De Variis Modis Circuli Quadraturam Numeris Proxime Exprimendi.[1]

Auctore
Leonh. Eulero

§1. *Archimedes* et qui ipsum sunt secuti rationem diametri ad peripheriam in numeris proximam inuestigauerunt ex polygonis regularibus circulo tam inscriptis quam circumscriptis. Cum enim perimeter polygoni inscripti minor, circumscripti vero maior sit ipsa circuli peripheria, satis commodum hinc deduxerunt modum limites intra quos peripheria contineatur, definiendi; praesertim cum hi limites eo proprius ad se inuicem accedant, quo plurium laterum polygona accipiantur. Ita cum posito radio circuli $= 1$, latus polygoni 96, laterum inscripti sit

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}},$$

latus vero circumscripti totidem laterum

$$\frac{2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}};$$

sequentes prodibunt limites intra quos tota peripheria circuli continetur, minor scilicet

$$96\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

et major

$$\frac{192\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}.$$

§2. Perspicitur autem ex hoc solo exemplo quam difficile et operosum sit limites hos in numeris rationalibus saltem exhibere propter tot totiesque repetitas radicis quadratae extractiones: qui labor etiam eo major evadit, si polygona adhuc plurium laterum considerentur: adeo ut per hunc modum ne quidem speranda fuisset exactissima diametri ad peripheriam ratio, quae nunc quidem constat, et in fractionibus decimalibus at 127 figuras est producta: Posita nimirum diametro $= 1$, exprimetur peripheria sequenti fractione decimali.

$$\begin{array}{ll} 3, & 1415926535897932384626433832795028841\,9 \\ & 7169399375105820974944592307816406286\,2 \\ & 0899862803482534211706798214808651327\,2 \\ & 3066470938446+ \end{array}$$

[1] *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **9**, 1737/1744, pp. 222-236. [E74]

cuius fractionis centum cyphrae priores *Cl. Machino*[2] debentur, omnes vero *Cl. Lagny* [3]peculiari modo etiamnunc relato elicuit.[4]

§3. Methodo ergo Archimedeae per polygona inscripta at circumscripta procedenti merito praeferenda est altera methodus hoc potissimum tempore exculta, qua circuli peripheria per series infinitas convergentes exprimi solet. Si enim huiusmodi series vehementer convergat, atque insuper ipsi serei termini facile in fractiones decimales converti queant, multo minori opera ratio diametri ad peripheriam proxima numeris rationalibus exprimi poterit, quam per illam alteram methodum, quae tot radicum extractiones requirit. Quo autem hac ratione calculus commode ad finem perduci queat, series ad hoc institutum idoneae sunt seligendae, quas duo sequentia requisita, uti quam innui, habere oportet. Primo scilicet, series debet esse vehementer convergens, seu eiusmodi, ut quivis terminus multo sit minor praecedente, quo non admodum multis terminis accipiendis ratio verae satis propinqua obtineatur. Quo pauciores enim termini a vero valore minime differunt, eo aptior erit censenda series ad veram diametri ad peripheriam rationem dignoscendam.

§4. Alterum requisitum postulat ut singuli seriei termini no sint admodum compositi, seu simplicibus constent numeris. Quo magis enim singuli termini fuerint complicati; eo majore labore quiuis is fractionem decimalem convertetur, et fortasse plus operae requiretur ad decem terminos colligendos, quam mille terminos alius seriei simplicioris, tanto minus autem convergentis. Deinde vero ad calculum faciliorem reddendum quisque terminus ita debet esse comparatus, ut praecedente iam in fractionem decimalem evoluto, sequens ex eo facile inveniri queat; quae proprietas potissimum in series geometricas iisque affines cadit, in quibus quilibet terminus ex praecedente per solam divisionem obtinetur. Hancobrem ex seriebus, quibus ar us circulares exprimi solent, eae praecipue ad hunc usum erunt accommodatae, quae ex tangente geometricis hoc tantum differunt, quod singuli termini per numeros impares insuper sint divisi, unde in calculo parum nascitur molestiae.

§5. Reiectis igitur aliis seriebus, quibus arcus vel ex sinu vel chorda definitur, tanquam ad nostrum institutum minus idoneis, praecipue eam seriem contemplabimur, qua ex data tangente arcus circuli respondens determinatur. Est autem posito radio circuli $= 1$, arcus tangenti x respondens $= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} -$ etc. in infinitum; ex qua intelligitur, quo minor accipiatur tangens x eo facilius arcum respondentem assignari posse. Posito scilicet $x = \frac{1}{10}$, facili negotio arcus tangenti $\frac{1}{10}$ respondens in fractione decimali etiam ad mille figuras definiri posset; minori vero etiam opera arcus determinaretur, qui tangenti $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{1000}$ etc. responderet. Sed hinc ne minimum quidem subsidium consequitur ad rationem, quam diameter ad totam peripheriam tenet, cognoscendam; cum omnes istiusmodi arcus, quorum tangentes sunt $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ seu tales, quae seriem vehementer convergentem et simul levi labore summabilem reddant, cum integra peripheria sint incommensurabiles, atque ratio inter eos et peripheriam assignari penitus nequeat.

§6. Quo igitur huius seriei ope ratio, quam diameter ad peripheriam tenet, investigari possit, talis tangens pro x substitui debet, cuius arcus respondens ad totam peripheriam rationem habeat cognitam. Arcuum autem cum tota peripheria commensuarabilium unicus datur, qui tangentem habeat

[2]Machin's work was published in *Synopsis palmorium mathescos* by W. Jones in 1706.

[3]DeLagny's work was published in his *Mémoire sur la quadrature du circle, et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donneé* in 1721.

[4]The approximation reported in this paragraph is incorrect at its 113^{th} place, which should be an 8 rather than a 7. This error in DeLagny's work was noted and corrected by Vega in 1794 in his *Thesaurus logarithmorum completus*.

rationalem, isque est arcus 45°, eius scilicet tangens radio circuli 1 aequatur. Posito ergo $x = 1$, prodibit octava totius peripheriae pars

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

quae ipsa series Leibnitiana, ita ut hinc prodeat ratio diametri ad peripheriam ut 1 ad

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ etc.}\right).$$

Haec autem series tam parum convergit, ut plures quam 10^{20} termini collegi deberent, quo fractio decimalis ad centum tantum figuras extendatur; qui labor fere in aeternum superari non posset. Plura quidem habentur compendia, quibus ista summatio facilior reddi posset, sed cum iis haec series in alias transformetur, in series alias magis convergentes potius inquiram, quibus immediate scopus intentus obtineri queat.

§7. Aliud igitur subsidium superesse non videtur, nisi ut arcus talis quaeratur, cuius tangens quidem sit irrationalis, sed tamen unico constet termino; si enim pro x quantitas irrationalis magis composita substitueretur, tum labor ad terminos colligendos insuperabilis evaderet, etiam si series maxime convergeret. Duo autem tantum extant huiusmodi arcus, alter 60° alter 30°, quorum illius tangens est $= \sqrt{3}$ huius vero $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponamus ergo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nam pro x non substitui convenit $\sqrt{3}$, quia series divergens orietur; eritque duodecima totius peripheriae pars

$$= \frac{1}{1\cdot\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot 3\cdot\sqrt{3}} + \frac{1}{5\cdot 3^2\cdot\sqrt{3}} - \frac{1}{7\cdot 3^3\cdot\sqrt{3}} + \frac{1}{9\cdot 3^4\cdot\sqrt{3}} - \text{etc.}$$

unde ratio diametri ad peripheriam prodit ut

$$1 \text{ ad } \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \text{ etc.}$$

quam series iam satis convergit, cum quisque terminus plus quam ter minor sit praecedente. Colligendis autem circiter 210 terminis, ratio in fractionibus decimalibus ad centum figuras exacta obtinebitur, qui labor iam suberabilis foret.

§8. Ope huius seriei etiam revera a Geometris Anglis ratio diametri ad peripheriam in fractionibus decimalibus usque ad 74 figuras exacta est determinata; atque integer calculus extat in tabulis mathematicis a *Scharpio* aliisque editis[5]. Maxima autem huius calculi difficultas in hoc consistit, quod ante omnia radicem quadratam ex 3 in fractionibus decimalibus ad tot figuras extrahi oportet, ad quot ratio quaesita exacta esse debet. Inventa autem fractione decimali ad 100 v. gr. figuras justa, quae ipsi $2\sqrt{3}$ seu $\sqrt{12}$ sit aequalis, tum haec fractio continuo per 3 est dividenda, quo obtineantur termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3^2}, \frac{2\sqrt{3}}{3^3}, \text{ etc.}$$

Quo facto isti termini successive per numeros impares 1, 3, 5, 7, etc. sunt dividendi, ut prodeant ipsi seriei termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1}, \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}, \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2}, \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3}, \text{ etc.}$$

[5] In *Mathematical tables* by Briggs, Wallis, Halley, and Sharp, 1705

Denique summa terminorum ordine parium a summa ordine imparium subtrahatur, et residuum dabit valorem peripheriam circuli exprimentem, cuius diameter est $= 1$.

§9. Antequam autem exponam; quomodo ope eiusdem seriei, qua arcus ex data tangente exprimitur, proxima ratio diametri ad peripheriam multo facilius et exactius definiri queat, conveniet compendium aliquod monstrasse, cuius beneficio huiusmodi serierum summa multo leviori opera inveniri poterit. Scilicet cum arcus tangenti $\frac{1}{p}$ respondens sit

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} + \text{ etc.}$$

Huius seriei ponamus iam n terminos in unam summam esse collectos, existente n numero pari; summamque inventam esse $= S$, dico fore summam totius seriei in infinitum continuatae [6]

$$\begin{aligned} = \quad & S + \frac{1}{p^{2n+1}} \left(\frac{1}{(1+p^2)(2n+1)} - \frac{2p^2}{(1+p^2)^2(2n+1)^2} \right. \\ + \quad & \left. \frac{2^2(p^4-p^2)}{(1+p^2)^3(2n+1)^3} - \frac{2^3(p^6-4p^4+p^2)}{(1+pp)^4(2n+1)^4} + \text{ etc.} \right) \end{aligned}$$

Reliquorum ergo terminorum summatio reducitur ad summationem alius seriei, in qua quisque terminus circiter [7] $2n+1$ vicibus minor est praecedente; ita ut quo plures termini actu fuerint collecti, ista nova series eo magis fiat convergens.

§10. Quamvis haec nova series, quae summam omnium reliquorum terminorum prioris seriei complectitur, vehementer convergat, tamen, ad eius summam inveniendam nova quoque compendia adhiberi possint. Posita enim summa

$$\overset{1}{\frac{1}{p}} - \overset{2}{\frac{1}{3p^3}} + \overset{3}{\frac{1}{5p^5}} - \cdots - \overset{n}{\frac{1}{(2n-1)p^{2n-1}}} = S,$$

erit arcus, cuius tangens est $\frac{1}{p}$

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+p^2-1)} \text{ proxime,}$$

qui valor eo erit exactior, quo plures termini actu fuerint collecti, seu quo minor fuerit numerus n, modo sit par uti monui. Atque si fuerit $n = p^\mu$ tum haec forma fractionem decimalem justam reddet ad tot figuras, quot exprimit $(2n+3+3\mu)lp$[8]. Facto autem brevitatis gratia[9]

$$\frac{2}{(1+pp)(2n+1)} = q$$

[6] The original paper has the following formula stated incorrectly as $S + \frac{1}{p^{2n-1}} \left(\frac{1}{(1+p^2)(2n-1)} - \frac{2p^2}{(1+p^2)^2(2n-1)^2} + \frac{2^2(p^4-p^2)}{(1+p^2)^3(2n-1)^3} - \frac{2^3(p^6-4p^4+p^2)}{(1+pp)^4(2n-1)^4} + \text{ etc.} \right)$. The equation was corrected in the *Opera Omnia*.

[7] Corrected in *Opera Omnia* from $2n-1$ in the original paper.

[8] In the preceding equation, $lp \equiv \log_{10} p$.

[9] Corrected in *Opera Omnia* from $\frac{2}{(1+pp)(2n-1)} = q$ in the original paper.

erit vera summa seriei[10]

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{3p^3}+\frac{1}{5p^5}- \text{ etc. in infinitum continuatae}$$

$$= S+\frac{1}{2p^{2n-1}}\left(\frac{q}{1+qp^2+q^2p^2-q^3(2p^4-p^2)+q^4(4p^6-8p^4+p^2)\text{ etc.}}\right)$$

seu $\frac{1}{2p^{2n-1}}$ denuo dividi debet per[11]

$$\frac{1}{q}+p^2+qp^2-q^2(2p^4-p^2)+q^3(4p^6-8p^4+p^2)- \text{ etc.}$$

et quotus resultans ad S adjectus dabit arcum, cuius tangens $=\frac{1}{p}$.

§11. His expositis subsidiis, quae consequentur ex methodo mea series summandi alibi tradita[12], progredior ad aliam viam multo faciliorem aperiendam, qua eiusdem seriei arcum ex data tangente exprimentis ope ratio diametri ad peripheriam quantumvis exacte levi opera definiri potest, sine ulla taediosa radicum extractione. Resolvo scilicet arcum cuius tangens est $=1$ in duos pluresque arcus, quorum tangentes sint rationales. Cum enim horum arcuum tangentes sint unitate minores, ex iis per seriem generalem arcus ipsi facile determinari potest. Qui arcus in se spectari etiamsi cum tota peripheria sint incommeniurabiles, tamen quia conjunctim sumti arcui 45 graduum cuius tangens $=1$, aequantur; eorum summa dabit octavam totius peripheriae partem, ex qua ratio diametri ad peripheriam quaesita sponte fluit. Posito $\alpha=$ arcus cuius tangens $=1$, erit diameter ad peripheriam ut 1 ad 4α.

§12. Ponamus ergo $At1 = At\frac{1}{a}+At\frac{1}{b}$ debebit esse $1=\frac{a+b}{ab-1}$; unde fiet $ab-1=a+b$ atque $b=\frac{a+1}{a-1}$. Quo autem a et b fiant numeri integri, quod ad calculum faciliorem reddendum requiritur, pono $a=2$, eritque $b=3$. Arcus ergo cuius tangens $=1$, quem posui $=\alpha$ aequalis est summae arcuum quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$. Quocirca arcus α aequabitur aggregato duarum sequentium serierum

$$+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\text{ etc.}$$
$$+\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\text{ etc.}$$

quarum utraque magis convergit, quam illa superior ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ deducta, nec ulla radicum extractione impeditur. Quare ope harum duarum serierum ratio diametri ad peripheriam leviori negotio ad multo plures figuras exacta definiri poterit, quam per unicam illam seriem fieri licuit, praesertim si subsidia indicata adhibeantur.

[10] Corrected in *Opera Omnia* from $S+\frac{1}{2p^{2n-1}}\left(\frac{q}{1+qp^2+q^2p^2-q^3(2p^4-p^2)+q^4(4p^6-8p^4+p^2)-\text{ etc.}}\right)$ in the original paper.

[11] Corrected in *Opera Omnia* from $\frac{1}{q}+p^2+qp^2-q^2(2p^4-p^2)+q^3(4p^6-8p^4+p^2)-$ etc. in the original paper.

[12] The formula at the bottom of the preceding page may be found by transforming a series given in §16 of *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **8**,1741, pp. 147-158. [E55], substituting $\frac{\sqrt{-1}}{p}$ for n and $2n+1$ for x.

§13. Si nunc seriei

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\text{ etc.}$$

summa in fractionibus decimalibus desideretur justa ad centum figuras, tum colligi debent 154 termini, atque ad eorum summam addi opprtet $\frac{1}{2^{307}\cdot 1543}$, quo summa quaesita obtineatur; unico scilicet subidio §10 indicato utor, quo tota seriei summa erat

$$=S+\frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+pp-1)}.$$

Sin autem summa ad 200 figuras desideretur tum 318 termini actu colligi debebunt. Altera vero series

$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\text{ etc.}$$

ad fractionem decimalem, quae ne in centesima quidem figura fallat, reducetur colligendis actu 98 terminis[13]; quo autem ad ducentas figuras exacta obtineatur, 202 termini actu sunt colligendi[14]. Ad rationem ergo diametri ad peripheriam in fractione decimali ad 100 figuras justa inveniendam simul 252 termini addi debent [15], dum ad idem obtinendum ex serie

$$\frac{1}{1\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}-\text{etc.}$$

sola plures quam 200 termini addi debent.

§14. His autem vestigiis insistendis in promptu erit arcum α cuius tangens $=1$ infinitis aliis modis in duos pluresque arcus resolvere, quae series multo magis convergentes producant. Cum enim sit

$$At\frac{1}{p}=At\frac{1}{p+q}+At\frac{q}{p^2+pq+1},$$

erit

$$At\frac{1}{2}=At\frac{1}{3}+At\frac{1}{7}.$$

Quare cum sit

$$\alpha=At\frac{1}{2}+At\frac{1}{3},$$

erit nunc

$$\alpha=2At\frac{1}{3}+At\frac{1}{7},$$

atque α iterum his duabus seriebus conjunctis aequabitur

$$+\frac{2}{1\cdot 3}-\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}-\frac{2}{7\cdot 3^7}+\text{ etc.}$$

$$+\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}-\frac{1}{7\cdot 7^7}+\text{ etc.}$$

[13]The original paper and *Opera Omnia* have an incorrect value of 96 terms.
[14]The original paper and *Opera Omnia* have an incorrect value of 200 terms.
[15]The original paper and *Opera Omnia* have an incorrect value of 250 terms.

quae multo magis convergunt, quam priores. Commodissima autem forte resolutio erit

$$\alpha = 4At\frac{1}{5} - At\frac{1}{239}$$

vel

$$\alpha = 4At\frac{1}{5} - At\frac{1}{70} + At\frac{1}{99},$$

quippe qui arcus ope serierum maxime convergentium definiri possunt. Sed quisque, cui lubuerit huiusmodi calculum suscipere, facile sibi commodissimam resolutionem eliget.

§15. Possunt quoque aliae series, quibus etiam arcus ex data tangente definitur, non minori successu usurpari, si ita visum fuerit; series autem hae, quae commode in usum vocari poterunt, sunt frequentes praecipue.

$$\begin{aligned}
At.\frac{p}{p^2-1} &= \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} - \frac{2}{9p^9} - \frac{1}{11p^{11}} + \text{ etc.}\\
At.\frac{2p}{2p^2-1} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{3\cdot\ 2p^3} + \frac{1}{5\cdot 2^2\,p^5} - \frac{1}{7\cdot 2^3\,p^7} - \frac{1}{9\cdot 2^4\,p^9} + \text{ etc.}\\
At.\frac{3p}{3p^2-1} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{5\cdot 3^2\cdot p^5} + \frac{1}{7\cdot 3^3\cdot p^7} - \frac{1}{11\cdot 3^5\cdot p^{11}} + \frac{1}{13\cdot 3^6\cdot p^{13}} - \text{ etc.}\\
At.\frac{3p(pp-1)}{p^4-4pp+1} &= \frac{3}{1\cdot p} + \frac{3}{5\cdot p^5} - \frac{3}{7\cdot p^7} - \frac{3}{11\cdot p^{11}} + \frac{3}{13\cdot p^{13}} + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Ex hac ultima serie est ponendo $p = 2$

$$At\ 18 = 3\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}} + \frac{1}{17\cdot 2^{17}} - \text{ etc.}\right)$$

ad quem arcum si addatur $At\ \frac{1}{18}$, qui per vulgarem seriem facile exhibitur, prodit quarta peripheriae pars seu 2α. Simili modo ex serie secunda prodit $2\alpha =$

$$1 + \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{5\cdot 2^2} - \frac{1}{7\cdot 2^3} + \frac{1}{9\cdot 2^4} + \frac{1}{11\cdot 2^5} - \text{ etc.}$$

$$+\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \text{ etc.}$$

§16. Quando autem in hoc negotio arcus fuerit invenindus per seriem Leibnitianam, cuius tangens quidem sit parua, sed ejus numerator non $= 1$, tum difficulter singulos seriei terminos evoluere liceret. His igitur casibus conveniet arcum in duos alios resolvere, quorum tangentes pro numeratore habeant unitatem, id quod saepius fieri potest. Sit enim arcus investigandus cuius tangens est $\frac{a}{b}$; ponatur $At\frac{a}{b} = At\frac{1}{m} + At\frac{1}{n}$; eritque $\frac{m+n}{mn-1} = \frac{a}{b}$. Hinc fiet $(ma-b)(na-b) = a^2+b^2$. Quamobrem inquirendum est, utrum a^2+b^2 in duos factores resolui possit, quorum uterque denominatore b auctus per numeratorem a fiat divisibilis. Quod cum accederit erunt quoti ex istis divisionibus orti valores pro m et n substituendi. Sic si quaerendus sit arcus cuius tangens $= \frac{7}{9}$, quia est $7^2+9^2=130=5\cdot 26$ erunt valores pro m et n hi $\frac{5+9}{7}$ et $\frac{26+9}{7}$ seu 2 et 5. Erit itaque $At\frac{7}{9}=At\frac{1}{2}+At\frac{1}{5}$, unde non difficulter $At\frac{7}{9}$ reperitur.

§17. Saepius autem cum summa quadratorum non habet factores huius indolis, arcus in duos ejusmodi alios arcus resolui nequit. His ergo casibus propositus arcus in tres pluresque arcus resolui debebit, quos sequenti modo fiet. Sit propositus arcus cuius tangens est [16] $\frac{x}{y}$ erit [17]

$$At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{1}{a}.$$

Si nunc in integris valor pro a inveniri nequeat, ut $ax-y$ fiat divisor ipsius $ay+x$, tum saltem in fractis quearatur, et pro $At\frac{1}{a}$ ponatur $At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{1}{b}$; denuoque dispiciatur, utrum detur numerus integer, qui pro b substitutus reddat $b-a$ divisorem ipsius $ab+1$. Ita ergo pergendo sequentes orientur formulae

I. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{1}{a}.$

II. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{1}{b}$

III. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{c-b}{bc+1}+At\frac{1}{c}$

IV. $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{c-b}{bc+1}+At\frac{d-c}{cd+1}+At\frac{1}{d}$

§18. Si ergo a, b, c, d, etc. fuerit progressio quaecunque numerorum tandem in infinitum crescentium, habebimus seriem arcuum infinitam, qui omnes simul sumti dato arcui aequantur. Erit scilicet

$$At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{b-a}{ab+1}+At\frac{c-b}{bc+1}+At\frac{d-c}{cd+1}+At\frac{e-d}{de+1}+\text{ etc.}$$

Necesse autem est ut progressionis a, b, c, d, etc. terminus infinitesimus sit infinite magnus, quia arcus cuius ille cotangens est negligitur, hinc non contemnandae sequuntur series arcuum summabiles; ut posito $\frac{x}{y}=1$ et pro a, b, c, d, etc. series numerorum imparium 3, 5, 7, 9, etc. habebitur

$$At1=At\frac{1}{2}+At\frac{1}{8}+At\frac{1}{18}+At\frac{1}{32}+\text{ etc.}$$

in qua tangentium denominatores sunt dupla quadrata numerorum naturalium. Simili modo erit

$$At1=At\frac{1}{3}+At\frac{1}{7}+At\frac{1}{13}+At\frac{1}{21}+At\frac{1}{31}+\text{ etc.}$$

[16] The text reads x/a for x/y here, and reads $1/b$ for $1/a$ in the next equation.

[17] The original paper reads x/a for x/y here, and states the next equation incorrectly as $At\frac{x}{y}=At\frac{ax-y}{ay+x}+At\frac{1}{b}$. These were corrected in the *Opera Omnia*.

§19. Coronidis loco theorema non inelegans subjungam, quod ad naturam circuli penitus inspiciendam inseruire potest. In circulo scilicet cuius radius seu sinus totus $= 1$, est arcus quicunque A aequalis huic valori

$$\frac{\sin.A}{\cos.\frac{1}{2}A.\ \cos\frac{1}{4}A.\ \cos\frac{1}{8}A.\ \cos\frac{1}{16}A.\ \text{etc.}}$$

Vel quod perinde est per secantes erit

$$A = \sin.A.\ \sec.\tfrac{1}{2}A.\ \sec\tfrac{1}{4}A.\ \sec\tfrac{1}{8}A.\ \sec\tfrac{1}{16}A.\ \text{etc.}$$

quae expressio commode adhiberi potest ad logarithmum cuiusvis arcus ex datis logarithmis sinuum et secantium inveniendum: erit scilicet

$$\text{l}.A = \text{l.sin}.A + \text{l.sec}.\tfrac{1}{2}A + \text{l.sec}.\tfrac{1}{4}A + \text{l.sec}.\tfrac{1}{8}A + \text{etc.}$$

ubi notandum, si tabula logarithmorum consueta utamur, a quovis logarithmo logarithmum sinus totiua auferri debere. Sic si logarithmus arcus 1 gradus quaeratur erit

$$\begin{array}{lcr}
\text{log.sin. } 1^\circ & = & (-2)\,,2418553 \\
\text{log.sec. } 30' & = & 0\,,0000165 \\
\text{log.sec. } 15' & = & 0\,,0000041 \\
\text{log.sec. } 7\frac{1}{2}' & = & 0\,,0000010 \\
\text{log.sec. } 3\frac{1}{4}' & = & 0\,,0000003 \\
\cline{2-3}
\text{log. Arc. } 1^\circ & = & (-2)\,,2418772
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr}
\text{log. } 180 & = & 2\,,2552725 \\
\text{l. A. } 1^\circ & = & (-2)\,,2418762 \\
\hline
\text{l. A. } 180^\circ & = & 0\,,4971497
\end{array}$$

cui logarithmo respondet numerus $3,14159$.[18]

§20. Demonstratio huius theorematis pendet a mutua relatione sinuum et cosinuum angulorum, qui inter se rationem duplam tenent. Cum enim sinus anguli cuiusque in suum cosinum multiplicatus producat semissim sinus anguli dupli, aequabitur sinus cuiusvis anguli per cosinum dimidii anguli divisus duplo sinus anguli dimidii ita erit

$$\frac{\sin.A}{\text{cosin}.\frac{1}{2}A} = 2\,\sin.\frac{1}{2}A.$$

Simili ratione cum sit

$$\frac{\sin.A}{\text{cosin}.\frac{1}{2}A.\ \text{cosin}.\frac{1}{4}A} = \frac{2\,\sin.\frac{1}{2}A.}{\text{cosin}.\frac{1}{4}A}.$$

erit per eandem proprietatem

[18] The sum leading to the value of log. Arc. 1° was reported incorrectly as -2.2418762, in the original paper, and thus the value of l. A. 180° was incorrectly reported as 0.4971487. The errors were corrected in the *Opera Omnia*.

$$\frac{\sin.A}{\operatorname{cosin.}\frac{1}{2}A.\ \operatorname{cosin.}\frac{1}{4}A} = 4\sin.\frac{1}{4}A.$$

Atque ulterius pergendo habebitur

$$\frac{\sin.A}{\operatorname{cosin.}\frac{1}{2}A.\ \operatorname{cosin.}\frac{1}{4}A.\ \operatorname{cosin.}\frac{1}{8}A} = 8\sin.\frac{1}{8}A \text{ etc.}$$

Ex quibus concluditur, si progressio cosinuum in infinitum continuetur, fore

$$\frac{\sin.A}{\operatorname{cosin.}\frac{1}{2}A.\ \operatorname{cosin.}\frac{1}{4}A.\ \operatorname{cosin.}\frac{1}{8}A.\ \operatorname{cosin.}\frac{1}{16}A \ \text{ etc.}} = \infty \sin.\frac{1}{\infty}A.$$

$=$ arcui ipsi A. Q. E. D.