Lösung der Probleme, die die Rektifikation der Ellipse erfordern*

Leonhard Euler

§1 Probleme dieser Art, in denen eine Kurve verlangt wurde, die von einer gegebenen unendlichen Kurvenschar gleiche Bogen abschneiden würde, sind unter den Mathematikern schon im vorherigen Jahrhundert behandelt worden. Zu jener Zeit hat auch der aller größte Mathematiker elegante Lösungen für den Fall mitgeteilt, in dem die von der Position gegebenen Kurven untereinander gleich sind, wo von einer Kreis– oder Parabelschar gleiche Bogen abzuschneiden waren. Niemand aber, soweit es bekannt ist, ist weiter vorangeschritten und niemand hat das Problem für verschiedene Kurven gelöst, auch wenn dann nur die Frage über eine Ellipsenschar vorgelegt war. Und noch immer, nachdem ich jenem herausragenden Mathematiker durch Briefe mitgeteilt hatte, dass ich die Gleichung für die Kurve, die von unendlich vielen verschiedenen Ellipsen gleiche Bogen abschneiden würde, gefunden habe, antwortete jener mir, dass die Lösung dieses Problems nicht in seiner Macht ist und bat mich zugleich, dass ich meine Lösung für einen nicht zu verachtenden Zuwachs der Analysis mitteile.

§2 Die größte Schwierigkeit dieser Frage besteht aber darin, dass die Rektifikationen der verschiedenen und unterschiedlichen Ellipsen voneinander nicht abhängen. Deswegen muss die Gleichung der Kurve, die von den unendlich vielen Ellipsen gleiche Bogen abschneidet, nämlich besonders schwer zu finden sein, weil auch, nachdem die Rektfikation einer einzigen Ellipse erlaubt

*Originaltitel: „Solutio problematum rectivicationem ellipsis requirentium“, erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, pp. 86-98“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 20, pp. 8 - 20“, Eneström-Nummer E52, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

wurde, dennoch die Rektifikation aller übrigen von dieser nicht abhängt. Darauf ist die Methode, die sie bei Problemen solcher Art zu benutzen pflegen, so beschaffen, dass sie nur auf gleiche Kurven angewendet werden kann, für verschiedene Kurven aber keinen Nutzen bringt.

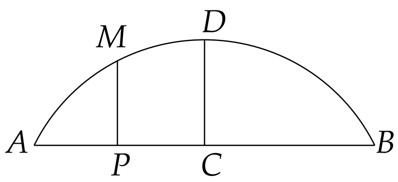
§3 Was mir aber zuerst einen Weg zu schweren Problemen dieser Art eröffnet hat, ist besonders meine allgemeine Methode Reihen zu summieren. Nachdem diese nämlich gefunden worden war, habe ich eine Differentialgleichung, in welcher die Unbestimmten auf keine Weise voneinander getrennt werden konnten, mithilfe der Rektifikation von verschiedenen Ellipsen konstruiert und ein wenig später habe ich eine Konstruktion der besonders intensiv behandelten Riccati-Gleichung und die Auflösung dieser mitgeteilt.

§4 Bald darauf aber, weil die Methode durch Reihen zu operieren zu arbeitsaufwendig und nicht natürlich genug schien, habe ich nach einer anderen natürlicheren und für Fragen dieser Art geeigneteren Methode gesucht; und schließlich habe ich eine nach Wunsch erhalten, sodass ich mit ihrer Hilfe nicht nur die ersten Probleme, die ich mit Hilfe von Reihen gelöst hatte, sondern auch unzählige andere, bei welchen, um sie zu behandeln, Reihen nicht ausreichen, erledigen konnte. Ich habe diese Methode auch schon gründlich in der Abhandlung „Über unendlich viele Kurven derselben Art“, die im vorhergehenden Jahr [1734] vorgelegt wurde, erörtert; weil aber, damit ich nicht zu langwierig wurde, ich keine Beispiele hinzugefügt habe, ist nicht hinreichend klar, wie weit sich diese erstreckt und was für ein großes Feld in der Analysis sie eröffnet.

§5 Damit man also die Möglichkeiten dieser Methode und die Nützlichkeit besser begreift, werde ich sie in dieser Abhandlung auf unendlich viele Ellipsen anwenden und werde nicht nur zeigen, wie von einer unendlichen Ellipsenschar gleiche Bogen abgeschnitten werden, sondern werde auch lehren die Auflösung unzähliger Differentialgleichungen so von erster Ordnung wie von zweiter Ordnung mithilfe der Rektifikation von Ellipsen zu erreichen.

§6 Was nämlich die Kurve, die von den unendlichen Ellipsen gleiche Bogen abschneiden soll, betrifft, so ist ihre Konstruktion an sich leicht, weil die mithilfe der Rektifikation von Kurven, die sehr leicht beschrieben werden können, erreicht werden kann. Und ich glaube, dass diese Konstruktion selbst anderen durch Quadraturen von Kurven durchgeführten Konstruktionen weit vorzuziehen ist. Es wird also nicht so die Konstruktion jener Kurve wie ihre Gleichung verlangt, damit, wie viele Gleichungen so leicht konstruiert werden können, man sie erkennt. Deswegen wird die Analysis nicht wenig an Zuwachs erhalten, wenn jene Gleichungen vorgebracht werden, die mithilfe der Rektifitkation von Ellipsen eine Konstruktion erlauben.

§7 Ich betrachte also zuerst die unendlich vielen Ellipsen $AMDB$, die alle als die eine Achse, deren Hälfte CD ist, dieselbe haben, aber verschieden dazu orthogonale Achsen AB. Wenn nun von all diesen Ellipsen entweder gleiche Bogen abzuschneiden sind oder in einem gegebenen Verhältnis ungleiche oder eine Kurve zu finden ist, deren Konstruktion mithilfe Ellipsen wie auch immer beschrieben werden wird, dann ist es nötig, um alle solche Probleme zu lösen, dass man eine Gleichung zwischen dem Bogen AM, der Abszisse AP und der Achse AB hat, in welcher diese 3 Größen als Variablen enthalten sind.



§8 Die Lösung von Problemen solcher Art wird man also erreichen, wenn man die modulare Gleichung, wie ich in der zitierten Gleichung über die unendlich vielen Kurven derselben Art gelehrt habe, zwischen dem Bogen AM und der Abszisse AP und auch variablen Achse HP sucht. Damit ich also zu einer modularen Gleichung dieser Art gelange, setze ich die Abszisse $AP = t$, die Ordinate $PM = u$, den Bogen $AM = z$, die variable Halbachse $AC = a$, die konstante Halbachse $CD = c$. Nachdem diese aber gesetzt worden sind, wird $u = \frac{c}{a}\sqrt{2at - tt}$ sein oder für $t = ax$ gesetzt wird $u = c\sqrt{2x - xx}$ sein und $\mathrm{d}t = a\mathrm{d}x$ und

$$\mathrm{d}u = \frac{c\mathrm{d}x - cx\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - xx}}.$$

Daraus wird also

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\frac{\sqrt{2a^2x - a^2x^2 + c^2 - 2c^2x + c^2x^2}}{\sqrt{2x - xx}}$$

werden und für $a^2 - c^2 = b^2$ wird

$$z = \int \frac{\mathrm{d}x\sqrt{c^2 + b^2(2x - xx)}}{\sqrt{2x - xx}}$$

sein.

§9 Diesem gefundenen Integral wird also z gleich, wenn die Integration ausgeführt wird, nachdem nur x als Variable, b und c aber als Konstanten gesetzt wurden. Außerdem aber muss bei der Integration eine solche Konstante hinzugefügt werden, dass z für $x = 0$ gesetzt verschwindet. Aber weil man eine Gleichung haben möchte, in welcher eine Variable enthalten sein soll wie x und z, sucht man eine Differentialgleichung, die hervorgehen würde, wenn

$$\int \frac{\mathrm{d}x\sqrt{c^2 + b^2(2x - xx)}}{\sqrt{2x - xx}}$$

erneut differentiert wird, nachdem außer x auch b als Variable gesetzt worden ist.

§10 Man setze nun nach der im vergangenen Jahr gegebenen Methode x als Konstante und differentiere die Größe

$$\frac{\sqrt{cc + bb(2x - xx)}}{\sqrt{2x - xx}};$$

es wird

$$\frac{b\mathrm{d}b\sqrt{2x - xx}}{\sqrt{cc + bb(2x - xx)}}$$

hervorgehen. Deswegen wird, nachdem auch b als Variable gesetzt wurde,

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x\sqrt{cc + bb(2x - xx)}}{\sqrt{2x - xx}} + \mathrm{d}b\int \frac{b\mathrm{d}x\sqrt{2x - xx}}{\sqrt{cc + bb(2x - xx)}}$$

sein, welches letzte Integral so genommen werden muss, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet; bei ihm ist aber wiederum b als Konstante enthalten. Man setze der Kürze wegen

$$R = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b} - \frac{\mathrm{d}x\sqrt{cc + bb(2x - xx)}}{\mathrm{d}b\sqrt{2x - xx}};$$

es wird

$$R = \int \frac{b\mathrm{d}b\sqrt{2x - xx}}{\sqrt{cc + bb(2x - xx)}}$$

sein.

§11 Wenn nun das Integral, dem R gleich wird, auf die Integration einer Formel zurückgeführt werden könnte, der z gleich ist, könnte für R ein endlicher Wert durch z gefunden werden, der in die andere Gleichung eingesetzt die gesuchte modulare Gleichung gäbe. Aber diese zwei Integrationen hängen voneinander nicht ab, wie man durch Nachprüfen leicht erkennt. Deshalb muss man weiter voranschreiten und die letzte Gleichung erneut wie die erste differenzieren, indem man auch b als Variable setzt. Man wird aber auf diese Weise

$$\mathrm{d}R = \frac{b\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} + \mathrm{d}b\int\frac{cc\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$$

finden, welches Integral wiederum so genommen werden muss, dass es für $x=0$ gesetzt verschwindet.

§12 Man setze wiederum

$$S = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}b} - \frac{b\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{\mathrm{d}b\sqrt{cc+bb(2x-xx)}};$$

es wird

$$S = \int\frac{cc\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$$

sein; weil diese Formel nicht integrierbar ist, ist zu sehen, ob ihre Integration von einer der beiden vorhergehenden oder von jeder der beiden abhängt. Damit das klar ist, setze man $S+\alpha R+\beta z = Q$, wo α und β von x und z freie Größen sind, Q aber irgendwie aus x und b und Konstanten zusammengesetzt ist; es muss aber Q eine solche Größe sein, dass sie für $x=0$ verschwindet; Nachdem also b als Konstante gesetzt wurde, wird $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}S + \alpha\mathrm{d}R + \beta\mathrm{d}z$ sein müssen, wo b im Differential von Q als Konstante betrachtet werden muss.

§13 Aber, nachdem b als Konstante gesetzt wurde, ist

$$\mathrm{d}S = \frac{cc\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}R = \frac{b\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$$

und auch

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}{\sqrt{2x-xx}}.$$

Deswegen wird

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} cc(2x-xx) + abcc(2x-xx) + \alpha b^3(2x-xx)^2 \\ +\beta c^4 + 2\beta b^2c^2(2x-xx) + \beta b^4(2x-xx)^2 \end{bmatrix}$$
$$: [cc + bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x-xx}$$

sein. Man setze aber, um eine einfache Form zu erhalten

$$Q = \frac{(\gamma x+\delta)\sqrt{2x-xx}}{\sqrt{cc+bb(2x-xx)}},$$

welcher Wert für $x=0$ gesetzt per se verschwindet.

§14 Man differenziere nun, nachdem nur x als Variable gesetzt wurde, Q; es wird

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = [\gamma cc(2x-xx) + \gamma bb(2x-xx)^2 + \gamma ccx + \delta cc - \gamma ccx^2 - \delta ccx]$$
$$: [cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x-xx}$$

sein. Weil also die Nenner einander schon gleich sind, werden die Zähler auch gleich, indem man die Terme gleich setzt, in denen der Grad von x gleich ist; es wird

$$\begin{aligned} &\text{I.} && \gamma bb = \alpha b^3 + \beta b^4 \\ &\text{II.} && \gamma b^2 = \alpha b^3 + \beta b^4 \\ &\text{III.} && 4\gamma bb - 2\gamma cc = 4\alpha b^3 + 4\beta b^4 - cc - \alpha bcc - 2\beta b^2c^2 \\ &\text{IV.} && 3\gamma cc - \delta cc = 2cc + 2\alpha bcc + 4\beta b^2c^2 \quad \text{und} \\ &\text{V.} && \delta cc = \beta c^4 \end{aligned}$$

sein. Daher findet man

$$\alpha = \frac{1}{b}, \quad \beta = \frac{-1}{b^2+c^2}, \quad \gamma = \frac{cc}{bb+cc} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{-cc}{bb+cc}$$

§15 Nachdem diese Werte also eingesetzt worden sind, wird

$$\frac{cc(x-1)\sqrt{2x-xx}}{(bb+cc)\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} = S + \frac{R}{b} - \frac{z}{b^2+c^2}$$

hervorgehen. Weil aber

$$R = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b} - \frac{\mathrm{d}x\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}{\mathrm{d}b\sqrt{2x-xx}} \quad \text{und} \quad S = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}b} - \frac{b\mathrm{d}x\sqrt{2x-xx}}{\mathrm{d}b\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$$

ist und

$$x = \frac{t}{a} \quad \text{und} \quad bb = a^2 - c^2$$

und daher

$$bb + cc = a^2, \quad \mathrm{d}x = \frac{a\mathrm{d}a - t\mathrm{d}a}{a^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}b = \frac{a\mathrm{d}a}{b}$$

wird

$$Q = \frac{cc(t-a)\sqrt{2at-tt}}{a^3\sqrt{a^2c^2+(a^2-c^2)(2at-tt)}}$$

sein und

$$\frac{R}{b} - \frac{\mathrm{d}z}{a\mathrm{d}a} - \frac{(a\mathrm{d}t - t\mathrm{d}a)\sqrt{[a^2c^2+(a^2-c^2)(2at-tt)]}}{a^3\mathrm{d}a\sqrt{2at-tt}}$$

und

$$\begin{aligned} S = & \frac{c^2\mathrm{d}z}{a^3\mathrm{d}a} + \frac{a^2-c^2}{a^2\mathrm{d}a}d\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a} - \frac{a^2-c^2}{a^3\mathrm{d}a}d\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}a}\sqrt{\frac{a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)}{2at-tt}} \\ & + \frac{(2a^2-3c^2)(a\mathrm{d}t-t\mathrm{d}a)}{a^5\mathrm{d}a}\sqrt{\frac{a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)}{2at-tt}} \\ & - \frac{(2aa-2cc)(a\mathrm{d}t-t\mathrm{d}a)}{a^3\mathrm{d}a}\sqrt{\frac{2at-tt}{a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)}} \\ & + \frac{cc(a-t)(a^2-c^2)(a\mathrm{d}t-t\mathrm{d}a)^2}{a^3\mathrm{d}a^2(2at-tt)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)}} \end{aligned}$$

§16 Damit wir aber in nicht allzu Rechnungen verwickelt werden, wollen wir die Buchstaben b, x und z beibehalten; es wird

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b} - \frac{1}{\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2b\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+bb(2x-xx)}} \\ & + \frac{cc\mathrm{d}x^2(1-x)}{\mathrm{d}b^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} \end{aligned}$$

sein. Nach Einsetzen dieser anstelle von S und R wird man diese modulare Gleichung haben

$$\begin{aligned}\frac{z}{bb+cc} = \; & \frac{cc(1-x)\sqrt{2x-xx}}{(bb+cc)\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} - \frac{\mathrm{d}x}{b\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} \\ & - \frac{2b\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+bb(2x-xx)}} + \frac{cc\mathrm{d}x^2(1-x)}{\mathrm{d}b^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} \\ & + \frac{\mathrm{d}z}{b\mathrm{d}b} + \frac{1}{\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b} - \frac{1}{\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}.\end{aligned}$$

Und dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher z, x und b in gleicher Weise als Variablen gesetzt worden sind. Aus dieser Gleichung werden aber die folgenden Probleme gelöst.

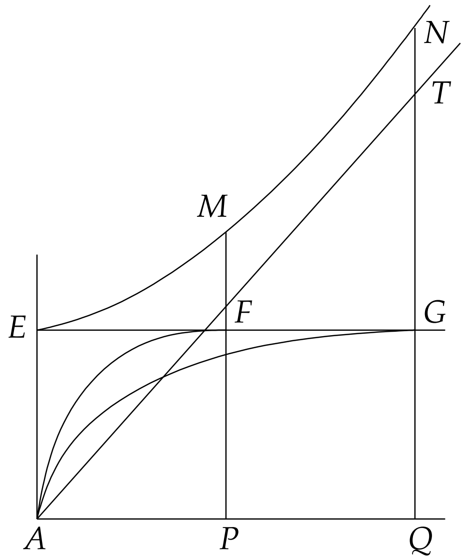
PROBLEM 1

§17 Wenn die Kurve EMN zur Achse APQ so konstruiert wird, dass ihre Ordinate PM dem Quadranten AF der Ellipse gleich sei, von welcher die eine der konjugierten Halbachse die Abszisse AP selbst sei, die andere aber konstant AE oder PF, so ist die Gleichung zwischen der Abszisse AP und der Ordinate PM zu finden, die die Gestalt dieser Kurve ausdrückt.

LÖSUNG

Es ist klar, dass die Kurve EMN durch den Punkt E geht, weil ja, während die Halbachse AP der Ellipse verschwindet, der elliptische Quadrant in die andere konstante Halbachse AE übergeht. Die Gerade AT wird weiter im halbrechten Winkel mit AP zur Asymptote der Kurve EMN geneigt sein, weil, nachdem die Halbachse AP unendlich groß gesetzt wurde, der elliptische Quadrant dieser Halbachse gleich wird. Um diese Gleichung aber zu finden, sei $AE = c$, $AP = t$ und $PM = z = AF$, und weil die Abszisse unter Anbetracht der Ellipse AF ihrer Halbachse gleich ist, wird diese Frage ein Spezialfall der gefundenen Gleichung sein, in welchem $t = a$ oder $x = 1$ ist. Für $x = 1$ gesetzt wird die obere Gleichung also in diese übergehen

$$\frac{z}{bb+cc} = \frac{\mathrm{d}z}{b\mathrm{d}b} + \frac{1}{\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b}$$



Aber weil $bb = a^2 - c^2 = t^2 - c^2$ ist, wird $b\mathrm{d}b = t\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}b = \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{tt-c^2}}$ sein. Und, nachdem $\mathrm{d}t$ als Konstante gesetzt worden ist, wird $\mathrm{dd}b = -\frac{cc\mathrm{d}t^2}{(tt-cc)^{\frac{3}{2}}}$ sein. Daher wird also

$$d \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b} = \frac{\mathrm{dd}z\sqrt{tt-cc}}{t\mathrm{d}t} + \frac{cc\mathrm{d}z}{tt\sqrt{tt-cc}},$$

woher diese Gleichung entsteht

$$\frac{z}{tt} = \frac{\mathrm{d}z}{t\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{dd}z(tt-cc)}{tt\mathrm{d}t^2} + \frac{cc\mathrm{d}z}{t^3\mathrm{d}t}$$

oder

$$tz\mathrm{d}t^2 = (tt+cc)\mathrm{d}t\mathrm{d}z + t\mathrm{dd}z(tt-cc),$$

welches die gesuchte Gleichung für die vorgelegte Kurve ist.

Q.E.I

§18 Ich reduziere diese Gleichung auf die folgende Weise auf Differentiale erster Ordnung, indem ich $z = e^{\int s\mathrm{d}t}$ setze, während $\log e = 1$ wird; es wird also $\mathrm{d}z = e^{\int s\mathrm{d}t}s\mathrm{d}t$ und $\mathrm{dd}z = e^{\int s\mathrm{d}t}(\mathrm{d}s\mathrm{d}t + ss\mathrm{d}t^2)$ sein. Indem man diese Werte einsetzt, entsteht die folgende Gleichung

$$t\mathrm{d}t = (t^2+c^2)s\mathrm{d}t + t(tt-cc)\mathrm{d}s + ts^2(t^2-c^2)\mathrm{d}t;$$

diese ist so beschaffen, dass noch durch keine bekannten Kunstgriffe die Unbestimmten voneinander getrennt werden können. Aber inzwischen ist eine Konstruktion dieser Gleichung mithilfe der Rektifikation der Ellipse bekannt.

§19 Damit aber bei niemanden Zweifel aufkommt, dass für $t = 0$ gesetzt $z = c$ werden muss, obwohl dennoch die oberen Integrationen so genommen werden muss, dass für $x = 0$ gesetzt auch $z = 0$ wird, ist zu erinnern, dass in diesem Fall freilich, in dem $z = c$ ist, $t = 0$ ist; aber es ist nicht auch $x = 0$, weil $x = \frac{t}{a}$ ist und $t = a$ und daher $x = 1$, sodass in diesem Fall niemals $x = 0$ ist, weshalb z irgendwann verschwinden muss.

§20 Wie wir in diesem Fall $t = a$ gesetzt haben, so kann auch irgendeine Gleichung zwischen t und a und den Konstanten erhalten werden und die Kurve EMN so bestimmt werden, dass jede Ordinate PM dem entsprechenden Ellipsenbogen AF gleich ist. Man wird nämlich anstelle der oberen Gleichung diese Gleichung haben

$$\frac{z}{tt} = \frac{(tt + cc)\mathrm{d}z}{t^3\mathrm{d}t} + \frac{(tt - cc)\mathrm{dd}z}{tt\mathrm{d}t^2} + T,$$

während T die Funktion t bezeichnet, die aus den Termen der allgemeinen Gleichung, in denen z nicht enthalten ist, entsteht, wenn $\frac{t}{a}$ anstelle von x gesetzt wird und anstelle von b sein Wert $\sqrt{a^2 - c^2}$ und anstelle von a sein Wert in t aus der zwischen a und t angenommenen Gleichung eingesetzt wird. Und diese Gleichung ist in der Tat von der Behandlung schwerer als die vorhergehende, in welcher der Term T fehlt; es kann natürlich diese Gleichung auf jene zurückgeführt werden, wie ich anderenorts schon gezeigt habe.

Problem 2

§21 Nachdem unendlich viele Ellipsen AOF, ANG, AMH gegeben worden sind, deren eine Halbachse AE konstant sei, die andere aber variabel wie AI, AK, und AL, ist eine Gleichung für die Kurve $BONMC$ zu finden, die von all diesen Ellipsen gleiche Bogen AO, AN, AM abschneiden soll.

LÖSUNG

Nachdem zur Achse AC die Ordinate MP der gesuchten Kurve gezogen worden ist, sei $AP = t$, $PM = u$ und $AE = c$; die Ellipse AMH der variablen Halbachse AL sei aber gleich a und der abgeschnittene Bogen AM, der von konstanter Größe ist, sei gleich f. Nachdem nun $x = \frac{t}{a}$ und $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ gesetzt worden sind, wird $z = f$ und $u = c\sqrt{2x - xx}$ sein. Nach Einsetzen dieser geht also die allgemeine Gleichung zwischen z, x und b über in diese

$$\begin{aligned}\frac{f}{bb+cc} = & \frac{cc(1-x)\sqrt{2x-xx}}{(bb+cc)\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} - \frac{\mathrm{d}x}{b\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} \\ & - \frac{2b\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+bb(2x-xx)}} + \frac{cc\mathrm{d}x^2(1-x)}{\mathrm{d}b^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} \\ & - \frac{1}{\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}\end{aligned}$$

Weil aber $2x - xx = \frac{a^2}{c^2}$ ist, multipliziere man überall mit

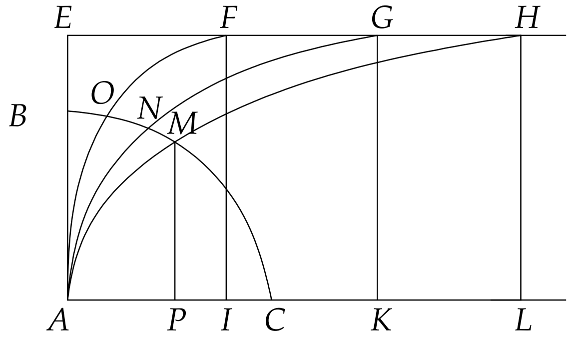
$$\sqrt{cc+bb(2x-xx)} = \frac{\sqrt{c^4+bbuu}}{c}$$

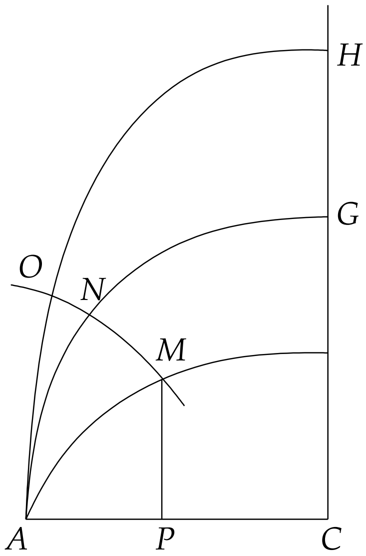
und es wird

$$\frac{f\sqrt{c^4+bbuu}}{a^2c} = \frac{cu(1-x)}{a^2} - \frac{c^3\mathrm{d}x}{bu\mathrm{d}b} - \frac{3bu\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}b} + \frac{c^5\mathrm{d}x^2(1-x)}{u^3\mathrm{d}b^2} - \frac{(c^4+bbuu)}{cu\mathrm{d}b}d\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}$$

hervorgehen. Wenn in dieser Gleichung $\frac{\sqrt{tt-ccxx}}{x}$ anstelle von b eingesetzt wird, wird auch wegen $x = \frac{c-\sqrt{cc-uu}}{c}$ schließlich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen t und u hervorgehen, natürlich zwischen den Koordinaten der gesuchten Kurve.

Q.E.I.





§22 Wenn aber unendlich viele Ellipsen AMF, ANG und AOH alle eine gemeinsame horizontale Achse haben, sodass C das Zentrum aller ist, muss für diesen Fall eine partikuläre modulare Gleichung gefunden werden, bevor sich die Kurve MNO bestimmen lässt, die von allen gleiche Bogen AM, AN, AO abschneiden soll. Es sei also $AC = c$, $CF = a$, $AP = t$, $PM = u$ und der Bogen $AM = z$. Nachdem diese so gesetzt worden sind, wird

$$u = \frac{a}{c}\sqrt{2ct - tt} \quad \text{und} \quad du = \frac{acdt - atdt}{c\sqrt{2ct - tt}}$$

sein und daher wird

$$z = \int \frac{dt}{c}\sqrt{\frac{a^2c^2 + (cc - aa)(2ct - tt)}{2ct - tt}} = \int \frac{du}{a}\sqrt{\frac{a^4 - a^2u^2 + ccuu}{aa - uu}}$$

werden und für $u = ay$ gesetzt wird

$$z = \int \mathrm{d}y \sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}}$$

sein, welches Integral so genommen werden muss, dass z für $y = 0$ gesetzt verschwindet.

§23 Wenn diese erneut differentiert wird, nach dem außer y auch a als Variable gesetzt worden ist, wird man

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}y \sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}} + \mathrm{d}a \int \frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}}}$$

haben und es wird für

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}} = R$$

gesetzt

$$R = \int \frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}}}$$

sein. Daher wird auf dieselbe Weise

$$\mathrm{d}R = \frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}}} + \mathrm{d}a \int \frac{ccyy\mathrm{d}y}{(1-yy)(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}}$$

werden oder

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a} - \frac{a\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a\sqrt{a^2 + \frac{ccyy}{1-yy}}} = \int \frac{ccyy\mathrm{d}y}{(1-yy)(aa + \frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}} = S,$$

der Kürze wegen. Man setze nun $S + \alpha R + \beta z = Q$, wo α und β von y freie Größen sind, Q aber eine Funktion von a und y, die für $y = 0$ gesetzt verschwindet. Um nun α und β zu finden, differenziere man diese Gleichung, nachdem a als Konstante gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}
&\frac{ccyy\mathrm{d}y\sqrt{1-yy}}{aa(1-yy)+ccyy]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha a\mathrm{d}y\sqrt{1-yy}}{\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} + \frac{\beta\mathrm{d}y\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}{\sqrt{1-yy}}\\
&= \begin{pmatrix} ccyy - ccy^4 + \alpha a^3 - 2\alpha a^3y^2 + \alpha a^3y^4 + \alpha accyy - \alpha accy^4 \\ +\beta a^4 - 2\beta a^4y^2 + \beta a^4y^4 + 2\beta a^2c^2y^2 - 2\beta a^2c^2y^4 + \beta c^4y^4 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\\
&: (a^2(1-yy)+ccyy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-yy} = \mathrm{d}Q
\end{aligned}$$

§24 Es sei

$$Q = \frac{\gamma y\sqrt{1-yy}}{\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}$$

und es wird, nachdem sowohl dessen Differential genommen als auch a als Konstante gesetzt und die homologen Terme gleichgesetzt worden sind,

$$\alpha a + \beta a^2 = \gamma, \quad \beta cc = -\gamma, \quad \text{und} \quad 1 + \alpha a + 2\beta a^2 = 0$$

sein. Daraus wird

$$\alpha = \frac{a^2+c^2}{a(a^2-cc)}, \quad \beta = \frac{-1}{a^2-c^2}, \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{cc}{aa-cc}.$$

Und nach Einsetzen dieser Werte wird man schließlich zu dieser modularen Gleichung gelangen

$$\begin{aligned} \frac{z}{aa-cc} =& \frac{(a^2+c^2)\mathrm{d}z}{a\mathrm{d}a(a^2-c^2)} + \frac{1}{\mathrm{d}a}d\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a} - \frac{ccy\sqrt{1-yy}}{(a^2-c^2)\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} \\ &- \frac{(a^2+c^2)\mathrm{d}y\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}{a(a^2-c^2)\mathrm{d}a\sqrt{1-yy}} - \frac{2a\mathrm{d}y\sqrt{1-yy}}{\mathrm{d}a\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} \\ &- \frac{ccy\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}a^2(1-yy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} - \frac{1}{\mathrm{d}a}d\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}}, \end{aligned}$$

in welche a in gleicher Weise als Variable genommen wurde wie y und z und es ist $y = \frac{u}{a}$.

§25 Wenn nun aus diesen unendlich vielen Ellipsen, die eine Achse all welcher konstant $2c$ ist, die andere variabel $2a$, die Kurve EMN nach dem Gesetz konstruiert wird, dass irgendeiner Abszisse $AP = a$ die Ordinate PM entspricht, die dem elliptischen Quadranten unter den Halbachsen a und c gleich seien, wird in diesen Fall also $u = a$ sein und $y = 1$ und $PM = z$. Daher wird man, nachdem $\mathrm{d}a$ als Konstante gesetzt worden ist, für die Kurve EMN diese Gleichung haben

$$az\mathrm{d}a^2 = (a^2+c^2)\mathrm{d}a\mathrm{d}z + a(aa-cc)\mathrm{dd}z.$$

Dies ist die Gleichung selbst, welche wir in der Lösung des Problems 1 gefunden haben; es stimmt nämlich dieser Fall mit jenem Problem überein und, was dort t war, ist hier a.

Problem 3

§26 Nachdem unendlich viele Ellipsen AMF, ANG, AOH beschrieben wurden, die ein gemeinsames Zentrum C und einen gemeinsamen Scheitel A haben, ist die Kurve MNO zu finden, die von all diesen Ellipsen gleiche Bogen AM, AN, AO abschneiden soll.

Lösung

Nachdem die konstante Halbachse all dieser Ellipsen $AC = c$ gesetzt worden ist und die andere variable Halbachse der Ellipse AMF gleich $CF = a$ und die Abszisse der Kurve MNO gleich $AP = t$ und die Ordinate $PM = u$, werde $\frac{u}{a} = y$ und es sei die Länge gleich f, welcher man alle Bogen AM, AN, AO gleich nehme. Nachdem das alles gesetzt worden ist und mit den vorhergehenden zusammengebracht wurde, wird $z = f$ sein und daher

$$\begin{aligned}\frac{f}{a^2-c^2} + \frac{ccy\sqrt{1-yy}}{(a^2-c^2)\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} + \frac{(a^2+c^2)\mathrm{d}y\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}{a(a^2-c^2)\mathrm{d}a\sqrt{1-yy}}\\ + \frac{2a\mathrm{d}y\sqrt{1-yy}}{\mathrm{d}a\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} + \frac{ccy\mathrm{d}y^2}{da^2(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}\\ + \frac{1}{\mathrm{d}a}d\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}} = 0\end{aligned}$$

sein oder

$$\begin{aligned}\frac{f\sqrt{1-yy}}{(a^2-c^2)\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} + \frac{ccy(1-yy)}{(a^2-c^2)(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{(a^2+c^2)\mathrm{d}y}{a(a^2-c^2)\mathrm{d}a}\\ \frac{2a\mathrm{d}y(1-yy)}{\mathrm{d}a(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{ccy\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}a^2(1-yy)(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{1}{\mathrm{d}a}d\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = 0\end{aligned}$$

Wenn in dieser Gleichung $\frac{u}{y}$ anstelle von a gesetzt wird und darauf anstelle von y dieser Wert $\frac{\sqrt{2ct-tt}}{c}$, wird die Gleichung zwischen den Koordinaten t und u der gesuchten Kurve hervorgehen.

Q.E.I.