end{aligned}$$

Vanwaar door gelijksoortige termen te vergelijken wordt gevonden:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{1-x} \\ B &= \frac{Ax}{1-xx} = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \\ C &= \frac{Bx}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \\ D &= \frac{Cx}{1-x^4} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

§26. Uit deze formules wordt begrepen, dat deze reeksen niet alleen ook recursief zijn, zoals de eerdergenoemde, maar ook dat beide van coëfficiënten dezelfde regelmaat hebben. Opdat, als de tellers verwaarloosd zijn, daarom geldt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{1-x} & A &= \mathfrak{A}x \\ \mathfrak{B} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} & B &= \mathfrak{B}x^2 \\ \mathfrak{C} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} & C &= \mathfrak{C}x^3 \\ \mathfrak{D} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} & D &= \mathfrak{D}x^4 \\ &etc. & &etc. \end{aligned}$$

Een partitie van elk getal in zoveel delen, die ofwel gelijk, ofwel ongelijk zijn, hangt af van de vorm van de reeksen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, etc.$, die, zoals we eerder hebben gezien, aantonen op hoeveel verschillende manieren ieder getal uit een aantal oorspronkelijke termen van deze reeks $1, 2, 3, 4, 5, etc.$ door optellen kan worden gemaakt. Omdat zo geldt: $B = \mathfrak{B}x^2$, kan elk getal $n + 2$ op net zoveel manieren in twee delen worden gedeeld worden, als het getal n uit de getallen 1 en 2 door optellen kan worden gemaakt. Op gelijke wijze, omdat geldt: $C = \mathfrak{C}x^3$, wordt het getal $n + 3$ op zoveel manieren in drie delen gedeeld, als het getal n uit de getallen 1, 2, 3 kan worden samengesteld. En in het algemeen kan het getal $n + m$ op zoveel verschillende manieren gedeeld worden in m, ofwel gelijke, ofwel ongelijke, delen, als het getal n uit de getallen $1, 2, 3, \dots, m$ door optellen kan worden gemaakt.[21]

§27. Dit Probleem hangt dus ook af van de oplossing van de vraag, waarin gevraagd wordt, op hoeveel verschillende wijzen een gegeven getal uit zoveel oorspronkelijke termen van deze reeks $1, 2, 3, 4, etc.$ door optellen kan ontstaan. Als het dus zo is, zoals eerder genoemd deze formule van het schrijven, $N^{(m)}$, het aantal manieren aangeeft, waarop het getal N uit de getallen $1, 2, 3, \dots, m$ door optellen kan worden samengesteld, of waarop het getal N in hoeveel delen ook kan worden gedeeld, waarvan geen groter getal groter is dan m; dit voorgelegde Probleem zal ook door de notatie van deze manier opgelost kunnen worden. Natuurlijk zal $n^{(m)}$ aantonen op hoeveel verschillende manieren het getal $n + m$ in m, ofwel gelijke, ofwel ongelijke, delen kan worden gedeeld, zal de formule $(N - m)^{(m)}$ het aantal gezochte manieren aantonen. Als dit Probleem dus bij het vorige wordt samengevoegd, zal duidelijk zijn, dat het getal $n + m$ op zoveel manieren in m delen, die of gelijk, of ongelijk zijn, kan worden gedeeld, als het getal $n + \frac{m(m+1)}{2}$ in m ongelijke delen kan worden gedeeld.

§28. De oplossing van beide Problemen, die voorgelegd zijn door de zeer bekende Naude, wordt hiertoe herleid, opdat bepaald wordt, op hoeveel verschillende manieren ieder getal n uit deze $1, 2, 3 \dots \dots m$ door opsomming kan worden gemaakt; of opdat de waarde van de notatie $n^{(m)}$ wordt onderzocht. Daarom kan dus dit nieuwe Probleem uit de al eerder verzonnen formules zeer gemakkelijk worden afgeleid, wat we zo zullen zien. En eerst zal, als geldt $m = 1$, omdat ieder getal op een unieke manier uit alleen maar enen door optellen kan ontstaan, zeker gelden $n^{(1)} = 1$, omdat dezelfde eerste formule $\mathfrak{A}=\frac{1}{1-x}$, of de reeks daarvan gevormd: $\mathfrak{A}=1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + etc.$, dat duidelijk toont.

§29. Aangezien de reeks $\mathfrak{B}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ toont, op hoeveel verschillende manieren ieder getal uit de getallen 1 en 2 door optellen kan worden gevormd, zal in die reeks de coëfficiënt van de macht x^n gelijk zijn aan $n^{(2)}$, want deze uitdrukking is aangesteld om aan te duiden, op hoeveel manieren het getal n uit de getallen 1 en 2 door optellen kan ontstaan. Hierom zal dus gelden:

$$\mathfrak{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \ etc.$$

en naar vergelijkbaarheid van deze uitdrukking zal gelden

$$\mathfrak{A} = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \ etc.$$

Maar vervolgens, omdat geldt:

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{1-x} \text{ en } \mathfrak{B}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)},$$

zal gelden:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(1-x^2),$$

vanwaar het volgende verband tussen deze reeksen opkomt:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{A} & = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \ etc. \\ \left.\begin{array}{r} +\mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B}\,x^2 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \ etc. \\ \qquad\qquad - x^2 - 1^{(2)}x^3 - 2^{(2)}x^4 - 3^{(2)}x^5 - 4^{(2)}x^6 - \ etc. \end{array} \end{array}$$

[21] Wederom te bewijzen met een Ferrers diagram.

Maar als een vergelijking van de gelijksoortige termen hieruit wordt opgesteld, zal gelden:

$$\begin{array}{l|l|l} 1^{(2)} = 1^{(1)} & 4^{(2)} = 4^{(1)} + 2^{(2)} & 7^{(2)} = 7^{(1)} + 5^{(2)} \\ 2^{(2)} = 2^{(1)} + 1 & 5^{(2)} = 5^{(1)} + 3^{(2)} & 8^{(2)} = 8^{(1)} + 6^{(2)} \\ 3^{(2)} = 3^{(1)} + 1^{(2)} & 6^{(2)} = 6^{(1)} + 4^{(2)} & 9^{(2)} = 9^{(1)} + 7^{(2)} \end{array}$$

§30. Over het algemeen zal dan gelden $n^{(2)} = n^{(1)} + (n-2)^{(2)}$.[22] Omdat dus geldt: $n^{(1)} = 1$, zal gelden $n^{(2)} = 1 + (n-2)^{(2)}$; en zo zullen de coëfficiënten van de reeks $\mathfrak{B}$ bepaald worden, opdat elke laatste term gelijk is aan de voorlaatste, vermeerderd met één. Of, omdat de reeks $\mathfrak{A}$ alle coëfficiënten, enen, is,[23] zal uit de reeks $\mathfrak{A}$ op de volgende manier reeks $\mathfrak{B}$ worden gevormd.

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + etc. \\ \qquad\qquad 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4\,^{24} \\ \hline \mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + etc. \end{array}$$

Natuurlijk, omdat de twee aanvankelijke termen $1 + x$ van de reeks $\mathfrak{B}$ vaststaan, worden ze onder de derde en vierde termen van de reeks $\mathfrak{A}$ geschreven, en van hieruit ontstaan door optellen de derde en vierde termen van de reeks $\mathfrak{B}$, die verder onder de vijfde en zesde termen van de reeks $\mathfrak{A}$ geschreven en opgeteld de vijfde en zesde term van de reeks $\mathfrak{B}$ zullen geven, en op deze manier vordert de reeks $\mathfrak{B}$, tot hoever het nodig zal zijn, gemakkelijk. Het echter hiervan af dat geldt: $n^{(2)} = \frac{1}{2}\left(n \begin{smallmatrix} +1 \\ +2 \end{smallmatrix}\right)$, als natuurlijk n een oneven getal is, zal gelden: $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n+1)$, of als echter n een even getal is, zal gelden: $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n+2)$.

§31. Omdat verder geldt

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

zal gelden

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\,(1 - x^3),$$

vanwaar, omdat een algemene term van de reeks $\mathfrak{C}$ $n^{(3)}x^n$ is, wordt het volgende verband tussen de reeksen $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$ geboren:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{B} & = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + etc. \\ \left.\begin{array}{r} +\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C}\,x^2 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} = 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + etc. \\ \qquad\qquad\qquad - 1x^3 - 1^{(3)}x^4 - 2^{(2)}x^5 - 3^{(3)}x^6 - etc.\ ^{25} \end{array} \end{array}$$

Als deze vergelijking al tussen de gelijksoortige termen wordt geplaatst, zal gelden:

$$\begin{array}{l|l|l} 1^{(3)} = 1^{(2)} & 4^{(3)} = 4^{(2)} + 1^{(3)} & 7^{(3)} = 7^{(2)} + 4^{(3)} \\ 2^{(3)} = 2^{(3)} & 5^{(3)} = 5^{(2)} + 2^{(3)} & 8^{(3)} = 8^{(2)} + 5^{(3)} \\ 3^{(3)} = 3^{(2)} + 1 & 6^{(3)} = 5^{(2)} + 3^{(3)} & 9^{(3)} = 9^{(2)} + 6^{(3)} \end{array}$$

en algemeen: $n^{(3)} = n^{(2)} + (n-3)^{(3)}$

De reeks $\mathfrak{C}$ wordt dus uit de reeks $\mathfrak{B}$ en zijn voorgaande termen op de volgende manier gemakkelijk gevormd. Laten we echter de machten van x laten vervallen, omdat het gehele werk op coëfficiënten berust:

[22] *In het manuscript staat $n^{(2)}$, wat uit de context duidelijk $n^{(1)}$ moet zijn.*

[23] Alle coëfficiënten in $\mathfrak{A}$ zijn 1.

[24] *We beschouwen alleen de coëfficiënten.*

[25] *Op deze regel stond in het manuscript de vorige regel ook, maar uit de context bleek dat ongeldig.*

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{B} = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + etc. \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 \\
\hline
\mathfrak{C} = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + etc.
\end{array}$$

Natuurlijk wordt de reeks $\mathfrak{C}$ onder de reeks $\mathfrak{B}$ geschreven, door het aanvankelijk onder de vierde term te zetten, en zoals de reeks $\mathfrak{C}$ ontstaat op grond van deze manier, zo zal hij ook onder reeks $\mathfrak{B}$ worden samengevoegd.

§32. Omdat vervolgens geldt

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$

zal gelden

$$\mathfrak{C} = (1 - x^4)\mathfrak{D}.$$

Vandaar wordt op een vergelijkbare manier, zoals we er nu al gewend aan zijn, gevonden:

$$\begin{array}{r|r|l}
1^{(4)} = 1^{(3)} & 4^{(4)} = 4^{(3)} + 1 & 7^{(4)} = 7^{(3)} + 3^{(4)} \\
2^{(4)} = 2^{(3)} & 5^{(4)} = 5^{(3)} + 1^{(4)} & 8^{(4)} = 8^{(3)} + 4^{(4)} \\
3^{(4)} = 3^{(3)} & 6^{(4)} = 6^{(3)} + 2^{(4)} & 9^{(4)} = 9^{(3)} + 5^{(4)}
\end{array}$$

en in het algemeen: $n^{(4)} = n^{(3)} + (n-4)^{(4)}$

Op een gelijke manier wordt door het voortzetten geconcludeerd dat verder zal gelden:

$$\begin{aligned}
n^{(5)} &= n^{(4)} + (n-5)^{(5)} \\
n^{(6)} &= n^{(5)} + (n-6)^{(6)} \\
n^{(7)} &= n^{(6)} + (n-7)^{(7)} \\
&etc.
\end{aligned}$$

Vandaar wordt dus geconcludeerd dan in het algemeen zal gelden:

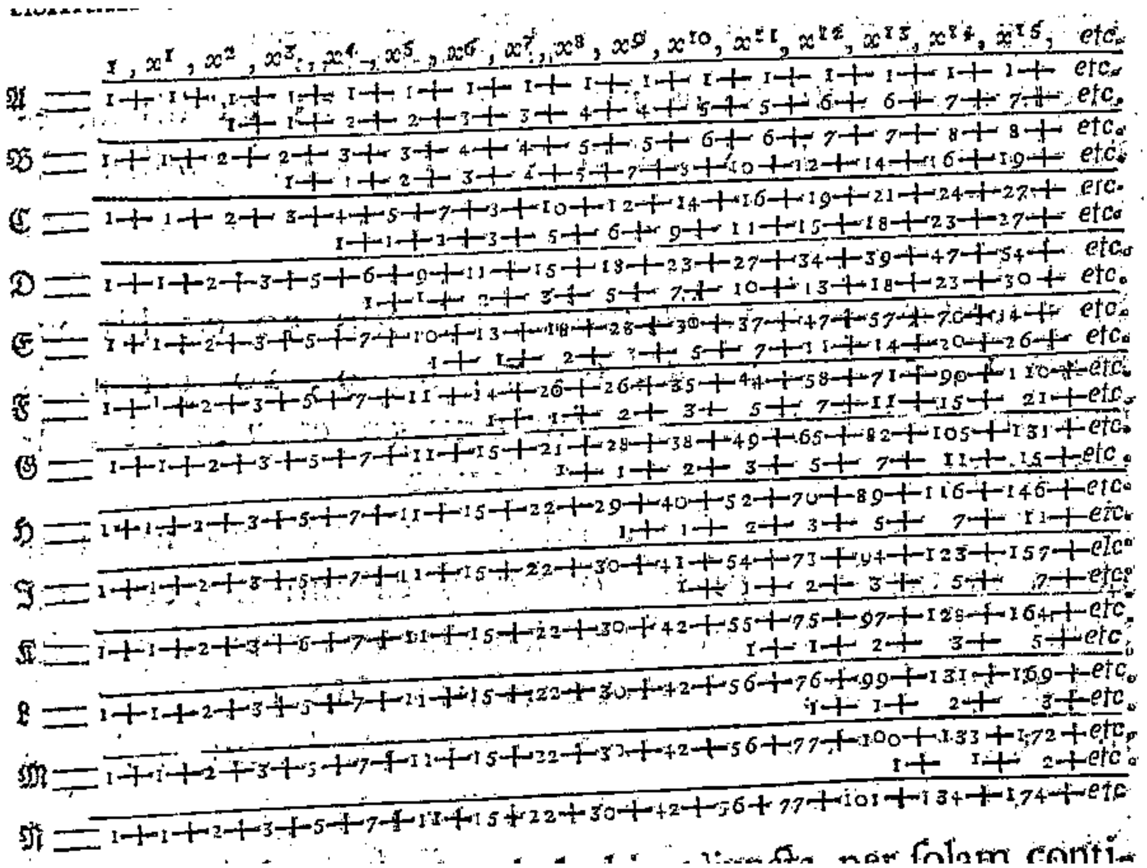
$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$ [26]

Waar moet worden opgemerkt, als $n < m$ zal hebben gegolden, dat de term $(n-m)^{(m)}$ dan voorwaarts vergaat,[27] of, echter geldt $n = m$, als ook geldt $n - m = 0$, dat de term $(n-m)^{(m)}$ toch één is. Vervolgens als geldt $n - m = 1$, zal ook gelden $(n-m)^{(m)} = 1$. Voor altijd zal $0^{(m)}$ dus zo gelden, net als $1^{(m)} = 1$, en $n^{(1)} = 1$.

§33. Als deze verbanden tussen de reeksen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. opgemerkt zijn, worden ze zeer makkelijk gevormd, en tot hoever het nodig is, vorderen ze, welke berekening door een hier toegevoegd schema duidelijk wordt.

⟦***SCHEMATISMUS***⟧ [28]

[26] In de bijlage staat weer extra uitleg.
[27] niet bestaat
[28] Schema



$1,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ x^7,\ x^8,\ x^9,\ x^{10},\ x^{11},\ x^{12},\ x^{13},\ x^{14},\ x^{15},$ etc.

𝔄 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+ etc.

1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7+7+ etc.

𝔅 = 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7+7+8+8+ etc.

1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+19+ etc.

ℭ = 1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+19+21+24+27+ etc.

1+1+3+3+5+6+9+11+15+18+23+27+ etc.

𝔇 = 1+1+2+3+5+6+9+11+15+18+23+27+34+39+47+54+ etc.

1+1+2+3+5+7+10+13+18+23+30+ etc.

𝔈 = 1+1+2+3+5+7+10+13+18+23+30+37+47+57+70+84+ etc.

1+1+2+3+5+7+11+14+20+26+ etc.

𝔉 = 1+1+2+3+5+7+11+14+20+26+35+44+58+71+90+110+ etc.

1+1+2+3+5+7+11+15+21+ etc.

𝔊 = 1+1+2+3+5+7+11+15+21+28+38+49+65+82+105+131+ etc.

1+1+2+3+5+7+11+15+ etc.

ℌ = 1+1+2+3+5+7+11+15+22+29+40+52+70+89+116+146+ etc.

1+1+2+3+5+7+11+ etc.

ℑ = 1+1+2+3+5+7+11+15+22+30+41+54+73+94+123+157+ etc.

1+1+2+3+5+7+ etc.

𝔎 = 1+1+2+3+5+7+11+15+22+30+42+55+75+97+128+164+ etc.

1+1+2+3+5+ etc.

𝔏 = 1+1+2+3+5+7+11+15+22+30+42+56+76+99+131+169+ etc.

1+1+2+3+ etc.

𝔐 = 1+1+2+3+5+7+11+15+22+30+42+56+77+100+133+172+ etc.

1+1+2+ etc.

𝔑 = 1+1+2+3+5+7+11+15+22+30+42+56+77+101+134+174+ etc.

per solam conti-

§34. Op deze manier is de hier toegevoegde tabel door alleen voortdurende optellen gemaakt, en de verhouding van de constructie is zo onderzocht door onderzoeken, dat hij door een betere uitleg niet ontbreekt. Met behulp van deze tabel wordt dus onmiddellijk dit Probleem opgelost, waarin wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren een gegeven getal n uit deze getallen $1, 2, 3 \ldots \ldots m$ door optellen kan worden gemaakt. Als zo wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 10 uit deze getallen $1, 2, en\ 3$ door optellen kan ontstaan, zal gelden $n = 10$ en $m = 3$, en uit de tabel wordt het aantal manieren $= 14$ gevonden, die manieren zijn:

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+1+1+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2$	$10 = 1+1+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+2+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+2+2$	$10 = 1+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+2+3$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+2+2+2$	$10 = 2+2+2+2+2$
$10 + 1+1+1+1+3+3$	$10 = 2+2+3+3$

Als wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 25 uit deze getallen $1, 2, 3, 4, 5$ door optellen kan worden gemaakt, gegeven$= 25$ en $m = 5$, wordt uit de tabel het aantal manieren $=$ 377 gevonden.

Als wordt gevraagd op hoeveel verschillende manieren het getal 50 uit deze getallen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ door optellen kan resulteren, met $n = 50$ en $m = 10$, wordt het aantal manieren $=$ 62740 gevonden.

Als of het voorgelegde getal, of het aantal delen groter is dan in de tabel, dan zal het kleinere aantal van de gevallen uit de tabel met hulp van de eerder genoemde gevonden formules zonder moeite kunnen worden gevonden. Zoals wordt gevraagd, op hoeveel manieren het getal 60 uit de getallen $1, 2, 3 \ldots \ldots 20$ door optellen kan resulteren, zal $n = 60$ en $m = 20$ gelden, en de waarde van de formule $60^{(20)}$ wordt gevraagd. Zeker geldt $60^{(20)} = 60^{(19)} + 40^{(20)}$, en $60^{(19)} = 60^{(18)} + 41^{(19)}$ en verder $60^{(18)} = 60^{(17)} + 42^{(18)}$, en $60^{(17)} = 60^{(16)} + 43^{(17)}$, en zo voort. Vandaar zal uiteindelijk gelden

$$60^{(20)} = 40^{(20)} + 41^{(19)} + 42^{(18)} + 43^{(17)} + 44^{(16)} + \cdots \ldots 59^{(1)},$$

die getallen uit de tabel opgeteld geven 791131, en op net zoveel manieren kan het getal 60 uit de getallen $1, 2, 3 \ldots \ldots 20$ door optellen worden gemaakt.

§35. Met behulp van deze tabel uitgelegd kunnen vervolgens beide Problemen van de zeer bekende Naude worden opgelost. Maar als eerst wordt gevraagd, *op hoeveel manieren het gegeven getal N in m delen, die onderling ongelijk zijn, kan worden gedeeld, gebeurt dit, zoals we eerder aantoonden, op zoveel manieren, als dat eenheden worden bevat in de uitdrukking* $\left(N - \frac{m(m+1)}{2}\right)^{(m)}$ *zoals de tabel aantoont.* Laten we het gebruik van de tabel dus aantonen met voorbeelden.

I. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 25 in 5 ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Dit zal dan gelden: $N = 25$ en $m = 5$, vandaar $\frac{m(m+1)}{2} = 15$ en het antwoord zal de formule $10^{(15)}$ omvatten, die uit de tabel is $= 30$ zo, dat de partitie op 30 manieren kan worden opgesteld.

II. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 50 in 7 ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Dit geldt: $N = 50$ en $m = 7$ en $N - \frac{m(m+1)}{2} = 22$, vanwaar het aantal partities, dat gevraagd is, $= 22^{(7)} = 522$.

III. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 100 in 10 ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Omdat geldt: $N = 100$ en $m = 10$ zal gelden $N - \frac{m(m+1)}{2} = 45$ en het aantal partities $45^{(10)} = 33401$ wordt gevonden.

IV. *Wordt gevraagd, op hoeveel diverse manieren het getal 256 in 20 ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Voor $N = 256$ en $m = 20$ zal gelden $N - \frac{m(m+1)}{2} = 46$, en het aantal partities wordt $= 46^{(20)} = 96271$.

V. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 270 in 20 ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Voor $N = 270$ en $m = 20$ zal gelden $N - \frac{m(m+1)}{2} = 60$ en daarom is het gevraagde aantal partities $= 60^{(20)}$, waarvan we eerder gevonden hebben dat de waarde $= 791131$. Op net zoveel diverse manieren kan het getal 270 dus in 20 ongelijke delen worden gedeeld.

§36. Op vergelijkbare wijze wordt ook uit de tabel het andere Probleem opgelost, waarin wordt gevraagd:
op hoeveel verschillende manieren het getal N in m delen kan worden gedeeld, gelijkheid van delen niet uitgesloten?

Want eerder hebben we aangetoond dat het gevraagde aantal partities wordt omgevat in deze formule $(N - m)^{(m)}$, welke waarde mogelijk uit de tabel wordt gehaald. Opdat daardoor deze oplossing makkelijker wordt begrepen, voegen we een aantal voorbeelden toe.

I. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 25 in vijf, ofwel gelijke, ofwel ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Hier geldt $N = 25$ en $m = 5$, vanwaar $N - m = 20$, en het aantal partities zal zijn $20^{(20)} = 192$.

II. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 50 in 7 gelijke of ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Voor $N = 50$ en $m = 7$ zal gelden $N - m = 43$, en het gevraagde aantal delingen wordt $43^{(7)} = 8946$.

III. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 50 in tien gelijke of ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Voor $N = 50$ en $m = 10$ zal gelden $N - m = 40$ en het aantal partities zal zijn $40^{(10)} = 16928$.

IV. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 60 in 12 ofwel gelijke, ofwel ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Omdat geldt $N = 60$ en $m = 12$, zal gelden $N - m = 48$ en het gevraagde aantal partities zal zijn $48^{(12)} = 74287$.

V. *Wordt gevraagd, op hoeveel verschillende manieren het getal 80 in 20 gelijke of ongelijke delen kan worden gedeeld?*
Er zal dan gelden: $N = 80$ en $m = 20$, vanwaar $N - m = 60$ en het aantal delingen zal zijn $60^{(20)} = 791131$.

§37. In de horizontale reeksen, die de tabel toont, is het handig de overeenstemming op te merken tussen de oorspronkelijke termen van deze reeks, die daarheen langer voortgaat, waardoor het getal m groter geweest zal zijn: zo heeft de vijftiende reeks zijn vijftien oorspronkelijke termen gemeen met alle volgende reeksen. Hiervandaan zal de reeks kunnen worden gevonden, die, na het getal m in het oneindige te vergroten, beantwoordt, welke waarden van de formule $n^{(\infty)}$ hij dan zal bevatten; wat kenbaar maakt, op hoeveel verschillende manieren het getal n, uit alle voorgaande gehele getallen door optellen kan worden gemaakt. Deze vraag, waar we steeds dieper op ingaan, schijnt dus geldig. Omdat $n^{(\infty)}$ alle partities van het getal n in zijn geheel bevat, voor ieder aantal delen tegelijk genomen opgeteld: $n^{(\infty)}$ zal gemaakt zijn uit de aantallen partities in $1, 2, 3, 4, \ldots tot\ m$ delen, die of gelijk, of ongelijk zijn; omdat het getal n niet in meer dan n delen kan worden gedeeld. Voor deze zaak zal gelden:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + \ldots\ldots (n-n)^{(n)}$$

in welke reeks dan de eerste term $(n-1)^{(1)}$, die het delen in één deel toont, zoals de laatste $(n-n)^{(n)}$, die het delen in n delen toont, één is. Hiervandaan kan de reeks getallen $n^{(\infty)}$, die in het einde[29] van de tabel wordt getoond, door optellen van termen van eerdere reeksen worden gevonden. Zo zal gelden:

$$6^{(\infty)} = (5)^{(1)} + (4)^{(2)} + (3)^{(3)} + (2)^{(4)} + (1)^{(5)} + (0)^{(6)} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11,$$

welk getal in de onderste reeks van de tabel wordt gehad onder getal 6.

§38. Deze berekening kan verder worden samengetrokken met hulp van het eerder gevonden Lemma

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

, vanwaar geldt:

$$n^{(m)} - n^{(m-1)} = (n-m)^{(m)}$$

Want omdat geldt:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + (n-6)^{(6)} + etc.$$

[29] aan de onderkant

als op elke plaats van n $n-1$ wordt geschreven, zal gelden:

$$(n-1)^{(\infty)} = (n-1)^{(0)} + (n-2)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-4)^{(3)} + (n-5)^{(4)} + (n-6)^{(5)} + etc.$$

Waar voor de formaliteit de term $(n-1)^{(0)}$ voor wordt geplaatst, waarvan de waarde 0 is. Als dus de onderste reeks van die daarboven wordt afgetrokken, zal met behulp van het Lemma ontstaan:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(3)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + (n-12)^{(6)}$$

en zo wordt elke term $n^{(\infty)}$ met behulp van de voorgaande $(n-1)^{(\infty)}$ door optellen van twee keer minder termen, dan eerst, gevonden. Dan zal gelden uit: de stappen

$$12^{(\infty)} = 11^{(\infty)} + 10^{(1)} + 8^{(2)} + 6^{(3)} + 4^{(4)} + 2^{(5)} + 0^{(6)} \; of \; 12^{(\infty)} = 56 + 1 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 77,$$

welk getal voor de waarde van $12^{(\infty)}$ ook in de tabel wordt gevonden.

§39. Op een vergelijkbare manier kan deze berekening anders worden samengetrokken, omdat immers geldt:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(3)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + etc.$$

waar we op de plaats van n $n-2$ plaatsen, zullen we hebben:

$$(n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} = (n-2)^{(0)} + (n-4)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-8)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + etc.$$

waar we voor de formaliteit de term $(n-2)^{(0)} = 0$ ervoor plaatsen. Nu zullen we de reeks door het bovenstaande af te trekken met behulp van het Lemma verkrijgen.

$$\left.\begin{matrix} +\mathrm{n}^{(\infty)} - (\mathrm{n}-1)^{(\infty)} \\ -(\mathrm{n}-2)^{(\infty)} + (\mathrm{n}-3)^{(\infty)} \end{matrix}\right\} = (n-3)^{(1)} + (n-6)^{(3)} + (n-9)^{(9)} + (n-12)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + etc.$$

Als deze reeks P wordt genoemd, zal gelden:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} + P.$$

In de gevraagde reeks is het nodig om voor het bepalen van elke term $\mathrm{n}^{(\infty)}$ behalve de waarde van deze P, telkens drie voorgaande termen te kennen. Door het voortgaan op deze manier verdwijnt uiteindelijk de hoeveelheid P, en iedere term van die reeks wordt door alleen voorgaande temen bepaald, wat de eigenschap is van een recursieve reeks.

§40. Duidelijk is gemaakt door deze zaak dat de reeks recursief is uit het ontstaan daarvan, omdat het uitwerken van deze breuk ontstaan:

$$\frac{1}{(1-\mathrm{x})(1-\mathrm{x}^2)(1-\mathrm{x}^3)(1-\mathrm{x}^4)(1-\mathrm{x}^5)(1-\mathrm{x}^6)\ \mathrm{etc.}}$$

Het onderlinge verband van deze reeks zal er dus zijn, als deze noemer door het doen van vermenigvuldiging wordt uitgewerkt. De noemer, die op de volgende manier uitgedrukt is, wordt door deze vermenigvuldiging gemaakt.

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + etc.$$

Laten deze machten van x een wet van een zekere hoedanigheid hebben, uit deze vorm schijnt het met moeite te kunnen worden bepaald; inmiddels blijkt spoedig toch uit onderzoeken, dat afwisselend telkens twee termen positief en negatief zijn. En niet minder worden exponenten van x geobserveerd een zekere wet te hebben, vanwaar een term van x in het algemeen wordt verenigd $x^{\frac{n(3n\pm1)}{2}}$. Natuurlijk komen geen andere machten voor, behalve waarvan de exponenten worden bevat in deze formule $\frac{3nn\pm n}{2}$, opdat ook zeker zo de machten, die uit oneven genomen getallen voor n bestaat, een – teken zullen hebben, die echter uit even getallen worden gevormd, een $+$ teken hebben.

§41. Deze vorm verschaft ons dan het onderlinge verband van de gevraagde reeks, waardoor het zal zijn

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-5)^{(\infty)} - (n-7)^{(\infty)} + (n-12)^{(\infty)} + (n-15)^{(\infty)} - (n-22)^{(\infty)}$$
$$-(n-26)^{(\infty)} + (n-35)^{(\infty)} + (n-40)^{(\infty)} - (n-51)^{(\infty)} - (n-57)^{(\infty)} + etc.$$

Het zal, als gemakkelijk geprobeerd wordt, duidelijk zijn dat deze regelmaat past. Als $n = 30$ wordt gevonden, zal zo gelden:

$$30^{(\infty)} = 29^{(\infty)} + 28^{(\infty)} - 25^{(\infty)} - 23^{(\infty)} + 18^{(\infty)} + 15^{(\infty)} - 8^{(\infty)} - 4^{(\infty)}$$

is immers, als deze getallen uit de tabel zijn opgeteld

$$5604 = 4565 + 3718 - 1958 - 1255 + 385 + 176 - 22 - 5$$

En op deze manier, waarop het aan een stuk door mogelijk is, kan deze reeks worden voltooid.

§42. Aangezien de reeks voor de waarde $m = 20$ zeker al gevormd is, zal daardoor voor een grote hoeveelheid de gevraagde reeks voor de waarde $m = \infty$ makkelijker worden gevonden. Omdat de reeks $n^{(20)}$ immers wordt gevormd uit het uitwerken van deze breuk:

$$\frac{1}{(1-\mathrm{x})(1-\mathrm{x}^2)(1-\mathrm{x}^3)(1-\mathrm{x}^4)\ldots\ldots(1-\mathrm{x}^{20})}$$

wordt de reeks $n^{(\infty)}$ zeker gevormd uit het uitwerken van deze breuk:

$$\frac{1}{(1-\mathrm{x})(1-\mathrm{x}^2)(1-\mathrm{x}^3)(1-\mathrm{x}^4)\ldots\ldots(1-\mathrm{x}^{\infty})}$$

het is duidelijk als deze reeks wordt vermenigvuldigd met

$$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})etc.$$

of met

$$1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - x^{27} - etc.$$ [30]
$$+x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + 4x^{49} + 4x^{50} + etc.$$ [31]
$$-x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - 7x^{72} - 8x^{73} - 10x^{74} - etc.$$ [32]
$$+x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + 9x^{96} + 11x^{97} + 15x^{98} + etc.$$
$$-x^{115} - x^{116} - 2x^{117} - 3x^{118} - 5x^{119} - 7x^{120} - 10x^{121} - 12x^{122} - 18x^{123} - etc.$$
$$etc.$$

dan de eerdere moet verschijnen. Hiervandaan wordt geconcludeerd dat zal gelden:

$$\begin{aligned} n^{(20)} = n^{(\infty)} &- (n-21)^{(\infty)} - (n-22)^{(\infty)} - (n-23)^{(\infty)} - (n-24)^{(\infty)} - etc. \\ &+(n-43)^{(\infty)} + (n-44)^{(\infty)} + 2(n-45)^{(\infty)} + 2(n-46)^{(\infty)} + 3(n-47)^{(\infty)} + etc. \\ &-(n-66)^{(\infty)} - (n-67)^{(\infty)} - 2(n-68)^{(\infty)} - 3(n-69)^{(\infty)} - 4(n-70)^{(\infty)} - etc. \\ &+(n-90)^{(\infty)} + (n-91)^{(\infty)} + 2(n-92)^{(\infty)} + 3(n-94)^{(\infty)} + 5(n-95)^{(\infty)} + etc. \\ &-(n-115)^{(\infty)} - (n-116)^{(\infty)} - 2(n-117)^{(\infty)} - 3(n-118)^{(\infty)} - 5(n-119)^{(\infty)} - etc. \\ &etc. \end{aligned}$$

van welke reeks de coëfficiënten voortgaan volgens de eerdere reeksen voor partities van de getallen $2, 3, 4, 5, 6, etc.$ delen, die dienstbaar zijn.

§43. $\int (\mathrm{n}-21)^{(\infty)}$ toont de som van alle reeksen van de reeks $n^{(\infty)}$, die zijn:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 + etc.$$

aan een stuk door tot de term, inclusief, $(n-21)^{(\infty)}$: en laat op een vergelijkbare manier $\int p^{(\infty)}$ in het algemeen de som zijn van alle termen van dezelfde reeks aan een stuk door tot de term, inclusief, $p^{(\infty)}$, welke sommen gemakkelijk succesvol worden gemaakt, er zal gelden:

$$\begin{aligned} n^{(20)} = n^{(\infty)} &- \int (n-21)^{(\infty)} + \int (n-43)^{(\infty)} + \int (n-45)^{(\infty)} + \int (n-47)^{(\infty)} + etc. \\ &-\int (n-66)^{(\infty)} - \int (n-68)^{(\infty)} - \int (n-69)^{(\infty)} - \int (n-70)^{(\infty)} - etc. \\ &+\int (n-90)^{(\infty)} + \int (n-92)^{(\infty)} + \int (n-93)^{(\infty)}(\infty) + 2\int (n-94)^{(\infty)} + etc. \\ &etc. \end{aligned}$$

En vandaar zal daarom gelden:

$$\begin{aligned} n^{(\infty)} = n^{(20)} &+ \int (n-21)^{(\infty)} - \int (n-43)^{(\infty)} - \int (n-45)^{(\infty)} - \int (n-47)^{(\infty)} - etc. \\ &+\int (n-66)^{(\infty)} + \int (n-68)^{(\infty)} + \int (n-69)^{(\infty)} + \int (n-70)^{(\infty)} + etc. \\ &-\int (n-90)^{(\infty)} - \int (n-92)^{(\infty)} - \int (n-93)^{(\infty)} - 2\int (n-94)^{(\infty)} - etc. \\ &etc. \end{aligned}$$

Met behulp van deze formule, behalve als n een zeer groot getal is, wordt uit de reeks voor een partitie in 20 dienstbare delen de reeks $n^{(\infty)}$ makkelijk bepaald, en op deze manier wordt dit in de gemaakte tabel gereproduceerd, omdat overal het verlopen van de termen $n^{(\infty)}$ boven de termen $n^{(20)}$ zijn toegedeeld.[33]

§44. Als deze reeks gemaakt is door ieder voorgelegd getal, zal bepaald kunnen worden, op hoeveel manieren hij in delen kan worden gedeeld. Zo blijkt dat het getal 10 in zijn geheel op 42 manieren uit optellen kan resulteren, en het getal 59 zal op zoveel manieren uit optellen worden gemaakt, als dit getal 831820 toont. Maar indien grotere getallen worden voorgelegd, dan de tabel, die hier gepresenteerd wordt, daarentegen laat zien, moet in ieder geval het verlangde getal anders door eerder genomen, hier

---

[30] *telkens één van de machten vermenigvuldigd met allemaal resterende enen*
[31] telkens twee van de machten vermenigvuldigd met allemaal resterende enen
[32] telkens drie van de machten vermenigvuldigd met allemaal resterende enen, etc.
[33] Overal waar $\mathrm{n}^{(\infty)}$ gebruikt wordt, zal dat meer zijn dan $\mathrm{n}^{(20)}$ (, want anders zou je dat niet gebruiken).

gegeven reeksen worden onderzocht. In deze partities wordt de gelijkheid van delen verder niet uitgesloten. Vanwaar een nieuw Probleem ontstaat, *waarin voor ieder voorgelegd getal het aantal van alle partities in onderling ongelijke delen wordt gevraagd,* welk Probleem wordt opgelost met behulp van deze uitdrukking: $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)etc.$ Als deze factoren om beurten onderling zijn vermenigvuldigd, ontstaat immers de reeks, waarin iedere coëfficiënt toont, op hoeveel verschillende manieren de exponent van x in onderling ongelijke delen kan worden gedeeld.

§45. Als nu verder dit product met de hand wordt uitgewerkt, wordt deze reeks gevonden:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}+18x^{13}+22x^{14} \\ +27x^{15}+32x^{16}+38x^{17}+46x^{18}+54x^{19}+64x^{20}+76x^{21}+89x^{22}+etc.$$

die, omdat het het product is uit oneindig veel factoren, die een simpele wet dan bewaakt[34], door alle aandacht waardig schijnt. Maar eerst is zeker duidelijk, dat de coëfficiënten van deze termen meestal even zijn, en dat ze alleen oneven zijn, die verbonden zijn met een macht van een zodanige x, waarvan de exponenten in deze vorm $\frac{3nn\pm n}{2}$ worden bevat: van welk fenomeen het verband hetzelfde is, en omdat we hiervan rondom de exponenten dezelfde vorm $\frac{3nn\pm n}{2}$ op de uitwerking van het product

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)etc.$$

observeren. Omdat verder geldt:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)etc.=\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)etc.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)etc.}$$ [35] [36]

Verschijnt dat de eerder verzonnen reeks wordt weergeven door deze breuk:

$$\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-x^{70}-x^{80}+\ etc.}{1-x\ -x^2\ +x^5\ \ +x^7\ \ -x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ etc.}$$

vanwaar ze op de wijze van recursieve reeksen zal kunnen worden gevormd.

§46. Verder wordt deze reeks zonder twijfel zeer gemakkelijk geconstrueerd uit zijn karakter, waarin de coëfficiënt van iedere term moet aantonen, op hoeveel verschillende manieren de exponent van x in ongelijke delen kan worden gedeeld. Laat N de coëfficiënt zijn van de macht x^n in deze reeks, en er zal gelden:

$$N=(n-1)^{(1)}+(n-3)^{(2)}+(n-6)^{(3)}+(n-10)^{(4)}+(n-15)^{(5)}+(n-21)^{(6)}+etc.$$

Want $(n-1)^{(1)}=1$ toont dat het getal n op één unieke manier uit één deel bestaat: $(n-3)^{(2)}$ toont op hoeveel manieren het getal n in 2 ongelijke delen gedeeld kan worden, $(n-6)^{(3)}$ toont op hoeveel manieren het getal n in 3 ongelijke delen kan worden gedeeld, en zo voort.
En vandaar kan deze reeks met behulp van de gegeven tabel doorgaan, hoever het gewenst is. Overigens is bij deze notatie geldig, dat als het aantal partities in de even aantallen delen negatief worden genomen, deze uitdrukking resulteert:

$$(n-1)^{(1)}\ -\ (n-3)^{(2)}\ +\ (n-6)^{(3)}\ -\ (n-10)^{(4)}+\ (n+15)^{(5)}\ -\ (n-21)^{(6)}+etc.$$

---

[34] die een regelmaat bevat

[35] $\frac{(1-x)(1+x)(1-x^2)(1+x^2)etc.}{(1-x)(1-x^2)etc.}=(1+\mathrm{x})(1+x^2)etc.$

[36] Net voor de etc. stond een + in het manuscript, dat leek ons ongepast en niet kloppend, dus hebben we het weggehaald.

is altijd 0, als niet geldt dat het getal n in deze vorm wordt omvat $\frac{3zz\pm z}{2}$; als echter n in de vorm wordt omvat, dan is de waarde van deze uitdrukking ofwel $+1$ ofwel -1, voor als het getal of oneven of even zal zijn.

§47. Zoals wij in zoverre het vaststellen van delen voor alle gehele getallen toelaten, zo kan het aantal van de vragen door het voorwaarts beperken van de delen in het oneindige worden vergroot: Bij deze opdracht, omdat de methode zeker het oplossen van een dergelijke vraag zal geven, zal ik me niet langer ophouden. Het zal voldoende zijn uit het voorgaande de opvallende eigenschap van een partitie in oneven delen op te merken. Omdat geldt:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)etc. = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\ etc.}$$

welke formule uit de vergelijking, die in §44 getoond is, uit zichzelf ontstaat, hieruit volgt, dat ieder getal op zoveel manieren uit alleen oneven getallen kan worden gemaakt, als hetzelfde getal volledig in onderling ongelijke delen kan worden gedeeld. Zo, omdat het getal 10 op tien manieren in ongelijke delen kan worden gedeeld, welke manieren zijn:

$10 = 10$	$10 = 1 + 2 + 7$
$10 = 1 + 9$	$10 = 1 + 3 + 6$
$10 = 2 + 8$	$10 = 1 + 4 + 5$
$10 = 3 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 4 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

kan hetzelfde getal 10 op tien manieren uit slechts oneven delen door optellen worden gemaakt, op deze manieren:

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1 + 3 + 3 + 3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3$
$10 = 1+1+1+1+1+5$	$10 = 1 + 1 + 3 + 5$
$10 = 1+1+1+7$	$10 = 3 + 7$
$10 = 1+9$	$10 = 5 + 5$

§48. Als dit overdenken is afgesloten, ga ik verder om te onderzoeken, op welke manier ieder getal uit de termen van de meetkundige reeks $1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.$ door optellen kan worden gevormd. Maar als zeker eerst al deze delen onderling ongelijk moeten zijn, wordt de vraag opgelost door het uitwerken van deze uitdrukking:

$$s = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})etc.$$

Want, als het vermenigvuldigen door uitwerken is gedaan, zal de coëfficiënt van iedere term aantonen op hoeveel manieren de exponent van de verbonden macht x uit de getallen van de meetkundige reeks, $1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.$ door optellen kan worden gemaakt. Omdat dus ieder getal waargenomen is op één unieke manier zo te kunnen worden gemaakt, moet worden aangetoond dat alle machten van x in deze reeks voorkomen, en dat dezelfde coëfficiënt van alle machten van x één is.

§49. Laten we

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + etc.$$

noemen, om dat aan te tonen, en laten we xx in plaats van x plaatsen om de waarden van de coëfficiënten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ te vinden, en laat de waarde voor s, die op deze manier resulteert, $= t$ zijn, dan zal gelden:

$$t = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})etc.$$

en daarom wordt

$$s = (1+x)t.$$

Als het verband in de reeksen is bekeken voor

$$t = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} + etc.$$

wordt gevonden:

$$(1+x)t = 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \beta x^5 + \gamma x^6 + \gamma x^7 + \delta x^8 + \delta x^9 + etc.$$

welke vergelijking, omdat hij gelijk moet zijn aan de reeks s, van de coëfficiënten geeft;

$$\begin{array}{l|l|l|l} \alpha = 1 & \delta = \beta & \eta = \gamma & \kappa = \varepsilon \\ \beta = \alpha & \varepsilon = \beta & \theta = \delta & \lambda = \varepsilon \\ \gamma = \alpha & \zeta = \gamma & \iota = \delta & \mu = \zeta \end{array} \quad etc.$$

vanwaar duidelijk is dat de coëfficiënten alleen gelijk zijn aan één, en dat vandaar geldt:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + etc. = \frac{1}{1-x},$$

wat duidelijk door zichzelf hetzelfde is, omdat geldt:

$$(1-x), (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})etc. = 1$$

§50. Zo wordt verder gevraagd, op hoeveel verschillende manieren ieder getal uit de termen van meetkundige reeks $1, 2, 4, 8, 16,$ *etc.*, de gelijkheid van delen verder niet uitgesloten, door optellen kan worden gemaakt: de oplossing zal gehaald moeten worden uit het uitwerken van deze breuk:

$$\frac{1}{s = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})\text{ etc.}}$$

want als dit is uitgewerkt, toont de coëfficiënt van elke term in de reeks aan, op hoeveel verschillende manieren de exponent van de verbonden macht van x uit de termen van de voorgelegde meetkundige reeks door optellen kan resulteren. Laten we xx in plaats van x plaatsen en de waarde van s verandert in t, dan zal gelden:

$$\frac{1}{t = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})\text{ etc.}} = (1-x)s,$$

dus geldt:

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + etc.$$

er geldt:

$$\begin{array}{lllllllllll} (1-x)s = 1 & +\alpha x & +\beta x^2 & +\gamma x^3 & +\delta x^4 & +\varepsilon x^5 & +\zeta x^6 & +\eta x^7 & +\theta x^8 & +\iota x^9 & etc. \\ & -1 & -\alpha & -\beta & -\gamma & -\delta & -\varepsilon & -\zeta & -\eta & -\theta & etc. \\ = t = 1 & & +\alpha x^2 & & +\beta x^4 & & +\gamma x^6 & & +\delta x^8 & & etc. \end{array}$$

vanwaar uit de gelijkheid van gelijksoortige termen wordt gezien

$$\begin{array}{l|l|l}
\alpha = 1 = 1 & \eta = \zeta = 6 & \nu = \mu = 20 \\
\beta = \alpha + \alpha = 2 & \theta = \eta + \delta = 10 & \xi = \nu + \eta = 26 \\
\gamma = \beta = 2 & \iota = \theta = 10 & o = \xi = 26 \\
\delta = \gamma + \beta = 2 & \kappa = \iota + \varepsilon = 14 & \pi = o + \theta = 36 \\
\varepsilon = \delta = 4 & \lambda = \kappa = 14 & \rho = \pi = 36 \\
\zeta = \varepsilon + \gamma = 6 & \mu = \lambda + \zeta = 20 & \sigma = \rho + \iota = 46
\end{array} \quad etc.$$

§51. Door de notatie is deze reeks geldig, aangezien dan telkens twee termen overal gelijk zijn, omdat deze dan zeer gemakkelijk wordt voortgezet, zover het gewenst is. Verder zal, als het verder is gegaan, zijn:

$$\begin{aligned}1 &+ x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 10x^8 + 10x^9 + 14x^{10} + 14x^{11} + 20x^{12} + 20x^{13} + 26x^{14} \\ &+ 26x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 46x^{18} + 46x^{19} + 60x^{20} + 60x^{21} + 74x^{22} + 74x^{23} + 94x^{24} \\ &+ 94x^{25} + 114x^{26} + 114x^{27} + 140x^{28} + 140x^{29} + 166x^{30} + 166x^{31} + 202x^{32} + 202x^{33} \\ &+ 238x^{34} + 238x^{35} + 284x^{36} + 284x^{37} + etc.\end{aligned}$$

Uit deze reeks is dus duidelijk dat het getal 30 wegens de formule op honderd zes en zestig manieren uit de termen van de meetkundige reeks van twee door optellen gemaakt kan worden. Verder zal de voor oplettende gemakkelijk duidelijk zijn, dat de wet van deze vooruitgang op geen manier door algemene termen kan worden uitgedrukt, omdat het inderdaad een recursieve reeks is, waarvan het onderlinge verband tot in het oneindige voortgaat. Verder zal dit oneindige product:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})etc.,$$

als het wordt uitgewerkt, het onderlinge verband geven. Laten we om dit te vinden dit product p noemen, wat verandert in q als op de plaats van x, x^2 wordt geplaatst, en er zal gelden:

$$q = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})etc. = \frac{p}{1-x}, of\ p = (1-x)q.$$

Laat dus worden gesteld:

$$p = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \kappa x^{10} + etc.$$

en er zal gelden:

$$(1-x)q = 1 - x + \alpha x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 - \beta x^5 + \gamma x^6 - \gamma x^7 + \delta x^8 - \delta x^9 + \varepsilon x^{10} - etc.$$

vanwaar door gelijksoortige termen te vergelijken wordt verkregen:

$$\begin{array}{l|l|l}
\alpha = -1 = -1 & \theta = \delta = -1 & o = -\eta = +1 \\
\beta = \alpha = -1 & \iota = -\delta = +1 & \pi = \theta = -1 \\
\gamma = -\alpha = +1 & \kappa = \varepsilon = +1 & \rho = -\theta = +1 \\
\delta = \beta = -1 & \lambda = -\varepsilon = -1 & \sigma = \iota = +1 \quad etc. \\
\varepsilon = -\beta = +1 & \mu = \zeta = +1 & \tau = -\iota = -1 \\
\zeta = \gamma = +1 & \nu = -\zeta = -1 & \upsilon = \kappa = +1 \\
\eta = -\gamma = -1 & \xi = \eta = -1 & \phi = \kappa = -1
\end{array}$$

§52. De coëfficiënten van de reeks p, die uit het uitwerken van dit product:

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32})etc.$$

wordt geboren, zijn alle ofwel $+1$ ofwel -1, en toch verkrijgen ze door gewone gewoonte een toegewezen wet, want er geldt:

$$p = 1 - x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} - x^{14} + x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} - x^{22} + x^{23} + x^{24} - x^{25} - x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{29} + x^{30} - x^{31} - x^{32} + x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36} - x^{37} - x^{38} + x^{39} + x^{40} - x^{41} - x^{42} + x^{43} - x^{44}\ etc.$$

waar opgemerkt moet worden, dat iedere macht van een oneven exponent x^{2n+1} een teken tegengesteld tot deze, die een macht x^{2n} heeft. En dat het teken van deze altijd overeenkomt met het teken van de x^n; vanwaar het teken van welke macht dan ook gemakkelijk zal worden toegewezen. Maar als het teken van deze macht x^{1745} wordt gevraagd, zal, als we het alleen over het teken hebben, gelden:

$$x^{1745} = -x^{1744} = -x^{872} = -x^{436} = -x^{218} = -x^{109} = +x^{108} = +x^{54} = +x^{27} = -x^{26} = -x^{13} = +x^{12} = +x^6 = +x^3 = -x^2 = -x^1$$

het teken van de macht x^{1745} is dus tegengesteld tot het teken van de macht x^1, wat, omdat het – is, + zal zijn.

De tabel, die aantoont op hoeveel verschillende manieren ieder getal n uit de getallen 1, 2, 3 4. . . . m door optellen gemaakt kan worden, of die de waarden van de formule $n^{(m)}$ presenteert.

<TABULA> [37]

Num.	Valores numeri n.																						
m.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12
				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52
					1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136
						1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255
							1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391
								1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522
									1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638
										1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598	732
											1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807
												1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863
													1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905
														1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747	935
															1	1	2	3	5	7	11	15	22
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608	762	957
																1	1	2	3	5	7	11	15
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615	773	972
																	1	1	2	3	5	7	11
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620	780	983
																		1	1	2	3	5	7
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623	785	990
																			1	1	2	3	5
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625	788	995
																				1	1	2	3
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626	790	998
																					1	1	2
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	791	1000
																						1	2
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	792	1002

[37] Tabel

m.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	11 12	12 13	12 13	13 14	13 14	14 15	14 15	15 16	15 16	16 17	16 17	17 18
3	44 56	48 61	52 65	56 70	61 75	65 80	70 85	75 91	80 96	85 102	91 108	96 114
4	94 150	108 169	120 185	136 206	150 225	169 249	185 270	206 297	225 321	249 351	270 378	297 411
5	141 291	164 333	192 377	221 427	255 480	291 540	333 603	377 674	427 748	480 831	540 918	603 1014
6	163 454	199 532	235 612	282 709	331 811	391 931	454 1057	532 1206	612 1360	709 1540	811 1729	931 1945
7	164 618	201 733	248 860	300 1009	364 1175	436 1367	522 1579	618 1824	733 2093	860 2400	1009 2738	1175 3120
8	146 764	186 919	230 1090	288 1297	352 1527	434 1801	525 2104	638 2462	764 2857	919 3319	1090 3828	1297 4417
9	123 887	157 1076	201 1291	252 1549	318 1845	393 2194	488 2592	598 3060	732 3589	887 4206	1076 4904	1291 5708
10	97 984	128 1204	164 1455	212 1761	267 2112	340 2534	423 3015	530 3590	653 4242	807 5013	984 5888	1204 6912
11	76 1060	99 1303	131 1586	169 1930	219 2331	278 2812	355 3370	445 4035	560 4802	695 5708	863 6751	1060 7972
12	56 1116	77 1380	100 1686	133 2063	172 2503	224 3036	285 3655	336 4401	460 5262	582 6290	725 7476	905 8877
13	42 1158	56 1436	77 1763	101 2164	134 2637	174 3210	227 3882	290 4691	373 5635	471 6761	597 8073	747 9624
14	30 1188	42 1478	56 1819	77 2241	101 2738	135 3345	175 4057	229 4920	293 5928	378 7139	478 8551	608 10232
15	22 1210	30 1508	42 1861	56 2297	77 2815	101 3446	135 4192	176 5096	230 6158	295 7434	381 8932	483 10715
16	15 1225	22 1530	30 1891	42 2339	56 2871	77 3523	101 4293	135 5231	176 6334	231 7665	296 9228	383 11098
17	11 1236	15 1545	22 1913	30 2369	42 2913	56 3579	77 4370	101 5332	135 6469	176 7841	231 9459	297 11395
18	7 1243	11 1556	15 1928	22 2391	30 2943	42 3621	56 4426	77 5409	101 6570	135 7976	176 9635	231 11626
19	5 1248	7 1563	11 1939	15 2406	22 2965	30 3651	42 4468	56 5465	77 6647	101 8077	135 9770	176 11802
20	3 1251	5 1568	7 1946	11 2417	15 2980	22 3673	30 4498	42 5507	56 6703	77 8154	101 9871	135 11937
∞	4 1255	7 1575	12 1958	19 2436	30 3010	45 3718	67 4565	97 5604	139 6842	195 8349	272 10143	373 12310

m	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	17	18	18	19	19	20	20	21	21
2	18	19	19	20	20	21	21	22	22
	102	108	114	120	127	133	140	147	154
3	120	127	133	140	147	154	161	169	176
	321	351	378	411	441	478	511	551	588
4	441	478	511	551	588	632	672	720	764
	678	748	831	918	1014	1115	1226	1342	1469
5	1115	1226	1342	1469	1602	1747	1898	2062	2233
	1057	1206	1360	1540	1729	1945	2172	2432	2702
6	2172	2412	2702	3009	3331	3692	4070	4494	4935
	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120	3539	4011
7	3539	4011	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946
	1527	1801	2104	2402	2857	3319	3828	4417	5066
8	5066	5812	6630	7564	8588	9749	1108	12450	14012
	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5708
9	6615	7657	8824	10156	11648	13398	15224	17354	19720
	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888
10	8070	9418	10936	12690	1466	6928	19466	22367	25608
	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035	4802	5708
11	9373	11004	12866	15021	17475	20298	23501	27169	31316
	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262
12	10489	12384	14552	17084	19978	23334	27156	31570	36578
	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
13	11424	13542	15988	18847	22142	25971	30366	35452	41269
	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057
14	12186	14499	17176	20325	23961	28212	33104	38797	45326
	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446
15	12801	15[illegible]72	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772
	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871
16	13287	15892	18928	22518	26694	31603	37292	43951	51643
	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369
17	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45464	54012
	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928
18	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080	47420	55940
	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563
19	14199	17062	20425	24412	29092	34624	41078	48668	57503
	176	231	297	385	490	627	791	1000	1251
20	14375	1729[illegible]	20722	24801	29588	35251	41869	49668	[illegible]8754
	508	684	915	1212	1597	2087	2714	3506	4507
∞	14883	17977	21637	26015	31185	37338	44583	53174	63261

m	44	45	46	47	48	49	50	51
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	22	22	23	23	24	24	25	25
2	23	23	24	24	25	25	26	26
	161	169	176	184	192	200	208	217
3	184	192	200	208	217	225	234	243
	632	672	720	764	816	864	920	972
4	816	864	920	972	1033	1089	1154	1215
	1602	1747	1898	2062	2233	2418	2611	2818
5	2418	2611	2818	3034	3266	3507	3765	4033
	3009	3331	3692	4070	4494	4935	5427	5942
6	5427	5942	6510	7104	7760	8442	9192	9975
	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946	9953
7	9953	11044	12241	13434	14950	16475	18134	19928
	5812	6630	7564	8588	9749	11018	12450	14012
8	15765	17670	19805	22122	24699	27493	30588	33640
	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354
9	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812	51294
	6912	8070	9418	10936	12690	14663	16928	19466
10	29292	33401	38047	43214	49037	55494	62740	70760
	6751	7972	9373	11004	12866	15021	17475	20298
11	36043	41373	47420	54218	61903	70515	80215	91058
	6290	7476	8877	10489	12384	14552	17084	19978
12	42333	48849	56297	64707	74287	85067	97299	111036
	5635	6761	8073	9624	11424	13542	15988	18847
13	47968	55610	64370	74331	85711	98609	113287	129883
	4920	5928	7139	8551	10232	12186	14499	17176
14	52888	61538	71509	82882	95943	110795	127786	147059
	4192	5096	6158	7434	8932	10715	12801	15272
15	57080	66634	77667	90316	104875	121510	140587	162331
	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098	13287
16	60603	70927	82898	96650	112540	130738	151685	175618
	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459	11395
17	63516	74506	87268	101982	119009	138579	161144	187013
	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635
18	65907	77449	90889	106408	124418	145149	169120	196648
	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647	8077
19	67846	79855	93854	110059	128886	150614	175767	204725
	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703
20	69414	81801	96271	113039	132559	155112	181274	211528
	5761	7333	9287	11715	14714	18413	22952	28515
21	75175	89134	105558	124754	147273	173525	204226	239943

m	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	26	26	27	27	28	28	29	29
2	27	27	28	28	29	29	30	30
	225	234	243	252	261	271	280	290
3	252	261	271	280	290	300	310	320
	1033	1089	1154	1215	1285	1350	1425	1495
4	1285	1350	1425	1495	1575	1650	1735	1815
	3034	3266	3507	3765	4033	4319	4616	4932
5	4319	4616	4932	5260	5608	5969	6351	6747
	6510	7104	7760	8442	9192	9975	10829	11720
6	10829	11720	12692	13702	14800	15944	17180	18467
	11044	12241	13534	14950	16475	18138	19928	21873
7	21873	23961	26226	28652	31275	34082	37108	40340
	15765	17674	19805	22122	24699	27493	30588	33940
8	37638	41635	46031	50774	55974	61575	67696	74280
	19720	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812
9	57358	64015	71362	79403	88252	97922	108527	120092
	22367	25608	29292	33401	38047	43214	49037	55494
10	79725	89623	100654	112804	126299	141136	157564	175586
	23501	27169	31316	36043	41373	47420	54218	61903
11	103226	116792	131970	148847	167672	188556	211782	237489
	23334	27156	31570	36578	42333	48849	56297	64707
12	126560	143948	163540	185425	210005	237405	268079	302196
	22142	25971	30366	35452	41269	47968	55610	64370
13	148702	169919	193906	220877	251274	285373	323689	366566
	20325	23961	28212	33104	38797	45326	52888	61538
14	169027	193880	222118	253981	290071	330699	376577	428104
	18148	21535	25469	30073	35403	41612	48772	57080
15	187175	215415	247587	284054	325475	372311	425349	485184
	15892	18928	22518	26694	31609	37292	43951	51643
16	203067	234343	270105	310748	357075	419603	469300	536827
	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45864
17	216738	250723	289656	334051	384759	442442	508137	582691
	11626	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080
18	228364	264691	306421	354091	408687	470914	541971	622771
	9770	11802	14199	17062	20425	24418	29098	34624
19	238134	276493	320620	371153	429112	495332	571069	657395
	8154	9871	11937	14375	17293	20722	24803	29588
20	246288	286364	332557	385528	446405	516054	595872	686983
	35301	43567	53598	65748	80418	98100	119348	144837
∞	281589	320931	386155	451276	526823	614154	715220	831820

[BIJLAGE]

Bij voetnoot 10:

$$\mathrm{s} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k z) = 1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} A_i(x) z^{\,i}\ ;$$

de coëfficiënt van x^n in $A_i(x)$ is het aantal manieren om n te schrijven als een som van i ongelijke positieve gehele getallen

Bij voetnoot 16:

$s(z) = (1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)(1 + x^5 z)\ etc.$
$t(z) = s(xz) = (1 + xz) \cdot s(z)$

$A = Ax + x\ ,\ \ B = Bx^2 + Ax^2\ ,\ \ C = Cx^3 + Bx^3\ ,\ \ D = Dx^4 + Cx^4$

Bij voetnoot 18:

Als $\frac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$, dan volgt dat $b_0 = 1$ en

$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i = 1$. Dit uitschrijven geeft:

$$b_0 + (b_1 + a_1 b_0)x + (b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_0)x^k$$

$$+ (b_{k+1} + a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \cdots + a_k b_1)x^{k+1} + (b_{k+2} + a_1 b_{k+1} + a_2 b_k + \cdots + a_k b_2)x^{k+2} + \cdots$$

$= 1$. Hieruit volgen de betrekkingen:

$b_0 = 1$

$b_1 = -a_1 b_0$

$b_2 = -a_1 b_1 - a_2 b_0$

$b_3 = -a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0$

$\cdots$

$b_k = -a_1 b_{k-1} - a_2 b_{k-2} - \cdots - a_k b_0$

$b_{k+1} = -a_1 b_k - a_2 b_{k-1} - \cdots - a_k b_1$

$b_{k+2} = -a_1 b_{k+1} - a_2 b_k - \cdots - a_k b_2$

$\cdots$.

Bij voetnoot 21:

$s = \{\prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^k z)\}^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i(x) z^i$;

de coëfficiënt van x^n in $A_i(x)$ is het aantal manieren om n te schrijven als een som van i positieve gehele getallen .

—

Bij voetnoot 27:

Deze formule kan zeer eenvoudig direct afgeleid worden.
Alle $n^{(m)}$ partities van n in de delen $1,2,\cdots,m$ zijn te verdelen in twee groepen
I : de partities waarin de term m niet voorkomt.
II : de partities waarin het getal m een van de termen is.
Het aantal partities in I is evident gelijk aan $n^{(m-1)}$.
Uit elke partitie in II laten we de term m weg. Op deze manier verkrijgen we alle partities van het getal $n - m$ in de delen $1,2,\cdots,m$, dus er zijn $(n-m)^{(m)}$ partities in II .
Hiermee is de bovenstaande formule aangetoond.

—