Konstruktion der Differentialgleichung $ax^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x$

Leonhard Euler

§1 Ich habe neulich der Gesellschaft ein Beispiel für eine Konstruktion einer gewissen Differentialgleichung mitgeteilt, in welcher ich nicht nur die Unbestimmten voneinander nicht hatte trennen können, sondern auch gezeigt hatte, dass aus der Konstruktion eine Separation von dieser Art ganz und gar nicht beschafft werden kann. Meine dort gegebene Konstruktionsmethode unterscheidet sich von den gewöhnlichen. Aber dennoch wird jeder, der dieses Schriftstück inspiziert haben wird, einsehen, dass jenes diesen in keinster Weise nachzustellen ist. Aber weder ließ sich dann zu der Zeit diese Methode weiter ausdehnen und auf andere Gleichungen anwenden, weil ich aus einer festgelegten Konstruktion schließlich zu einer Gleichung gelangt war, aber umgekehrt, nachdem eine Gleichung gegeben wurde, die Konstruktion nicht hatte finden können. Aber nachdem ich darauf diese Sache sorgfältiger betrachtet hatte, konnte ich meinen Wunsch einigermaßen erfüllen, sodass ich diese Methode umkehren und die Konstruktion der vorgelegten Gleichung finden konnte.

§2 Ich habe also sofort, um es zu versuchen, diese besonders intensiv behandelte Gleichung

$$ax^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x$$

ausgewählt, die der hochberühmte Riccati als erster den Geometern zu untersuchen vorgelegt hat; niemand aber hat ihre Konstruktion, außer für gewisse Werte des Buchstaben n, angegeben. Mithilfe meiner Methode habe ich in der

Tat alle Schwierigkeiten glücklich überkommen, und habe eine allgemeine Konstruktion dieser Gleichung gefunden, bei welcher überhaupt nicht mehr verlangt werden kann. Nicht nur eine Konstruktion aber liefert diese Methode, sondern mehrere, sogar unzählige. Mit Recht also scheine ich dieser Methode einen so großen Nutzen zuzuschreiben, dass sie einen Weg aufzeigen wird, um alle Differentialgleichungen zu konstruieren, in denen andere Methoden vergeblich verwendet wurden.

§3 Wie ich aber in den oberen Abhandlungen den Ellipsenbogen zur Konstruktion dieser Gleichung

$$dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x dx}{x^2 - 1}$$

benutzt habe, so wird für die vorgelegte Gleichung eine andere anstelle der Ellipse einzusehende Kurve nötig sein. Um diese zu finden, setze ich sehr allgemein ihr Element gleich $PRdz$, bei welchem P und R solche Funktionen von z sind, die nach denselben Operationen wie oben beim Ellipsenbogen auf die vorgelegte Gleichung führen sollen. Ich setze weiter, damit eine gewisse Reihe in die Betrachtung hineinkommt,

$$R = 1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 + ABCDg^4Q^4 + \text{etc},$$

in welcher Reihe Q eine bestimmte Funktion von z ist, g eine gegebene Linie oder quasi der Parameter der Kurve und A, B, C, D, etc konstante Koeffizienten. Man setze

$$PRdz = dZ,$$

es wird also

$$Z = \int Pdz + \int AgPQdz + \int ABg^2PQ^2dz + \int ABCg^3PQ^3dz + \text{etc}$$

sein.

§4 P und Q sollen aber so voneinander abhängen, dass alle diese Integrale auf $\int P\mathrm{d}z$ reduziert werden können. Es sei also

$$\begin{aligned}\int PQ\mathrm{d}z &= \alpha \int P\mathrm{d}z + O_1 \\ \int PQ^2\mathrm{d}z &= \alpha\beta \int P\mathrm{d}z + O_2 \\ \int PQ^3\mathrm{d}z &= \alpha\beta\gamma \int P\mathrm{d}z + O_3 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Hier bezeichnen O_1, O_2, O_3, etc algebraische Größen. Nach der auf diese Weise durchgeführten Integration setze man $h = z$; aber h ist eine solche Größe, die anstelle von z eingesetzt bewirkt, dass all diese algebraischen Größen O_1, O_2, O_3, etc verschwinden, und dann $\int P\mathrm{d}z = H$ zu einer völlig konstanten Größe wird. Daraus wird also, nachdem nach der Integration $z = h$ gesetzt wurde,

$$Z = H(1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 + \text{etc})$$

sein. Nachdem nun der Parameter variabel gemacht wurde, wird man unendlich viele Werte von Z für unendlich viele von g erhalten, und aus dem gegebenen Element $PR\mathrm{d}z$ wird eine Kurve konstruiert werden können, in welcher, wenn die Abszissen mit dem Buchstaben g bezeichnet werden, die Ordinaten gleich Z sind.

§5 Auf diese Weise wird deshalb die Summe der Reihe

$$1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 + \text{etc}$$

konstruiert werden können, obwohl vielleicht aus der Betrachtung ihrer selbst die Summe überhaupt nicht bestimmt werden kann. Ich benutze aber, um die Summe dieser Reihe zu untersuchen, meine Methode, den Fund der Summe einer Reihe auf die Auflösung von Gleichungen zurückzuführen, welche ich im vorherigen Jahr erläutert habe, damit ich eine Gleichung erhalte, deren Auflösung von der Summe der Reihe abhängt. Es ist nämlich klar, wie perplex auch immer diese resultierende Gleichung war, dass ihre Konstruktion dennoch leicht sein wird. Nun ist also nicht anderes zu machen, außer dass die Größen A, B, C, etc und α, β, γ, etc von solcher Art gewählt werden, dass der Fund der Summe dieser Reihe auf die Auflösung dieser Gleichung

$$ax^n\mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$$

geführt wird. An dieser Stelle ist es aber zu bewirken, dass die Reihe

$$1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 + \text{etc}$$

in eine Summe überführt werden kann, weil andernfalls der Wert von R nicht bekannt wäre, und daher die ganze Konstruktion unnütz. Deswegen werden sich anstelle von A, B, C, etc die Werte nicht nach Belieben annehmen lassen, sondern nur solche, die diese Reihe summierbar machen.

§6 Damit also klar wird, von welcher Art die Reihe

$$1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 + \text{etc}$$

sein muss, damit ihre Summation auf die Auflösung der Gleichung

$$ax^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x$$

geführt wird, löse ich diese Gleichung selbst in eine Reihe auf. Damit das bequemer gemacht werden kann, setze ich

$$y = \frac{\mathrm{d}t}{t\mathrm{d}x},$$

und für konstant genommenes $\mathrm{d}x$ wird

$$ax^n \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{dd}t}{t\mathrm{d}x} \quad \text{oder} \quad ax^n t \mathrm{d}x^2 = \mathrm{dd}t$$

sein. Nun setze ich auf die gewohnte Weise anstelle von t diese Reihe

$$1 + \mathfrak{A}x^{n+2} + \mathfrak{B}x^{2n+4} + \mathfrak{C}x^{3n+6} + \text{etc}$$

ein, es wird

$$\begin{aligned}\mathrm{dd}t =& (n+1)(n+2)\mathfrak{A}x^n \mathrm{d}x^2 + (2n+3)(2n+4)\mathfrak{B}x^{2n+2}\mathrm{d}x^2 \\ &+ (3n+5)(3n+6)\mathfrak{C}x^{3n+4}\mathrm{d}x^2 + \text{etc}\end{aligned}$$

sein. Dieser Reihe muss $ax^n t\mathrm{d}x^2$ gleich sein, oder diese Reihe

$$ax^n \mathrm{d}x^2 + \mathfrak{A}ax^{2n+2}\mathrm{d}x^2 + \mathfrak{B}ax^{3n+4}\mathrm{d}x^2 + \text{etc},$$

deswegen mache ich die homogenen Terme gleich, indem ich die nach Belieben angenommenen Buchstaben bestimme, und es wird

$$\mathfrak{A} = \frac{a}{(n+1)(n+2)}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}a}{(2n+3)(2n+4)}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}a}{(3n+5)(3n+6)}, \quad \text{etc}$$

werden. Man setze der Kürze wegen $ax^{n+2} = f$, es wird

$$\begin{aligned} t =& 1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} \\ &+ \frac{f^3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \text{etc} \end{aligned}$$

sein. Die Summation dieser Reihe also hängt von der Konstruktion der vorgelegten Gleichung

$$ax^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x$$

ab. Deswegen, wenn die Reihe

$$1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + \text{etc}$$

in sie verwandelt werden kann, wird man zugleich die Konstruktion der vorgelegten Gleichung haben.

§7 Aber damit diese Reihe, die natürlich zu allgemein ist, ein wenig mehr beschränkt wird und die Bestimmung der beliebigen Buchstaben leichter gemacht wird, setze in der anfangs angenommenen Formel $PR\mathrm{d}z$

$$P = \frac{1}{(1+bz^\mu)^\nu} \quad \text{und} \quad Q = \frac{z^\mu}{1+bz^\mu}.$$

Es wird also

$$\int P\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^\nu}, \quad \int PQ\mathrm{d}z = \int \frac{z^\mu \mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}}, \quad \text{und}$$

$$\int PQ^2\mathrm{d}z = \int \frac{z^{2\mu}\mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}}, \quad \text{etc}$$

sein. Alle diese Integrale können aber auf das erste $\int \frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^\nu}$ zurückgeführt werden; es ist nämlich allgemein

$$\int \frac{z^{\theta\mu}\mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}} = \frac{(\theta-1)\mu+1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \int \frac{z^{(\theta-1)\mu}\mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}} - \frac{1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \cdot \frac{z^{(\theta-1)\mu+1}}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}}.$$

Deswegen wird

$$\int \frac{z^\mu \mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}} = \frac{1}{b\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1 \cdot z}{b\mu\nu(1+bz^\mu)^\nu}$$

und

$$\int \frac{z^{2\mu}\mathrm{d}z}{(1+bz^{\mu})^{\nu+2}} =$$

$$\frac{1(\mu+1)}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)}\int\frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^{\mu})^{\nu}} - \frac{(\mu+1)z}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)(1+bz^{\mu})^{\nu}} - \frac{1\cdot z^{\mu+1}}{b\mu(\nu+1)(1+bz^{\mu})^{\nu+1}}, \text{etc.}$$

Es wird also h eine Größe solcher Art sein müssen, dass sie anstelle von z eingesetzt [§4]

$$\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}} = 0$$

ergibt. Es wird aber h nicht gleich 0 sein können, weil dann meistens zugleich die Größe $\int\frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^{\mu})^{\nu}}$ verschwinden würde. Nachdem nur diese Reduktionen mit den oben angenommenen verglichen wurden, werden die Buchstaben α, β, γ, δ, etc bestimmt. Es wird natürlich

$$\alpha = \frac{1}{b\mu\nu}, \quad \beta = \frac{\mu+1}{b\mu(\nu+1)}, \quad \gamma = \frac{2\mu+1}{b\mu(\nu+2)}, \quad \text{etc}$$

sein.

§8 Nachdem auf diese Weise die Buchstaben α, β, γ, etc bestimmt wurden, betrachte ich die anderen, A, B, C, etc, von denen ich sehe, dass jeder beliebige eine Form dieser Art $\frac{1}{\sigma\tau}$ haben muss, natürlich die Einheit geteilt durch das Produkt aus zwei Faktoren. Damit aber zugleich die Reihe

$$1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 + \text{etc}$$

summiert werden kann, setze ich

$$A = \frac{1}{\pi(\pi+\varrho)}, \quad B = \frac{1}{(\pi+2\varrho)(\pi+3\varrho)}, \quad C = \frac{1}{(\pi+4\varrho)(\pi+5\varrho)}, \quad \text{etc,}$$

und dann wird die Reihe mit Hilfe meiner allgemeinen Methode Reihen zu summieren summiert werden können. Ich setze zuerst der Kürze wegen $gQ = q^2$, es wird

$$R = 1 + \frac{q^2}{\pi(\pi+\varrho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)(\pi+3\varrho)} + \text{etc}$$

sein, setze $R - 1 = S$, es wird

$$S = \frac{q^2}{\pi(\pi+\varrho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)(\pi+3\varrho)} + \text{etc}$$

sein. Ich multipliziere überall mit $\varrho q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}$ und nehme die Differentiale, es wird

$$\frac{\varrho \mathrm{d}(q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}S)}{\mathrm{d}q} = \frac{q^{\frac{\pi}{\varrho}}}{\pi} + \frac{q^{\frac{\pi+2\varrho}{\varrho}}}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)} + \text{etc}$$

sein. Ich multipliziere nun mit ϱ und nehme erneut die Differentiale, indem ich $\mathrm{d}q$ konstant setze, es wird

$$\begin{aligned}\frac{\varrho^2 \mathrm{dd}(q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}S)}{\mathrm{d}q^2} &= q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} + \frac{q^{\frac{\pi+\varrho}{\varrho}}}{\pi(\pi+\varrho)} + \text{etc}\\ &= q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} + q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}\left(\frac{q^2}{\pi(\pi+\varrho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)(\pi+3\varrho)} + \text{etc}\right)\end{aligned}$$

sein. Wir werden also nach Wiedereinsetzen von S anstelle der Reihe

$$\frac{q^2}{\pi(\pi+\varrho)} + \text{etc}$$

diese Gleichung haben:

$$\varrho^2 \mathrm{dd}(q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}S) = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}\mathrm{d}q^2 + q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}S\mathrm{d}q^2.$$

Ich setze weiter der Kürze wegen

$$q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}S = T,$$

es wird

$$\varrho^2 \mathrm{dd}T = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}\mathrm{d}q^2 + T\mathrm{d}q^2$$

sein.

§9 Um diese Gleichung zu integrieren, setze ich $T = rs$, es wird

$$\mathrm{dd}T = r\mathrm{dd}s + 2\mathrm{d}r\mathrm{d}s + s\mathrm{dd}r$$

sein, nach Einsetzen von welchem man

$$\varrho^2 r\mathrm{dd}s + 2\varrho^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}s + \varrho^2 s\mathrm{dd}r = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} dq^2 + rs\mathrm{d}q^2$$

hat, welche man in zwei Gleichungen aufteile,

$$\varrho^2 r\mathrm{dd}s = rs\mathrm{d}q^2$$

und

$$2\varrho^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}s + \varrho^2 s\mathrm{dd}r = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q^2.$$

Die erste von dieser geht durch r geteilt in diese über $\varrho^2 \mathrm{dd}s = s\mathrm{d}q^2$, die mit $\mathrm{d}s$ multipliziert diese

$$\varrho^2 \mathrm{d}s\mathrm{dd}s = s\mathrm{d}s\mathrm{d}q^2$$

gibt, deren Integral

$$\varrho^2 \mathrm{d}s^2 = s^2 \mathrm{d}q^2$$

ist oder diese $\varrho\mathrm{d}s = s\mathrm{d}q$, die erneut integriert

$$\varrho \ln s = q \quad \text{und} \quad s = c^{\frac{q}{\varrho}}$$

gibt, während c die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus 1 ist. Nachdem deshalb s gefunden wurde, nehme ich die andere Gleichung an

$$2\varrho^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}s + \varrho^2 s\mathrm{dd}r = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q^2,$$

die, nachdem anstelle von s der gefundene Wert $c^{\frac{q}{\varrho}}$ eingesetzt wurde, in die übergeht

$$2\varrho c^{\frac{q}{\varrho}} \mathrm{d}q\mathrm{d}r + \varrho^2 c^{\frac{q}{\varrho}} \mathrm{dd}r = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q^2.$$

Man setze $\mathrm{d}r = \nu\mathrm{d}q$, es wird $\mathrm{dd}r = \mathrm{d}\nu\mathrm{d}q$ sein und die Gleichung wird in diese einfache Differentialgleichung verwandelt werden:

$$2\varrho c^{\frac{q}{\varrho}} \nu\mathrm{d}q + \varrho^2 c^{\frac{q}{\varrho}} \mathrm{d}\nu = q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q,$$

die ich mit $c^{\frac{q}{\varrho}}$ multipliziere, damit

$$2\varrho c^{\frac{2q}{\varrho}} \nu\mathrm{d}q + \varrho^2 c^{\frac{2q}{\varrho}} \mathrm{d}\nu = c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q$$

hervorgeht, deren Integral

$$\varrho^2 c^{\frac{2q}{\varrho}} \nu = \int c^{\frac{q}{\nu}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q$$

ist. Es wird also

$$\nu = \frac{1}{\varrho^2} c^{-\frac{2q}{\varrho}} \int c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}$$

und

$$\int \nu\mathrm{d}q \quad \text{oder} \quad r = \frac{1}{\varrho^2} \int c^{-\frac{2q}{\varrho}} \mathrm{d}q \int c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q$$

sein. Es wird also

$$rs = T = \frac{1}{\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} \int c^{-\frac{2q}{\varrho}} \mathrm{d}q \int c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q$$

und

$$S = \frac{1}{\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\varrho-\pi}{\varrho}} \int c^{-\frac{2q}{\varrho}} \mathrm{d}q \int c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q$$

sein.

§10 Weil ja in dieser gefundenen Form eine zweifache Integration involviert wird, ist zu bemerken, dass sie ausgeführt werden muss, dass S wie $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}$ für $q = 0$ gesetzt gleich 0 werden, wie auch aus der Reihe, welcher S gleich ist, klar wird. Nachdem diese Dinge bemerkt wurden hat man schließlich

$$R = 1 + \frac{1}{\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\varrho-\pi}{\varrho}} \int c^{-\frac{2q}{\varrho}} \mathrm{d}q \int c^{-\frac{q}{\varrho}} q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}} \mathrm{d}q.$$

Es ist aber $q = \sqrt{gQ}$ und wegen

$$Q = \frac{z^\mu}{1 + bz^\mu}$$

wird

$$q = \sqrt{\frac{qz^\mu}{1 + bz^\mu}}$$

sein. Es wird aus diesen

$$\int PR\mathrm{d}z \quad \text{oder} \quad \int \frac{R\mathrm{d}z}{1 + bz^\mu}$$

gegeben sein. Daher, wenn die Buchstaben π, ϱ, μ und ν die entsprechenden Werte in n zugeteilt werden, wird die Konstruktion der vorgelegten Gleichung

$$ax^n\mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$$

leicht sein.

§11 Nachdem dies gemacht wurde, kehre ich zum vorgelegten zurück, und nehme wieder die Reihe

$$1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + \text{etc},$$

die, nachdem anstelle von A, α, B, β, C, γ, etc die ausgewählten Werte eingesetzt wurden, in diese verwandelt wird

$$1 + \frac{g}{b\mu\nu\pi(\pi+\varrho)} + \frac{(\mu+1)g^2}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)(\pi+3\varrho)} + \text{etc},$$

deren Bildungsgesetz dieses ist, dass der Term des Index $\theta + 1$ geteilt durch den Term des Index θ gleich

$$\frac{g(1+(\theta-1)\mu)}{b\mu(\nu+\theta-1)(\pi+(2\theta-2)\varrho)(\pi+(2\theta-1)\varrho)}$$

ist. In der Reihe aber, die wir in §6 aus der vorgelegten Gleichung gefunden haben, ist der gleiche Quotient des Terms des Index $\theta+1$ durch den Term des Index θ geteilt gleich

$$\frac{f}{(\theta n+2\theta-1)(\theta n+2\theta)}.$$

Damit also diese zwei Reihen übereinstimmen, ist nötig, dass diese zwei Quotienten einander gleich sind. Es werde also zuerst

$$\frac{g}{b} = f \quad \text{oder} \quad g = bf,$$

und nachdem dies festgesetzt wurde, wird

$$\frac{1}{(\theta n+2\theta-1)(\theta n+2\theta)} = \frac{\theta\mu-\mu+1}{(\mu\nu+\mu\theta-\mu)(\pi+2\theta\varrho-2\varrho)(\pi+2\theta\varrho-\varrho)}$$

sein müssen. Daher, wenn die Gleichung nach Dimensionen von θ geordnet wird und die Koeffizienten jeder Potenz von θ gleich 0 gesetzt werden, werden vier Gleichungen hervorgehen, aus denen μ, ν, π und ϱ in n bestimmt werden. Aber es ist nicht eine einzige Lösung gegeben, sondern es sind vier verschiedene, die sich auf unser Ziel beziehen. Die erste gibt $\mu = \frac{2n+4}{3n+4}$, $\nu = 1$, $\pi = n+1$ und $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Die zweite gibt $\mu = \frac{2n+4}{n}$, $\nu = 1$, $\pi = \frac{n}{2}$ und $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Die dritte gibt $\mu = 2$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = \frac{n+2}{2}$ und $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Die vierte gibt $\mu = \frac{2}{3}$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = n+2$ und $\varrho = \frac{n+2}{2}$.

§12 Es wird aber nicht nach Belieben eine dieser vier Lösungen verwendet werden können, sondern für die verschiedenen Fälle des Exponenten n muss die eine oder die andere ausgewählt werden. Dieses Urteil ist aus dieser in §7 erwähnten Bedingung abzuleiten, weil

$$\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$$

für $z=h$ gesetzt verschwinden muss. Dies passiert freilich, wenn $z=0$ ist, aber wenn außer diesem ein anderer verlangt wird, ist leicht klar, dass es nicht passieren kann, wenn nicht $h=\infty$ war. In jedem Fall von n ist also eine solche Lösung auszuwählen, dass

$$\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$$

für $z=\infty$ gesetzt gleich 0 wird. Es bezeichnet hier aber θ irgendeine ganze die 0 nicht ausgenommene Zahl, weswegen auch ν niemals eine negative Zahl sein können wird, weil andernfalls das Binom $1+bz^{\mu}$ in den Zähler käme. Aber μ bezeichnet eine positive sowie negative Zahl, woher eine zweifache Betrachtung dieser Sache existiert, je nachdem ob μ negativ oder positiv war. Es sei zuerst μ eine positive Zahl gleich $+\lambda$, das ist klar, damit

$$\frac{z^{\lambda\theta+1}}{(1+bz^{\lambda})^{\nu+\theta}}$$

für $z=\infty$ gesetzt gleich 0 wird, sodass der größte Exponent von z im Nenner, der $\lambda\nu+\lambda\theta$ ist, größer sein muss als der Exponent desselben z im Exponent, der $\lambda\theta+1$ ist. Es wird also $\lambda\nu>1$ sein. Wenn aber μ eine negative Zahl war oder gleich $-\lambda$, wird

$$\frac{z^{-\lambda\theta+1}}{(1+bz^{-\lambda})^{\nu+\theta}}=\frac{z^{\lambda\nu+1}}{(z^{\lambda}+b)^{\nu+\theta}}$$

werden; damit diese Größe für $z=\infty$ gesetzt gleich 0 wird, wird

$$\lambda\nu+\lambda\theta>\lambda\nu+1 \quad \text{oder} \quad \lambda\theta>1$$

sein müssen, was im Fall $\theta=0$ nicht geschehen kann. Deshalb wird μ niemals eine negative Zahl sein können. In der ersten Lösung wird, weil $\nu=1$ ist, sooft λ z. B. $\frac{2n+4}{3n+4}$ eine positive Zahl war, genauso oft zugleich eine Zahl als die Einheit sein müssen; es werden also die Fälle ausgenommen, in denen

$\frac{2n+4}{3n+4}$ gleich 1 oder kleiner als die Einheit ist. Wenn also n nicht innerhalb diesen Grenzen 0 und $-\frac{4}{3}$ enthalten ist, wird die erste Lösung nicht verwendet werden können. In der zweiten Lösung, weil wiederum $\nu = 1$ ist, werden in gleicher Weise die Fälle ausgenommen, in denen λ oder $\frac{2n+4}{n}$ die Einheit oder kleiner als die Einheit ist. Diese Lösung wird immer Geltung haben, nachdem nur diese Fälle ausgenommen wurden, wann immer n innerhalb von diesen Grenzen -4 und 0 enthalten ist. Für die dritte Lösung, weil μ nun eine positive Zahl, nämlich gleich 2, ist, wird nur $\frac{2n+2}{n+2}$ eine Zahl größer als die Einheit sein müssen. Diese werden wir also immer benutzen können, wenn n nicht innerhalb dieser Grenzen -2 und 0 enthalten ist; sooft also die zweite Geltung hat, wird genauso oft auch die dritte benutzt werden können. In der vierten Lösung, weil μ auch eine positive Zahl ist, natürlich $\frac{2}{3}$, ist erfordert, dass $\frac{2n+2}{3n+6}$ eine Zahl größer als die Einheit ist, was passiert, sooft n innerhalb dieser Grenzen -2 und -4 enthalten ist. In diesen Fällen wird also die vierte Lösung verwendet werden müssen. Aus diesen miteinander verglichen erkennt man, dass auf diese Weise immer eine Konstruktion der vorgelegten Gleichung beschafft werden kann, wenn n nicht innerhalb diesen engen Grenzen $-\frac{4}{3}$ und -2 enthalten ist.

§13 Damit aber diese ganze Aufgabe besser erfasst wird, werde ich das, was bisher angegeben wurde, auf den speziellen Fall, indem $n = 2$ ist, anwenden, dass deshalb diese Gleichung zu konstruieren ist

$$ax^2 \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x.$$

Für diesen Fall wähle ich also die dritte Lösung aus, und es wird deshalb

$$\mu = 2, \quad \nu = \frac{3}{4}, \quad \pi = \varrho = 2$$

sein. Nach Einsetzen dieser Werte wird man

$$S = \frac{1}{4} c^{\frac{q}{2}} \int c^{-q} \mathrm{d}q \int c^{\frac{q}{2}} \mathrm{d}q$$

haben. Es ist aber $\int c^{\frac{q}{2}} \mathrm{d}q = 2c^{\frac{q}{2}} + i$, also

$$\int c^{-q} \mathrm{d}q \int c^{\frac{q}{2}} \mathrm{d}q = \int 2c^{-\frac{q}{2}} \mathrm{d}q + i \int c^{-q} \mathrm{d}q = -c^{-\frac{q}{2}} - ic^{-q} + k.$$

Als logische Konsequenz geht

$$S = \frac{k}{4} c^{\frac{q}{2}} - \frac{i}{4} c^{-\frac{q}{2}} - \frac{1}{4}$$

hervor. Weil nun für $q = 0$ gesetzt S verschwinden muss, wird man diese Gleichung haben

$$\frac{k}{4} - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} = 0, \quad \text{oder} \quad k = 1 + i.$$

Weil weiter $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}$ gleich 0 sein muss, wenn $q = 0$ ist, wird $i + k = 0$ hervorgehen. Denn es ist

$$\mathrm{d}S = \frac{k}{8} c^{\frac{q}{2}} \mathrm{d}q + \frac{i}{8} c^{-\frac{q}{2}} \mathrm{d}q$$

und deshalb für $q = 0$ gesetzt

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q} = \frac{k}{8} + \frac{i}{8} = 0.$$

Aus diesen Bedingungen findet man $i = -\frac{1}{2}$ und $k = \frac{1}{2}$; deswegen wird

$$S = \frac{c^{\frac{q}{2}} + c^{-\frac{q}{2}}}{8} - \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad R = \frac{3}{4} + \frac{c^{\frac{q}{2}} + c^{-\frac{q}{2}}}{8}.$$

Weil ja aber $\mu = 2$ und $g = bf$ ist, wird $q = \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$ und daher

$$R = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} c^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} + \frac{1}{8} c^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}$$

sein. Als logische Konsequenz findet man

$$\int PR\mathrm{d}z = \frac{3}{4} \int \frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{8} \int \mathrm{d}z \frac{c^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} + c^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Dieses Integral nehme man so, dass es für $z = 0$ gesetzt gleich 0 wird, wonach man $z = \infty$ setzte, und es wird eine Größe hervorgehen, die als Funktion von f betrachtet werden kann. Es werde darauf f variabel und an die Stelle werde ax^4 gesetzt, diese Funktion wird durch H geteilt gleich t sein (siehe §6). Und nach dem Fund dieses t wird $y = \frac{\mathrm{d}t}{t\mathrm{d}x}$ sein, welcher der wahre Wert von y aus der vorgelegten Gleichung

$$ax^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$$

ist.

§14 Die Konstruktion der allgemeinen Gleichung

$$ax^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x$$

wird nicht schwerer, solange n nicht innerhalb dieser Grenzen 0 und -2 enthalten ist. Wir werden nämlich die dritte Lösung benutzen können, in welcher

$$\mu = 2, \quad \nu = \frac{n+1}{n+2}, \quad \pi = \varrho = \frac{n+2}{2}$$

sei. Es wird also

$$S = \frac{1}{\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} \int c^{-\frac{2q}{\varrho}} \mathrm{d}q \int c^{\frac{q}{\varrho}} \mathrm{d}q$$

sein. Nachdem die Integration auf die gleiche Weise wie oben ausgeführt wurde, findet man

$$S = \frac{k}{\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} - \frac{i}{\varrho^2} c^{-\frac{q}{\varrho}} - \frac{1}{\varrho^2},$$

wo i und k aus diesen Gleichungen $k = 1 + i$ und $k + i = 0$ bestimmt werden müssen, es ist also wie zuvor $i = -\frac{1}{2}$ und $k = \frac{1}{2}$. Deswegen ist

$$S = \frac{1}{2\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} + \frac{1}{2\varrho^2} c^{-\frac{q}{\varrho}} - \frac{1}{\varrho^2} \quad \text{und} \quad R = 1 - \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{2\varrho^2} c^{\frac{q}{\varrho}} + \frac{1}{2\varrho^2} c^{-\frac{q}{\varrho}}$$

oder, nachdem anstelle von ϱ der Wert $\frac{n+2}{2}$ gesetzt wurde, wird man

$$R = \frac{n(n+4) + 2c^{\frac{2q}{n+2}} + 2c^{-\frac{2q}{n+2}}}{(n+2)^2}$$

haben. Es ist in der Tat wie zuvor

$$q = \sqrt{\frac{bfz^2}{1 + bz^2}}, \quad \text{aber} \quad P\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{(1 + bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}.$$

Deswegen wird

$$\int PR\mathrm{d}z = \frac{1}{(n+2)^2} \int \frac{\mathrm{d}z}{(1 + bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} \left(n(n+4) + 2c^{\frac{2q}{n+q}} + 2c^{-\frac{2q}{n+2}} \right)$$

sein, wo ich q anstelle von $\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$ übrig lasse. Das Integral von $PR\mathrm{d}z$ nehme man so, dass es für $z = 0$ gesetzt verschwindet, wonach man $z = \infty$ setze, und es bezeichne H das, was hervorgeht, wenn nur

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(1 + bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$$

auf diese Weise integriert wird, dass es für $z = 0$ gesetzt gleich 0 wird, und danach setze man $z = \infty$. Dann wird das Integral von $PR\mathrm{d}z$ auf die vorgeschriebene Weise angenommen sein, weil wir Z in §4 als Funktion von f gesetzt haben. Es war aber der Größe H gleich gesetzt worden, die mit dieser Reihe

$$1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + \text{etc}$$

multipliziert wurde, welche Reihe in die folgende verwandelt wurde

$$1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \text{etc},$$

deren Summe t ist, siehe §6, wo f ax^{n+2} bezeichnet. Es wird also $Z = Ht$ sein, worin H eine konstante Größe ist, weil in ihr f nicht und daher auch x nicht enthalten ist. Es geht deshalb $t = \frac{Z}{H}$ hervor, aber es ist $y = \frac{\mathrm{d}t}{t\mathrm{d}x}$; also wird für die vorgelegte Gleichung

$$ax^n\mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$$

die Gleichung

$$y = \frac{\mathrm{d}Z}{Z\mathrm{d}x}$$

hervorgehen. Um jene Gleichung zu konstruieren, haben wir diese Regel:

Man integriere diese Formel

$$\frac{1}{(n+2)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} \left(n(n+4) + 2c^{\frac{2}{n+2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} + 2c^{-\frac{2}{n+2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} \right),$$

sodass sie für $z = 0$ gesetzt verschwindet. Dann setze man z unendlich, und setze anstelle von f ax^{n+2}. Was hervorgeht, sei Z, nach Bekanntwerden wovon $y = \frac{\mathrm{d}Z}{Z\mathrm{d}x}$ sein wird. Wenn es jemanden missfällt, dass nach der Integration $z = \infty$ gesetzt werden muss, setze er anstelle von z $\frac{u}{1-u}$ ein und setze nach der Integration $u = 1$, wonach für Z derselbe Wert hervorgehen wird, wie zuvor. Obwohl aber ein analytischer Ausdruck für Z nicht erhalten werden kann, wann immer jene Formel nicht integrierbar ist, wird dennoch durch Quadraturen und Rektifikationen der Wert von Z konstruiert werden können.

§15 Obwohl aber in dieser Konstruktion die Fälle ausgeschlossen werden, in denen n innerhalb der Grenzen -2 und 0 enthalten ist, ist diese Lösung nichtsdestoweniger für allgemein zu halten. Denn weil, wenn die Gleichung im Fall $n = m$ aufgelöst werden kann, man die Auflösung auch im Fall $n = -m - 4$ hat, wie aus dem bekannt ist, was über die separierbaren Fälle entdeckt worden ist, ist ersichtlich, wenn m eine innerhalb der Grenzen 0 und -2 enthaltene Zahl ist, auch $-m - 4$ innerhalb der Grenzen -2 und -4 erfasst werden wird, und daher in unserer Lösung enthalten ist. Deswegen, wenn ein Fall auftaucht, in dem n innerhalb von 0 und -2 enthalten ist, führe man diesen sofort auf einen anderen durch das besagte Theorem zurück, welcher Fall dann innerhalb von -2 und -4 enthalten ist, und dessen Konstruktion wird dann leicht sein.

§16 In der in §14 gefundenen Formel bemerkte ich, sooft $\frac{n+1}{n+2}$ eine Form dieser Art $k + \frac{1}{2}$ hatte, wo k eine ganze positive Zahl bezeichnet, dass die ganze Form [§17] integriert werden kann und deswegen der Wert von Z tatsächlich beschafft wird. In diesen Fällen wird also der Wert von y auch bestimmt werden und die Gleichung integriert werden können. Es wird aber dann $n = \frac{-4k}{2k+1}$ werden und sooft n eine solche Form hatte, wird die Gleichung

$$ax^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2 \mathrm{d}x$$

eine Integration zulassen. Darauf, weil der Fall, wenn $n = -\frac{m}{m+1}$ oder $n = -m - 4$ ist, auf den Fall $n = m$ zurückgeführt werden kann, wird die Gleichung auch integrierbar sein, wenn

$$n = \frac{-4k}{2k+1} \quad \text{oder} \quad \frac{-4k-4}{2k+1}$$

ist, während k irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet. Und diese sind jene integrierbaren oder separierbaren Fälle, die schon von anderen gefunden wurden, wie sich in unseren *Commentariis A. 1726* sehen lässt.

§17 Dass die Gleichung integrierbar ist, sooft

$$\frac{n+1}{n+2} = k + \frac{1}{2}$$

ist, zeige ich auf diese Weise: Ich setze

$$\frac{bz^2}{1+bz^2} = u^2;$$

es wird

$$z = \frac{u}{\sqrt{b(1-u^2)}}, \quad 1 + bz^2 = \frac{1}{1-u^2}$$

sein und daher

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b}}.$$

Es wird also

$$\frac{\mathrm{d}z}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{b}}(1-u^2)^{k-1}$$

werden. Deswegen wird die in §14 zu integrierende in diese verwandelt werden

$$\frac{1}{(n+2)^2\sqrt{b}}\left(n(n+4)\mathrm{d}u(1-u^2)^{k-1} + 2c^{\frac{2u\sqrt{f}}{n+2}}\mathrm{d}u(1-u^2)^{k-1}\right.$$
$$\left.+2c^{-\frac{2u\sqrt{f}}{n+2}}\mathrm{d}u(1-u^2)^{k-1}\right),$$

die, wie man leicht erkennt, in der Tat integriert werden kann, sooft k eine ganze positive Zahl war. Und daher glaube ich, dass meiner Methode, die so leicht und durchsichtig ist, nicht wenig an Nutzen zukommt, dass sie auch alle Fälle, die in der Tat eine Integration oder Separation zulassen, auf einen Blick zeigt.

§18 Eines Beispiels wegen nehme ich $k = 1$ an, es wird $n = -4$ sein, welcher Fall, wie bekannt ist, der leichteste derer ist, die eine Separation zulassen. Diese integrierende Formel wird also in diese übergehen

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}\left(c^{-u\sqrt{f}}\mathrm{d}u + c^{u\sqrt{f}}\mathrm{d}u\right),$$

deren Integral

$$\frac{1}{2\sqrt{bf}}\left(c^{u\sqrt{f}} - c^{-u\sqrt{f}}\right)$$

ist. Ich füge die Konstante nicht hinzu, weil für $z = 0$ gesetzt, oder was auf das selbe hinausläuft für $u = 0$, dass ganze Integral schon verschwindet. Es werde nun $z = \infty$, oder in unserem Fall $u = 1$, und man setze ax^{-2} anstelle von f; man wird

$$Z = \frac{x}{2\sqrt{ab}}\left(c^{\frac{\sqrt{a}}{x}} - c^{-\frac{\sqrt{a}}{x}}\right)$$

haben. Nachdem dies gefunden wurde, wird, wie schon gezeigt wurde, $y = \frac{\mathrm{d}Z}{Z\mathrm{d}x}$ sein. Nach Differentieren von Z und Teilen durch $Z\mathrm{d}x$ wird also

$$y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\left(\frac{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}}+1}{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}}-1}\right)$$

oder

$$\frac{2\sqrt{a}}{x} = \ln\frac{xxy - x - \sqrt{a}}{xxy - x + \sqrt{a}}$$

hervorgehen, welche Gleichung das Integral dieser Differentialgleichung ist

$$ax^{-4}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x.$$

Und auf die gleiche Weise findet man für die übrigen Fälle, die ein Separation zulassen, Integralgleichungen.