Über die Konstruktion von Gleichungen mit Hilfe von Schleppbewegung und anderen sich auf die inverse Methode der Tangenten beziehenden Dinge

Leonhard Euler

§1 Durch eine Schleppbewegung werden krumme Linien beschrieben, während ein Faden gegebener Länge, der an dem einen Ende ein Gewicht angeheftet hat, an dem anderen Ende auf einer gegebenen, entweder geraden oder kurvigen, Linie vorwärts gezogen wird; und die krumme Linie, die das Gewicht durch seine Bewegung beschreibt,

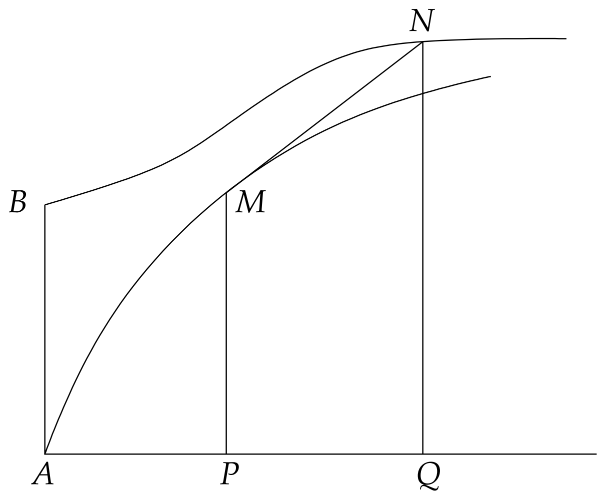

Fig. 1

wird Traktrix genannt. Wenn z. B. der Faden BA in A mit einem Gewicht belastet an dem Ende B auf einer gegebenen Linie BN vorwärts gezogen wird (Fig. 1), wird die Linie AM, auf welcher das andere Ende A bewegt werden wird, die Schleppkurve sein. Von dieser Kurve ist die Eigenschaft bekannt, dass der Faden immer auf der Tangente der Schleppkurve gelegen ist; wann immer natürlich der Faden in der Lage NM ist und auf diese Weise den Punkt M der Schleppkurve erzeugt, wird MN die Tangente der Kurve im Punkt M sein; aus dieser Eigenschaft kann mit Hilfe von Rechnung allein aus einer gegebenen Kurve BN die Gleichung für die Traktrix AM gefunden werden.

§2 Die Begründung dieser Beschreibung ist aber aus der Mechanik herzuholen, weil sie von der Natur der Bewegung abhängt. Ein Körper wird nämlich immer in die Richtung bewegt, in welche er vorwärts gezogen wird, wenn er natürlich nicht ruht; und in diesem Fall ist die Richtung des Fadens, durch den der Körper gezogen wird, die Tangente der vom Körper beschriebenen Kurve. Aber wenn der Körper schon eine Bewegung hat, wird seine Richtung von der Richtung des Fadens abweichen. Daher, damit die Richtung der Bewegung immer auf die Position des Fadens fällt, ist es nötig, dass die Bewegung, die dem Körper schon gegeben wurde, in jedem Moment zugrunde geht. Um dies also zu erhalten, wird erfordert, dass diese Beschreibung über einer horizontalen und hinreichend rauen Ebene vollendet wird, jenes freilich, damit nicht die Schwerkraft die Richtung verändert, dies aber, damit durch Reibung alle schon gewonnene Bewegung vergeht. Außerdem muss der Faden sehr langsam vorwärts gezogen werden, damit der Effekt der Reibung umso größer ist und der Körper nichts an früherer Bewegung beibehält.

§3 Wenn also auf diese Weise die Schleppkurve AM beschrieben wird, wird sie die Eigenschaft haben, dass die aus jedem Punkt M bis zur gegebenen Kurve BN gezogene Tangente MN von gegebener Größe ist. Daraus entsteht sehr leicht eine Art, aus einer gegebenen Schleppkurve AM die Kurve BN zu finden, von welcher jene die Traktrix für die gegebene Länge des Fadens ist. Aber aus einer gegebenen Kurve BN können unzählige Traktrixen entstehen, wobei die Länge des Fadens unverändert geblieben ist, je nachdem wie anfangs die Position des Fadens BA zur Kurve BN geneigt war. Weit schwerer aber ist es durch Rechnung, aus einer gegebenen Kurve BN die Traktrix AM sowie aus einer gegebenen Traktrix die Kurve BN zu finden.

§4 Ich habe aber beobachtet, dass die geometrische Konstruktion der Traktrix AM immer von der Auflösung der Gleichung

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = Z\mathrm{d}z$$

abhängt, während Z irgendeine Funktion von z bezeichnet. Daher, weil diese Gleichung von der Konstruktion sehr schwer ist, sie ist ja um Vieles allgemeiner als diese

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = z^m\mathrm{d}z,$$

die von Riccati vorgelegt worden war, verdient ihre Konstruktion mit Hilfe von Schleppbewegung Aufmerksamkeit. Weil diese Konstruktion zusätzlich noch sehr einfach und leicht ist, wird es der Mühe Wert sein, die Konstruktion einer so schweren Gleichung auf die Schleppbewegung zurückgeführt zu haben.

§5 Ich setze also bei einer gegebenen Kurve BN die Abszisse $AQ = t$ und die Ordinate $QN = u$; und es wird u durch t und Konstanten gegeben sein. Für die gesuchte Kurve setze ich aber $AP = x$ und $PM = y$ und es sei $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$; die Länge des Fadens AB oder MN aber setze ich gleich b. Nachdem diese festgesetzt wurden, wird

$$\sqrt{1+pp} : 1 = MN(b) : PQ(t-x)$$

und

$$\sqrt{1+pp} : p = MN(b) : QN - PM(u-y)$$

sein. Daher wird also

$$\frac{b}{\sqrt{1+pp}} = t - x, \quad \text{und} \quad \frac{bp}{\sqrt{1+pp}} = u - y$$

und aus diesen Werten $pt - px = u - y$. Ich differentiere diese letzte Gleichung, indem ich $p\mathrm{d}x$ anstelle von $\mathrm{d}y$ setze, wonach

$$p\mathrm{d}t + t\mathrm{d}p - x\mathrm{d}p = \mathrm{d}u$$

und

$$x = t + \frac{p\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}$$

hervorgeht. Es ist aber aus der ersten Gleichung

$$x = t - \frac{b}{\sqrt{1+pp}},$$

woher man diese Gleichung erhält

$$\mathrm{d}u = p\mathrm{d}t + \frac{b\mathrm{d}p}{\sqrt{1+pp}},$$

in welcher nur zwei Variablen p und t enthalten sind, weil u durch t gegeben ist.

§6 Es ist aber p der Kotangens des Winkels MNQ, nachdem der ganze Sinus gleich 1 gesetzt wurde, woher diese Gleichung mit Hilfe von Schleppbewegung aufgelöst wird; durch jene wird nämlich der Winkel MNQ bekannt werden und als logische Konsequenz sein Kotangens, welchem p gleich ist. Um aber die Irrationalität wegzuschaffen, setze ich

$$\sqrt{1+pp} = p + q \quad \text{oder} \quad q = \sqrt{1+pp} - p;$$

weil aber $\sqrt{1+pp}$ der Kosecans des Winkels MNQ und p sein Kotangens ist, wird durch elementare Trigonometrie q der Tangens des halben Winkels MNQ sein. Durch diese Substitution ist aber

$$p = \frac{1-qq}{2q} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{1+qq}{2q}$$

und

$$\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{d}q(1+qq)}{2qq}.$$

Daher wird also $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+pp}} = -\frac{\mathrm{d}q}{q}$ sein, und die obere Gleichung wird in diese übergehen

$$2q\mathrm{d}u = \mathrm{d}t - qq\mathrm{d}t - 2b\mathrm{d}q.$$

§7 Um diese Gleichung weiter zu reduzieren, setze ich $\mathrm{d}u = \frac{b\mathrm{d}r}{r}$, und es wird

$$2bq\mathrm{d}r + 2br\mathrm{d}q = r\mathrm{d}t - rqq\mathrm{d}t$$

sein, in welcher t und r von sich gegenseitig abhängen, weil $t = AQ$ und $b \ln r = QN$ ist. Weiter werde

$$qr = s \quad \text{oder} \quad q = \frac{s}{r},$$

und es wird

$$2b\mathrm{d}s = r\mathrm{d}t - \frac{ss\mathrm{d}t}{r}$$

sein. Es sei nun

$$\frac{\mathrm{d}t}{r} = 2b\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad r\mathrm{d}t = 2bZ\mathrm{d}z,$$

es wird

$$rr = Z \quad \text{und} \quad r = \sqrt{Z}$$

sein. Außerdem ist

$$\mathrm{d}t^2 = 4b^2 Z\mathrm{d}z^2 \quad \text{und} \quad t = 2b\int \mathrm{d}z\sqrt{Z}.$$

Durch z also wird die Kurve BN so bestimmt, dass

$$AQ = 2b\int \mathrm{d}z\sqrt{Z} \quad \text{und} \quad QN = \frac{b}{2}\ln Z$$

ist. Weil also die Kurve BN gegeben ist, wird zugleich Z durch z gegeben sein. Nach diesen Substitutionen wird man aber

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = Z\mathrm{d}z$$

haben.

§8 Nachdem also die Gleichung

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = Z\mathrm{d}z$$

vorgelegt wurde, wird der Wert von s durch z auf folgende Weise bestimmt werden können: Man konstruiere eine Kurve BN von dieser Art, dass für die Abszisse $AQ = 2b\int \mathrm{d}z\sqrt{Z}$ die Ordinate $QN = \frac{b}{2}\ln Z$ ist.

Dann, nachdem ein Faden der Länge b gemäß der Kurve BN vorwärts gezogen wurde, wird die Traktrix AM beschrieben. Darauf ziehe man eine Tangente MN, die auch durch den Faden selbst beschafft werden wird, und darauf wird auch der Winkel MNQ bekannt werden, der Tangens dessen Hälfte gleich q sei. Danach wird

$$s = qr = q\sqrt{Z}$$

sein.

§9 Die Koordinaten AP und PM der Schleppkurve werden sich aber so verhalten: Es wird

$$AP = x = t - \frac{b}{\sqrt{1+pp}} = t - \frac{2bq}{1+qq}$$

und

$$y = u - \frac{bp}{\sqrt{1+pp}} = u - \frac{b(1-qq)}{1+qq}$$

sein. Weil aber

$$t = 2b\int \mathrm{d}z\sqrt{Z} \quad \text{und} \quad u = \frac{b}{2}\ln Z \quad \text{und} \quad q = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{Z}}$$

ist, wird

$$x = 2b\int \mathrm{d}z\sqrt{Z} - \frac{2bs\sqrt{Z}}{s^2+Z} \quad \text{und} \quad y = \frac{b}{2}\ln Z + \frac{bs^2 - bZ}{s^2+Z}$$

sein. Daraus entstehen schon andere Konstruktionen der Gleichung

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = Z\mathrm{d}z.$$

Durch Schleppbewegung werden nämlich die Koordinaten x und y der Kurve AM bekannt, und aus diesen wird entweder

$$s = \frac{\sqrt{Z(t-x)}}{u+b-y} \quad \text{oder} \quad s = \frac{\sqrt{Z(b-u+y)}}{t-x}$$

sein.

§10 Die Gleichung zwischen x und y aber findet man aus einer gegebenen Gleichung zwischen t und u leicht. Es ist nämlich aus den oben gefundenen Gleichungen

$$t = x + \frac{b}{\sqrt{1+pp}} = x + \frac{b\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}$$

und

$$u = y + \frac{bp}{\sqrt{1+pp}} = y + \frac{b\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}.$$

Wenn daher in einer gegebenen Gleichung zwischen t und u anstelle von t und u diese Werte eingesetzt werden, wird eine Gleichung zwischen x und

y für die gesuchte Traktrix AM hervorgehen, die eine Differentialgleichung ersten Grades sein wird, wenn die Gleichung zwischen t und u algebraisch war. Aus dieser Gleichung aber, die meistens besonders schwer handhabbar wird, wird nichts, was die Erkenntnis der Kurve AM betrifft, gefolgert werden können. Die Auflösung aller Gleichungen dieser Art wird von der Auflösung von dieser

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = Z\mathrm{d}z$$

abhängen.

§11 Wenn also diese Gleichung vorgelegt wird

$$\mathrm{d}s + s^2\mathrm{d}z = a^2z^{2n}\mathrm{d}z,$$

welche die selbst ist, die Riccati zu lösen vorgelegt hat, wird

$$Z = a^2z^{2n} \quad \text{und} \quad \int \mathrm{d}z\sqrt{Z} = \frac{az^{n+1}}{n+1}$$

und

$$\ln Z = 2\ln a + 2n\ln z$$

sein. Daher wird

$$t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1} \quad \text{und} \quad u = b\ln a + nb\ln z$$

sein. Weil aber

$$t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$$

ist, wird

$$\ln t = \ln\frac{2ab}{n+1} + (n+1)\ln z \quad \text{oder} \quad \ln z = \frac{\ln t - \ln(2ab) + \ln(n+1)}{n+1}$$

sein. Nachdem dieser Wert in die andere Gleichung $u = b\ln a + nb\ln z$ eingesetzt wurde, und die Ordinaten u nach Belieben vermehrt oder vermindert wurden, wird man diese Gleichung haben

$$u = \frac{nb}{n+1}\ln t \quad \text{oder} \quad t\mathrm{d}u = \frac{nb\mathrm{d}t}{(n+1)},$$

welche eine Gleichung zwischen t und u ist, und sie zeigt, dass die Kurve BN ein Logarithmus ist, dessen Subtangente konstant $\frac{nb}{n+1}$ ist.

§12 Für diesen Fall konstruiere man daher die Logarithmuskurve DN zur Asymptote AB, deren Subtangente gleich $\frac{nb}{n+1}$ sei (Fig. 2). Man führe irgendeine Ordinate AE fort, die man für die Achse halte, und durch Schleppbewegung werde der Faden der Länge b

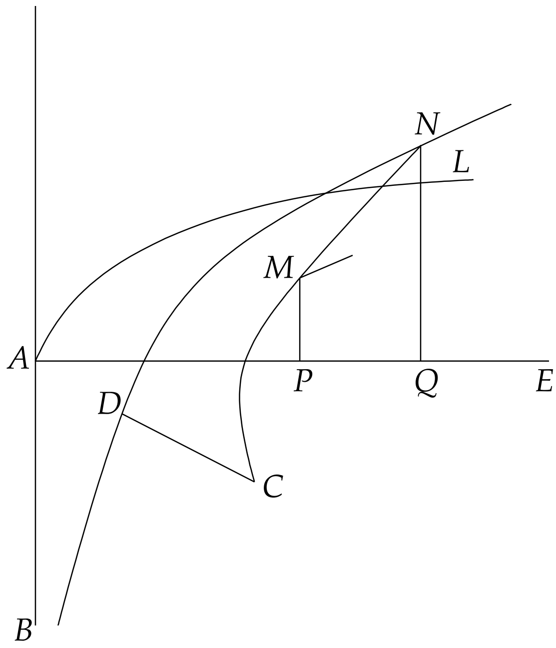

FIG. 2

an dem einen Ende auf der Logarithmuskurve vorwärts gezogen, und das andere Ende beschreibe die Traktrix. Man fälle nun von den Punkten M und N aus die Lote MP und NQ, es wird

$$s = \frac{\sqrt{Z} \cdot PQ}{b + QN - PM} = \frac{az^n - PQ}{b + QN - PM}$$

sein, nachdem für

$$z = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)AQ}{2ab}}$$

genommen wurde. Mit einer einzigen Logarithmuskurve können also alle Fälle der Gleichung

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = a^2 z^{2n} \mathrm{d}z$$

konstruiert werden, solange die Tangente MN oder der Faden zur Subtangente der Logarithmuskurve wie $n+1$ zu n ist.

§13 Außerdem kann auf die folgende Weise die Gleichung

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = a^2 z^{2n}\mathrm{d}z$$

konstruiert werden. Über der Achse konstruiere man eine Paraboloidenkurve, die, nachdem $AQ = t$ und $QL = z$ genannt wurden, durch diese Gleichung

$$z^{n+1} = \frac{(n+1)t}{2ab}$$

ausgedrückt wurde. Darauf werde durch den Faden der Länge b über der Logarithmuskurve DN, wie es zuvor vorgeschrieben worden ist, die Traktrix CM. Dann nehme man auf der Paraboloidenkurve die Ordinate $QL = z$, und führe sie fort, bis sie schließlich die Logarithmuskurve in N schneidet. Von N ziehe man eine Gerade NM der Länge b zur Traktrix, und von M aus fälle man das Lot MP. Nach all dem wird

$$s = \frac{(n+1)AQ \cdot PQ}{2b \cdot QL(b + QN - PM)}$$

sein. Oder nachdem auch der Tangens des halben Winkels $MNG = q$ gesetzt wurde, wird

$$s = \frac{(n+1)AQq}{2b \cdot Ql}$$

sein.

§14 Weil also die Methode, die ich bei der Reduktion der konstruierten Gleichung zur Beschreibung der Traktrix benutzt habe, den größten Nutzen bei der Auflösung allgemeiner Probleme hat, die zur inversen Methode der Tangenten gezählt werden, möchte ich hier einige Probleme dieser Art beifügen und die Art diese zu lösen zeigen. Damit die Begründung dieser Sache leichter erfasst wird, ist vorher zu erklären, wie auf verschiedene Arten die Natur jeder Kurve bestimmt werden kann, und welches jene Arten sind, auf denen sehr leicht konstruiert werden kann, ob die vorgelegte Kurve algebraisch ist oder transzendent.

§15 Es ist schon besonders ins Allgemeingut übergegangen, dass die Natur einer Kurve durch eine Gleichung zwischen zwei orthogonalen Koordinaten ausgedrückt wird, natürlich Abszisse und Ordinate, aus welcher die Punkte einer beliebigen Kurve sehr leicht gefunden werden können. Aus einer

Gleichung von dieser Art folgt von selbst, ob die Gleichung algebraisch ist oder nicht; denn wenn die Gleichung algebraisch ist, wird die Kurve auch als solche verstanden, wenn aber die Gleichung transzendent ist, wird auch die Kurve für transzendent gehalten. Dieselbe Schlussfolgerung kann auch aus einer Gleichung zwischen anderen geraden Linien abgeleitet werden, die die Natur der Kurve ausdrückt, wenn nur die Festlegung der Geraden nicht von der Kurve selbst abhängt, sondern entweder auf einen gegebenen Punkt oder eine gegebene Linie bezogen wird.

§16 Aber wenn die Festlegung ihrer Linien, zwischen welchen die Gleichung die Natur der Kurve ausdrückt, ohne Kenntnis der Kurve selbst nicht bestimmt werden kann, können aus der Gleichung auch einzelne Punkte der Kurve nicht sofort gefunden werden. Aus einer Gleichung dieser Art folgt auch, auch wenn sie algebraisch ist, dennoch nicht, dass die Kurve algebraisch ist, sondern sie wird sogar oftmals besonders transzendent sein. Deswegen ist für die Konstruktion dann für die Erkenntnis einer Kurve dieser Art die Gleichung in eine andere zu verwandeln, die zwischen Linien sei, deren Festlegung von der Kurve nicht abhängt.

§17 Das beste Mittel, um die Kurve zu erkennen und zu konstruieren, wird also sein, die Gleichung, wenn sie zwischen Linien war, deren Festlegung von der Kurve selbst abhängt, in eine gewöhnliche Gleichung zwischen Abszisse und Ordinate zu verwandeln. Bei dieser Aufgabe ist aber größte Sorgfalt aufzubringen, damit wir nicht in sehr aufwendige Rechnungen und sehr schwer auflösbare Gleichungen hineingeraten. Am leichtesten scheint nämlich jene Transformation in eine Gleichung zwischen Ordinate und Abszisse, aber auf diese Weise werden wir meistens in auflösbare Widerwärtigkeiten gestürzt; es wird genügen das an einem Beispiel zu zeigen.

§18 Es werde die Natur der Kurve AM durch eine Gleichung zwischen der Normale zur Kurve MN und einen Anteil der Achse AN ausgedrückt (Fig. 3); von diesen nenne man MN mit u und AN mit t; und es sei die Gleichung, die die Natur der Kurve ausdrückt, diese sehr leichte $u^2 = at$. Wenn nun die Abszisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$ gesetzt wird und das Element der Kurve, welches $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}s$ ist, festgelegt wird, wird

$$MN = u = \frac{y\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad AN = t = x + \frac{y\mathrm{y}}{\mathrm{d}x}$$

sein. Daher, wenn diese Werte in die Gleichung eingesetzt werden, wird man freilich diese Gleichung

$$y^2 \mathrm{d}s^2 = ax\mathrm{d}x^2 + ay\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

zwischen x und y haben, aus welche weder die Konstruktion der Kurve klar wird, noch, ob sie algebraisch ist oder nicht.

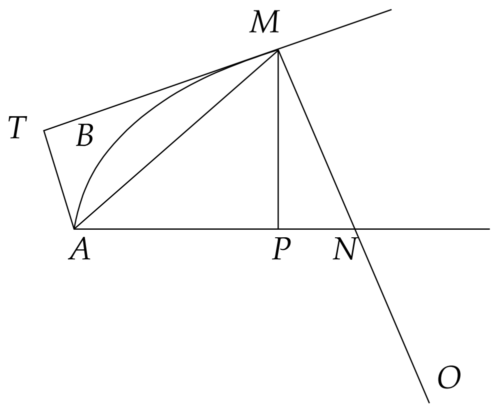

FIG. 3

§19 In diesem Fall kann die gefundene Gleichung

$$y^2 \mathrm{d}s^2 = ax\mathrm{d}x^2 + ay\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

freilich, weil die Differentiale nur zwei Dimensionen haben, in eine Gleichung nur einer Dimension verwandelt werden, und es wird nämlich für $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ anstelle von $\mathrm{d}s^2$ gesetzt und nach Ziehen der Quadratwurzel diese Gleichung hervorgehen

$$2y\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}x\sqrt{a^2 + 4ax - 4y^2},$$

aus welcher aber nicht so leicht die Natur der Kurve erkannt wird. Daraus sieht man ein, wenn wir eine noch mehr zusammengesetzte Gleichung zwischen t und u annehmen würden, dass dann nicht einmal auf eine Differentialgleichung von einer Dimension gelangt werden könnte. Dennoch ist wiederum vom gefeierten Bernoulli in den ″ Act. Lips.″ gezeigt worden, sooft eine algebraische Gleichung zwischen t und u gegeben ist, dass genauso oft auch die Gleichung zwischen x und y algebraisch sein wird.

§20 Deswegen ist auf einem anderen Weg vorzugehen, wenn wir aus der Gleichung zwischen t und u die Gleichung zwischen x und y finden wollen, und ich habe beobachtet, dass dies am angenehmsten mit derselben Methode bewerkstelligt werden kann, mit der ich zuvor die Konstruktion der Gleichung

$$\mathrm{d}s + ss\mathrm{d}z = Z\mathrm{d}z$$

auf die Schleppbewegung zurückgeführt habe. Durch diese Methode wird nämlich sofort klar werden, in welchen Fällen die wie auch immer vorgelegte Gleichung zwischen t und u auf eine algebraische Gleichung zwischen x und y führt, oder, wenn die Kurve transzendent war, die einfachste Quadratur geben wird, von welcher die Konstruktion der Kurve abhängt.

§21 Wir wollen also denselben Fall beibehalten und es sei die Gleichung zwischen $AN = t$ und $MN = u$ irgendeine; es bleibe auch

$$AP = x, \quad PM = y, \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}s,$$

es wird

$$t = x + \frac{y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad u = \frac{y\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

sein. Man setze $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$; es wird

$$t = x + py \quad \text{und} \quad u = y\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad y = \frac{u}{\sqrt{1+pp}}.$$

Differentiert man diese Gleichung, so wird man

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+pp}} - \frac{up\mathrm{d}p}{\sqrt{1+pp}}$$

haben, jene Gleichung aber gibt differentiert

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}x + pp\mathrm{d}x + y\mathrm{d}p,$$

nachdem $p\mathrm{d}x$ anstelle von $\mathrm{d}y$ gesetzt wurde, aus welcher man

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+pp} - \frac{y\mathrm{d}p}{1+pp}$$

erhält; diese gibt mit p multipliziert und anstelle von y seinen Wert eingesetzt

$$p\mathrm{d}x = \frac{p\mathrm{d}t}{1+pp} - \frac{pu\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

nachdem diese mit jener verbunden wurde, geht

$$\frac{p\mathrm{d}t}{\sqrt{1+pp}} = \mathrm{d}u$$

hervor.

§22 Aus dieser gefundenen Gleichung erhält man sofort

$$p = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}u^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}u^2}}.$$

Daraus wird

$$y = \frac{u\sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}u^2}}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad x = t - py = t - \frac{u\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

sein. Deswegen, wenn die Gleichung zwischen t und u algebraisch war, wird auch die Gleichung zwischen x und y algebraisch sein, und aus ihr entspringt die Konstruktion der gesuchten Kurve leicht. Und von welcher Quadratur die Gleichung t und u auch abhängt, von derselben Quadratur wird die Gleichung zwischen x und y abhängen, und als logische Konsequenz auch die Konstruktion der Kurve selbst.

§23 In dem Spezialfall, den wir zuvor betrachtet haben, war $u^2 = at$, und daher

$$t = \frac{u^2}{a} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}t = \frac{2u\mathrm{d}u}{a}$$

und

$$\sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}u}{a}\sqrt{4u^2 - a^2}.$$

Nachdem diese also eingesetzt wurden, wird

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4u^2 - a^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{2}$$

hervorgehen. Diese aber gibt

$$4u^2 = 4ax + 2a^2;$$

dieser Wert von $4u^2$ in jene Gleichung eingesetzt gibt diese algebraische Gleichung zwischen x und y

$$2y = \sqrt{4ax + aa},$$

das heißt $y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$, welches die Gleichung für eine Parabel ist, nachdem die Abszissen auf der Achse aus dem Brennpunkt genommen wurden.

§24 Wenn die Tangente MT der Kurve AM bis hin zur Achse PA fortgeführt wird (Fig. 4), und aus A eine Senkrechte AV zur Achse erreicht wird, sei eine Gleichung zwischen TA und AV gegeben, durch die die Natur der Kurve ausgedrückt wird, und es sei also nötig, die Gleichung zwischen der Abszisse AP und der Ordinate PM zu finden, oder die Kurve zu konstruieren, die alle durch die Punkte T und V geführten Geraden berührt. Nachdem $AT = t$, $AV = u$ und $AP = x$, $PM = y$ gesetzt wurden, wird

$$AT = \frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - x = t \quad \text{und} \quad AV = u = y - \frac{x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

sein; und die Relation zwischen t und u wird als gegeben fest gesetzt, die wie auch immer sei.

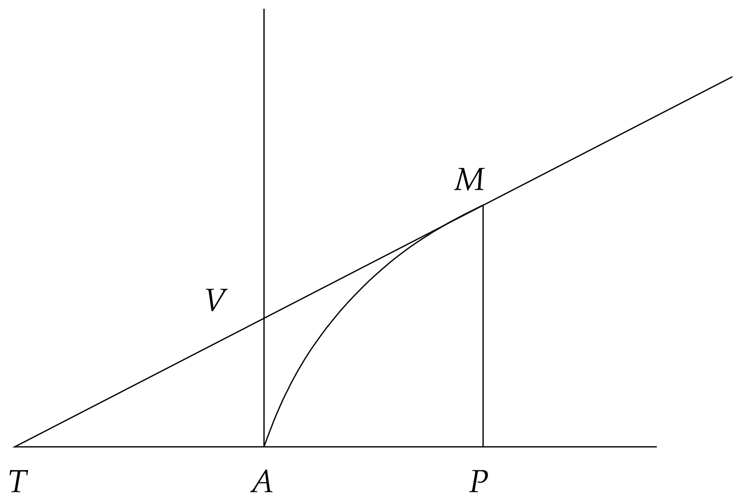

FIG. 4

§25 Es sei nun $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, es wird

$$t = \frac{y}{p} - x \quad \text{und} \quad u = y - px$$

sein. Diese letzte Gleichung gibt differentiert und für $p\mathrm{d}x$ anstelle von $\mathrm{d}y$ gesetzt

$$\mathrm{d}u = -x\mathrm{d}p \quad \text{und} \quad x = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}.$$

Diese Werte aber geben in die obere Gleichung anstelle von x und y eingesetzt $t = \frac{u}{p}$ oder $p = \frac{u}{t}$. Es wird also

$$\mathrm{d}p = \frac{t\mathrm{d}u - u\mathrm{d}t}{tt}$$

sein und daher

$$x = \frac{tt\mathrm{d}u}{u\mathrm{d}t - t\mathrm{d}u} \quad \text{und} \quad y = u + \frac{ut\mathrm{d}u}{u\mathrm{d}t - t\mathrm{d}u}.$$

Daher ist wiederum klar, sooft die Gleichung zwischen t und u algebraisch war, dass sooft die Kurve AM auch algebraisch sein wird, wegen der algebraischen Gleichung zwischen x und y.

§26 Während die Gleichung zwischen AT, t und AV, u irgendeine bleibt, wenn anstelle der Geraden über der Achse AT durch die Scheitel T unendlich viele Parabeln TVM beschrieben werden, die durch die Punkte V hindurchgehen, wird die zu findende Kurve AM vorgelegt, die von all diesen Parabeln berührt wird. Nachdem $AP = x$ und $PM = y$ und $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ gesetzt wurden, wird aus der Natur der Parabel $t : u^2 = t + x : y^2$ sein, woher man $y^2 = u^2 + \frac{u^2 x}{t}$ hat. Weil weiter die Parabel TVM die Kurve AM tangieren muss, werden sie eine gemeinsame Tangente im Punkt M haben und daher auch eine gemeinsame Subtangente. Es ist aber die Subtangente der Parabel in $M = 2PT = 2t + 2x$, welche gleich

$$\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{p}$$

sein müssen wird, gleich der Subtangente der gesuchten Kurve AM, woher

$$y = 2pt + 2px$$

entsteht.

§27 Wenn die erste dieser zwei Gleichungen durch die zweite geteilt wird, geht $y = \frac{u^2}{2pt}$ hervor, nach Einsetzen welches Wertes in die andere Gleichung

$$x = \frac{u^2}{4p^2 t} - t$$

hervorgeht. Man differentiere nun jede der beiden Gleichungen; es wird

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x = \frac{u\mathrm{d}u}{pt} - \frac{u^2\mathrm{d}t}{2ptt} - \frac{u^2\mathrm{d}p}{2p^2t}$$

und

$$\mathrm{d}x = \frac{u\mathrm{d}u}{2p^2t} - \frac{u^2\mathrm{d}t}{4p^2tt} - \frac{u^2\mathrm{d}p}{2p^3t} - \mathrm{d}t$$

sein. Aus diesen Gleichungen geht nach Eliminieren von $\mathrm{d}x$

$$\frac{u\mathrm{d}u}{2pt} + p\mathrm{d}t = \frac{u^2\mathrm{d}t}{4pt^2} \quad \text{oder} \quad pp = \frac{u^2}{4tt} - \frac{u\mathrm{d}u}{2t\mathrm{d}t}$$

hervor. Daher wird also

$$x = \frac{2tt\mathrm{d}u}{u\mathrm{d}t - 2t\mathrm{d}u} \quad \text{und} \quad y = \frac{u^2\sqrt{\mathrm{d}t}}{\sqrt{u^2\mathrm{d}t - 2tu\mathrm{d}u}}$$

sein. Daraus erkennt man, dass die Kurve AM sooft algebraisch ist, wie die Gleichung zwischen t und u es war.

§28 Diese zwei letzten Probleme können freilich leichter auf eine andere Weise gelöst werden, indem man den Punkt sucht, in dem zwei Kurven näherungsweise zusammenlaufen, bei ihm wird nämlich der Kontakt der gesuchten Kurve AM sein. Der Punkt des Zusammenlaufs M kann aber immer algebraisch bestimmt werden, wenn die Gleichung der Kurve TVM sowie die zwischen t und u algebraisch waren. Ich habe aber diese Probleme hier beigefügt, damit klar wird, wie man zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y durch viele Differentialgleichungen hindurch gelangen kann.

§29 Wenn unendlich viele Geraden RN innerhalb des rechten Winkels A wie auch immer angeordnet waren (Fig. 5), sodass deren Lage durch irgendeine Gleichung zwischen AN, t und AR, u ausgedrückt wird,

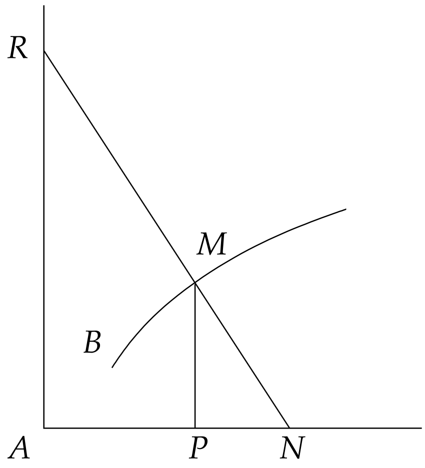

FIG. 5

werde die Kurve BM zu finden vorgelegt, die all diese Geraden im rechten Winkel schneidet. Für

$$AP = x, \quad PM = y, \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$$

gesetzt, wird

$$PN = \frac{y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = py$$

sein, weil RN zur Kurve normal ist; und daher ist $t = x + py$; darauf ist

$$\mathrm{d}y : \mathrm{d}x = p : 1 = t : u,$$

woher

$$t = pu \quad \text{oder} \quad p = \frac{t}{u} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = \frac{t\mathrm{d}x}{u}$$

sein wird. Durch jene Gleichung aber ist

$$y = u - \frac{ux}{t};$$

daher durch Differentieren

$$\mathrm{d}y = \frac{t\mathrm{d}x}{u} = \mathrm{d}u - \frac{u\mathrm{d}x}{t} - \frac{x\mathrm{d}u}{t} + \frac{ux\mathrm{d}t}{tt},$$

in welcher Gleichung die zwei Variablen x und t enthalten sind, weil u durch t gegeben ist.

§30 Die letzte Gleichung geht reduziert in diese über

$$dx + x\left(\frac{tdt + udu}{tt + uu} - \frac{dt}{t}\right) = \frac{tudu}{tt + uu},$$

die mit $\frac{\sqrt{tt+uu}}{t}$ multipliziert integrierbar wird; das Integral wird aber

$$x = \frac{t}{\sqrt{tt + uu}} \int \frac{udu}{\sqrt{tt + uu}}$$

sein; nach Bekanntwerden davon wird man zugleich

$$y = u - \frac{u}{\sqrt{tt + uu}} \int \frac{udu}{\sqrt{tt + uu}}$$

haben. Sooft also

$$\frac{udu}{\sqrt{tt + uu}}$$

eine Integration zulässt, sooft wird also die Kurve BM algebraisch sein. Im Übrigen aber hängt die Konstruktion von der Quadratur

$$\int \frac{udu}{\sqrt{tt + uu}}$$

ab.

§31 Wir wollen also den Fall dieses Problems betrachten, in dem RN immer von der selben Größe bleibt, oder indem

$$\sqrt{tt + uu} = a \quad \text{oder} \quad u = \sqrt{a^2 - t^2}$$

ist. Es wird also

$$\int \frac{udu}{\sqrt{tt + uu}} = -\frac{tt}{2a}$$

sein; dort füge ich die Konstante nicht hinzu, damit ich nicht auf besonders zusammengesetzte Gleichungen geführt werde. Nach dem Fund davon wird

$$x = -\frac{t^3}{2a^2} \quad \text{und} \quad t = -\sqrt[3]{2a^2x}$$

sein, und deshalb

$$u = \sqrt{a^2 - \sqrt[3]{4a^4x^2}}.$$

Weil aber

$$y = \frac{u(t-x)}{t}$$

ist, wird

$$y = \frac{-(x+\sqrt[3]{2a^2x}}{\sqrt[3]{2a^2x}}\sqrt{a^2-\sqrt[3]{4a^4x^2}}$$

sein, die durch Quadrieren in diese übergeht

$$\frac{3ax^2}{\sqrt[3]{4ax^2}} = a^2 - x^2 - y^2,$$

diese durch Kubieren in die folgende

$$(a^2-x^2-y^2)^3 = \frac{27}{4}a^2x^4,$$

die für eine Linie sechster Ordnung steht.

§32 Es sind aber außer dieser Kurve unendlich viele andere der Frage in gleicher Weise genügende Kurven gegeben, die man finden wird, wenn zum Integral von $\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{tt+uu}}$ irgendeine konstante Größe hinzugefügt wird. Besonders wird aber die Gleichung zwischen x und y zusammengesetzt sein, deshalb weil aus den Gleichungen die Unbestimmte t eliminiert werden muss, die auf vier Dimensionen aufsteigt. Dennoch wird wiederum die Konstruktion leicht sein.

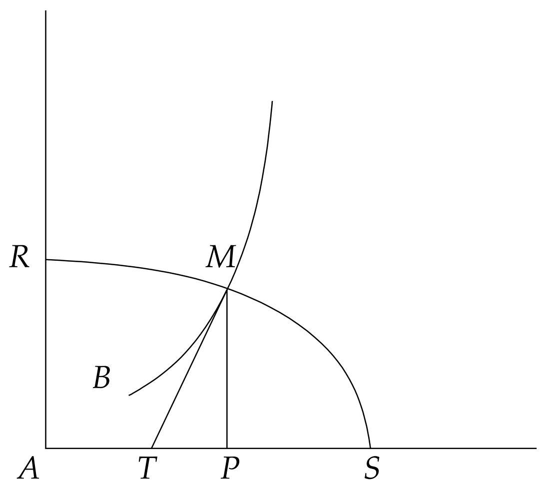

FIG. 6

§33 Auf diese Weise kann das Problem gelöst werden, wenn anstelle der Geraden, die die Punkte R und M verbinden, irgendwelche Kurven durch diese Punkte hindurch gezogen werden, die von der gesuchten rechte Winkel abschneiden müssen. Um dies zu zeigen, sei irgendeine Gleichung zwischen $AS = t$ und $AR = u$ gegeben, und es sei der vierte Teil SMR der Ellipse durch die Punkte R und S gezogen worden (Fig. 6), dessen Zentrum also in A sein wird und deren konjugierte Halbachsen AS und AR sein werden. Die Kurve BM gehe durch unendlich viele Ellipsen in rechte Winkel hindurch, die man sucht. Man setze

$$AP = x \quad \text{und} \quad PM = y \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x,$$

es wird aus der Natur der Ellipse

$$y = \frac{u}{t}\sqrt{tt - xx} \quad \text{oder} \quad y^2 = u^2 - \frac{u^2x^2}{t^2}$$

sein.

§34 Zur Ellipse im Punkt M werde die Normale MT gezogen; diese wird durch die Bedingung des Problems zugleich die Tangente der gesuchten Kurve BM sein. Sofern aber MT normal zur Ellipse ist, wird

$$PT = \frac{u^2x}{t^2}$$

sein. Aber sofern MT die Tangente der Kurve BM ist, wird

$$PT = \frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{p}$$

sein. Deshalb wird man diese Gleichung haben

$$y = \frac{pu^2x}{t^2};$$

deren Differential ist

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x = \frac{pu^2\mathrm{d}x}{t^2} + \frac{2pux\mathrm{d}u}{tt} + \frac{u^2x\mathrm{d}p}{tt} - \frac{2pu^2x\mathrm{d}t}{t^3},$$

woher

$$p\mathrm{d}x = \frac{2ptux\mathrm{d}u + tu^2x\mathrm{d}p - 2pu^2x\mathrm{d}t}{t(t^2 - u^2)}$$

wird. Die erste Gleichung aber gibt differentiert

$$y\mathrm{d}y = \frac{p^2u^2x\mathrm{d}x}{tt} = u\mathrm{d}u - \frac{u^2x\mathrm{d}x}{t^2} - \frac{u^3t^2\mathrm{d}u}{tt} + \frac{u^2x^2\mathrm{d}t}{t^3}$$

oder

$$ux\mathrm{d}x = \frac{t^3\mathrm{d}u - tx^2\mathrm{d}u + ux^2\mathrm{d}t}{t(pp+1)}.$$

§35 Wenn aus zwei Differentialgleichungen dx eliminiert wird, wird man

$$u^2x^2 = \frac{p(tt-uu)(t^3\mathrm{d}u - tx^2\mathrm{d}u + ux^2\mathrm{d}t)}{(pp+1)(2pt\mathrm{d}u + tu\mathrm{d}p - 2pu\mathrm{d}t)}$$

haben. Die Integralgleichungen aber geben nach Eliminieren von y

$$x^2 = \frac{t^4}{tt+ppuu}.$$

Wenn dieser Wert von x^2 in jene Gleichung eingesetzt wird, wird

$$tu(pp+1)(2pt\mathrm{d}u + tu\mathrm{d}p - 2pu\mathrm{d}t) = p(tt-uu)(p^2u\mathrm{d}u + t\mathrm{d}t)$$

hervorgehen. Man setze

$$p = \frac{qtt}{uu},$$

es wird diese Gleichung

$$\frac{tu\mathrm{d}q}{q} = \frac{(tt-uu)(q^2t^3\mathrm{d}u + u^3\mathrm{d}t)}{q^2t^4tu^4}$$

entstehen, von der Konstruktion welcher Gleichung oder von der Separation von q von u und t die Konstruktion der gesuchten Kurve abhängt.

§36 Es habe eines Beispiels wegen AR zu AS ein gegebenes Verhältnis, oder es seien alle Ellipsen zueinander ähnlich; es wird $u = nt$ sein, und die allgemeine Gleichung wird in diese übergehen

$$\frac{\mathrm{d}q}{q} = \frac{(1-nn)(q^2\mathrm{d}t + n^2\mathrm{d}t)}{q^2t + n^4t},$$

in welcher die Variablen t und q separiert werden können, denn es wird

$$\frac{(1-nn)\mathrm{d}t}{t} = \frac{(q^2+n^4)\mathrm{d}q}{q(q^2+n^2)} = \frac{n^2\mathrm{d}q}{q} + \frac{(1-n^2)q\mathrm{d}q}{q^2+n^2}$$

hervorgehen, die integriert

$$\left(\frac{t}{\sqrt{q^2+n^2}}\right)^{1-nn} = Cq^{n^2} \quad \text{oder} \quad t = aq^{\frac{n^2}{1-n^2}}\sqrt{q^2+n^2}$$

gibt. Es wird also

$$u = naq^{\frac{n^2}{1-n^2}}\sqrt{q^2+n^2} \quad \text{und} \quad x = naq^{\frac{n^2}{1-n^2}} \quad \text{und} \quad y = qx$$

werden. Zwischen x und y findet man also diese Gleichung

$$x = b^{1-n^2}y^{n^2}$$

für parabolische Kurven; dass stimmt mit dem überein, was über orthogonale Trajektorien schon vor langer Zeit entdeckt worden ist.

§37 Wann immer man in der Astrophysik aus einer gegebenen Zentripetalkraft bestimmt, die ein projektiver Körper beschreibt, gelangt man sofort zu einer Gleichung vom Zentrum der Kräfte und dem Lot, das aus dem Zentrum zur Tangente der Kurve gefällt wurde. Schwer aber kann aus einer solchen Gleichung erkannt werden, ob die beschriebene Kurve algebraisch oder transzendent ist; schwer ist es aber, eine sehr einfache Gleichung zwischen orthogonalen Koordinaten zu finden. Durch unsere bisher benutzte Methode wird diese Frage aber leicht erledigt.

§38 Es sei das Zentrum der Kräfte A und die vom projektiven Körper beschriebene Kurve BM (Fig. 3); man setze die Distanz $AM = t$ und das zur Tangente MT von A aus gefällte Lot $AT = u$, und es sei die Natur der Kurve durch eine Gleichung zwischen t und u ausgedrückt. Auf der durch A nach Belieben gezogenen Achse sei die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ und $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$; es wird

$$t = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{y-px}{\sqrt{1+pp}}$$

sein. Diese letzte Gleichung aber gibt differenziert

$$\mathrm{d}u\sqrt{1+pp}+\frac{up\mathrm{d}p}{\sqrt{1+pp}}=-x\mathrm{d}p,$$

woher

$$x=\frac{-\mathrm{d}u\sqrt{1+pp}}{\mathrm{d}p}-\frac{pu}{\sqrt{1+pp}}\quad\text{und}\quad y=\frac{-p\mathrm{d}u\sqrt{1+pp}}{\mathrm{d}p}+\frac{u}{\sqrt{1+pp}}$$

sein wird.

§39 Man setze diese Werte von x und y in diese Gleichung $tt=x^2+y^2$ ein, wonach man

$$tt=u^2+\frac{\mathrm{d}u^2(1+pp)^2}{\mathrm{d}p^2}$$

haben wird, woher

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+pp}+\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{tt+uu}}=0$$

entsteht. Es bezeichne

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{tt-uu}}$$

den Bogen, dessen Tangens q ist, während der ganze Sinus gleich 1 ist; es wird

$$Ap+Aq=Ab$$

sein, während A den Bogen bezeichnet, dessen Tangens eine beigefügte Größe ist. Deshalb wird

$$p=\frac{b-q}{1+bq}\quad\text{und}\quad\sqrt{1+pp}=\frac{\sqrt{(1+bb)(tt-uu)}}{1+bq}$$

sein. Weil aber

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}=\frac{-\sqrt{tt-uu}}{1+pp}=\frac{-(1+ba)^2\sqrt{tt-uu}}{(1+bb)(1+qq)}$$

ist, wird

$$x=\frac{(1+bq)\sqrt{tt-uu}-(b-q)u}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$$

und

$$y=\frac{(b-q)\sqrt{(tt-uu)+(1+bq)u}}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$$

sein.

§40 Sooft also die Gleichung zwischen t und u algebraisch ist und zugleich so beschaffen, dass $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{tt-uu}}$ den Bogen des Kreises bezeichnet, dessen Tangens algebraisch beschafft werden kann, sooft wird die vom Körper beschriebene Kurve algebraisch sein, und ihre algebraische Gleichung zwischen orthogonalen Koordinaten findet man durch die gefundene Formeln.

§41 Wenn also eine Relation zwischen Krümmungsradius MO und einem Teil von diesen MN oder der Normale durch irgendeine Gleichung gegeben ist, wird die Gleichung zwischen den Koordinaten AP, PM auf diese Weise gefunden werden können, aus welcher sofort klar wird, in welchen Fällen die Kurve algebraisch wird. Es sei nämlich $MN = t$ und $MO = u$ und es sei irgendeine Gleichung zwischen t und u gegeben; man setze

$$AP = x, \quad PM = y, \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x.$$

Es wird also das Element der Kurve gleich

$$\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{dd}y = \mathrm{d}p\mathrm{d}x$$

sein, nachdem $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt wurde. Daraus wird also

$$MN = t = y\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad MO = u = \frac{-\mathrm{d}x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}p}$$

sein. Aus der ersten dieser Gleichungen wird

$$\mathrm{d}x = \frac{-u\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

die erste gibt differenziert

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t + pp\mathrm{d}t - pt\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach Verbinden dieser Gleichungen wird man also

$$pu\mathrm{d}p = pt\mathrm{d}p - \mathrm{d}t - pp\mathrm{d}t$$

haben.

§42 Diese gefundene Gleichung, weil u durch t gegeben zu sein festgesetzt wird, lässt die Trennung der Variablen zu, sie geht nämlich in diese über

$$\frac{p\mathrm{d}p}{1+pp} = \frac{\mathrm{d}t}{t-u},$$

deren Integral

$$\ln\sqrt{1+pp} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t-u}$$

ist. Es sei

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-u} = \ln q,$$

es wird

$$\sqrt{1+pp} = q \quad \text{und} \quad y = \frac{t}{q}$$

sein. Daher ist also weiter

$$\mathrm{d}y = \frac{q\mathrm{d}t - t\mathrm{d}q}{qq} = p\mathrm{d}x = \mathrm{d}x\sqrt{qq-1}$$

und daher

$$x = \int \frac{q\mathrm{d}t - t\mathrm{d}q}{qq\sqrt{qq-1}}.$$

Daraus erkennt man, damit die Kurve AM algebraisch wird, dass verlangt wird, dass zuerst natürlich

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-u}$$

durch Logarithmen beschafft werden kann, und daraus, dass

$$\frac{q\mathrm{d}t - t\mathrm{d}q}{qq\sqrt{qq-1}}$$

eine Integration zulässt.

§43 Es sei MO ein Vielfaches von MN oder

$$u = nt \qquad \left[n = \frac{m}{m-1}\right];$$

es wird

$$q = a^{m-1}t^{1-m} \quad \text{und} \quad y = \frac{t^m}{a^{m-1}}$$

sein. Es wird aber weiter

$$\mathrm{d}y = \frac{mt^{m-1}\mathrm{d}t}{a^{m-1}} = p\mathrm{d}x = \mathrm{d}x\sqrt{a^{2m-2}t^{2-2m} - 1}$$

sein, woher

$$\mathrm{d}x = \frac{mt^{2m-2}\mathrm{d}t}{a^{m-1}\sqrt{a^{2m-2} - t^{2m-2}}} \quad \text{und} \quad x = \int \frac{mt^{2m-2}\mathrm{d}t}{a^{m-1}\sqrt{a^{2m-2} - t^{2m-2}}}$$

wird. Daraus erkennt man, dass die Kurve algebraisch sein wird, wenn diese Formel integrierbar war; dies geschieht aber, sooft entweder $\frac{m}{m-1}$ eine ungerade positive Zahl oder $m = \frac{2i+1}{2i}$ war, oder $\frac{m}{1-m}$ eine gerade positive Zahl oder $m = \frac{2i}{2i+1}$, während i eine ganze positive Zahl bezeichnet. Der Fall aber, in dem $n = 1$ ist, gibt $t = u$ und $\mathrm{d}t = 0$ oder $t = u =$ Konstante, woraus man erkennt, dass die Kurve ein Kreis ist.

§44 Es sei nun irgendeine Gleichung zwischen dem Bogen AM und dem Krümmungsradius MO gegeben, aus welcher die Gleichung zwischen den Koordinaten AP und PM bestimmt werden muss. Bevor ich aber zeige, wie diese zu finden ist, sollte bemerkt werden, dass die Art diese Kurven durch eine Gleichung zwischen Bögen und Krümmungsradius auszudrücken besonders, um Kurven zu erkennen, geeignet ist. Die Gleichung zwischen orthogonalen Koordinaten oder zwischen dem Radius und dem Lot zur Tangente kann auf so vielfältige und verschiedene Formen, indem man andere Achsen und andere Anfänge der Abszissen nimmt, andeuten, dass, auf welche Kurve sie sich bezieht, obwohl die Kurve altbekannt ist, oft schwer erkannt werden kann. Aber die Gleichung, die zwischen der Kurve und dem Krümmungsradius nur für verschiedene Punkte beschafft wird, in denen der Anfang der Kurve gesetzt wird, kann variieren, welche Varietät aber dennoch sehr leicht erkannt wird. Wenn es also üblich wäre, die Natur von Kurven durch Gleichungen dieser Art anzugeben, würde die erwähnte Schwierigkeit freilich weggeschafft werden, aber, ob die Kurve algebraisch wäre oder transzendent, wäre nicht so leicht klar. Diesem Umstand würde man aber auf die folgende Weise entgegenwirken.

§45 Es sei der Bogen $AM = s$ und der Krümmungsradius $MO = r$ und es sei irgendeine Gleichung zwischen s und r gegeben.

Man setze $AP = x$, $PM = y$ und es sei $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$; nach Festlegen davon wird

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{xx+1} \quad \text{und} \quad r = \frac{-\mathrm{d}x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}p}$$

sein. Aus jener Gleichung aber ist

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{pp+1}},$$

aus dieser aber

$$\mathrm{d}x = \frac{-r\mathrm{d}p}{(pp+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Deswegen wird diese Gleichung hervorgehen

$$\mathrm{d}s(pp+1) = -r\mathrm{d}p \quad \text{oder} \quad -\frac{\mathrm{d}s}{r} = \frac{\mathrm{d}p}{1+pp}.$$

Es bezeichne $\int \frac{\mathrm{d}s}{r}$ den Bogen des Kreises, dessen Tangens q sei, nachdem der Radius gleich 1 gesetzt wurde; und es wird

$$At \cdot b - At \cdot q = At \cdot p$$

sein, woher

$$p = \frac{b-q}{1+bq} \quad \text{und} \quad \sqrt{pp+1} = \frac{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}{1+bq}.$$

Daraus entsteht

$$\mathrm{d}x = \frac{(1+bq)\mathrm{d}s}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = \frac{(b+q)\mathrm{d}s}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}.$$

Daher sieht man ein, wenn zuerst $\int \frac{\mathrm{d}s}{r}$ den Bogen des Kreises bezeichnet, dessen Tangens algebraisch durch q beschafft werden kann, und darauf

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1+qq}} \quad \text{sowie} \quad \frac{q\mathrm{d}s}{\sqrt{1+qq}}$$

eine Integration zulässt, dass die Kurve algebraisch sein wird.

§46 Wenn aber $\frac{\mathrm{d}s}{r}$ absolut integriert werden kann, kann es auch geschehen, dass die Kurve algebraisch ist, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{r} = v$$

ist und es wird

$$At \cdot p = b - v \quad \text{und} \quad p = t \cdot A(b - v).$$

sein. Daraus wird

$$x = \int \mathrm{d}s \cos A(b - v) \quad \text{und} \quad y = \int \mathrm{d}s \sin A(b - v).$$

Sooft also diese Integrale so beschafft werden können, dass sie nur $\sin A(b - v)$ und $\cos A(b - v)$ enthalten, genauso oft erhält man wegen

$$1 = \square \sin A(b - v) + \square \cos A(b - v)$$

eine algebraische Gleichung zwischen x und y. Wenn $z.\,B.$ $r = a$ war, wird

$$x = -a \sin A(b - v) \quad \text{oder} \quad y = a \cos A(b - v)$$

sein und daher

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 = a^2 - x^2,$$

die Gleichung für den Kreis, dessen Radius gleich a ist.