Specimen de Constructione Aequationum Differentialium sine Indeterminatarum Separatione.[1]

Author
Leonh. Euler

§1. Indeterminatarum separationem in aequationibus differentialibus ideo tam sollicite desiderari, quod ex ea inuenta aequationis constructio sponte fluat, cuique in his rebus exercitato satis perspectum esse arbitror. Integratio praeterea aequationum differentialinm (sic), siquidem succedit, optime indeterminatis separandis instituitur. Quanquam enim innumerabiles dantur aequationes, quarum integrales sine huiusmodi separatione inueniri possunt, cuiusmodi methodum exhibuit Celeb. *Joh. Bernoulli* in Comm. nostrorum Tom. I. pag. 167[2]; tamen eae aequationes omnes ita sunt comparatae, vt vel per se obuia sit indeterminatarum separatio, vel saltem ex ipsa integratione facile deriuetur. Similis vero est etiam ratio constructionum, quibus adhuc vsi sunt Analystae, sunt enim omnes huiusmodi, vt aequationis, si nullo alio modo indeterminatae a se inuicem separari possunt, separatio tamen ex ipsa constructione proficiscatur. Hanc ob rem nullam adhuc exhiberi posse existimo aequationem differentialem construibilem, cuius separatio omnes vires eluderet.

§2. Nuper autem in ellipsi rectificanda occupatus inopinato incidi in aequationem differentialem, quam ope rectificationis ellipsis construere poteram, neque tamen indeterminatarum separatio nequidem ex ipso construendi modo inueniri poterit. Aequatio vero quam obtinui erat haec $dy + \frac{y^2dx}{x} = \frac{x\,dx}{x^2-1}$ Riccatianae sere similis, et forte ad separandum aeque difficilis ac haec $dy + y^2\,dx = x^2\,dx$. Casus hic mihi primum vehementer paradoxus videbatur; at constructione attentius perspecta facile intellexi ex ea non solum separationem indeterminatarum no posse deduci, sed etiam, si alio modo separatio haec succederet, multo maiora sequutura esse absurda; comparationem scilicet perimetrorum ellipsium dissimilium, quae, vt mihi quidem videtur, omnem analysin superat. Constructio autem ipsa perquam est facilis, perspicitur enim elogatione infinitarum ellipsium alterutrum axem communem habentium, et hanc obrem consueto per quadraturas construendi modo longe est praeferenda.

§3. Proponam igitur total rem, prout ad eam perueni. Sit ACB quadrans ellipticus, cuius centrum C, semi-axes vero AC et BC. Ponatur $AC = a$ et $BC = b$ et ex A ducatur tangens indefinita AT, ad eamque ex centro C secans quaecunque CT, abscindens arcum $AM = s$, voceturque $AT = t$. Demisso ex M in AC perpendiculo vocetur $CP = x$, erit ex natura ellipsis $PM = \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$; atque ob analogiam $CP : PM = CA : AT$ habebitur $tx = b\sqrt{a^2-x^2}$ seu $x = \frac{ab}{\sqrt{bb+tt}}$. Sumatur arcus AM elementum Mm, ducanturque mp, Ct prioribus MP, CT proximae; erit Mm, $ds = \frac{-dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$ et $Tt = dt$. Quia autem est $x = \frac{ab}{\sqrt{b^2+t^2}}$; erit $dx = \frac{-abtdt}{(b^2+t^2)^{3/2}}$, et $\sqrt{a^2-x^2} = \frac{at}{\sqrt{b^2+t^2}}$, et $\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2} = \frac{a\sqrt{b^4+a^2tt}}{\sqrt{b^2+t^2}}$. Ex his conficitur $ds = \frac{bdt\sqrt{b^4+a^2tt}}{(bb+tt)^{3/2}}$. Ad cujus integrale per seriem saltem inueniendum pono $a^2 = (n+1)b^2$, quae prodeat $ds = \frac{b^2dt\sqrt{(b^2+t^2)+nt^2}}{(b^2+t^2)^{3/2}}$, superiusque irrationale sit binomium, cuius alterum membrum est

[1] *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **6**, 1732/3, pp. 168-174. [E28]

[2] De Integrationibus Aequationum Differentialium, ubi traditur Methodi Alicuius Specimen Integrandi sine Praevia Separatione Indeterminatum. *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **1**, 1726, pp. 167-184.

b^2+t^2, alterumque simplex terminus nt^2. Resoluo nunc $\sqrt{(b^2+t^2)+nt^2}$ per canonem notum in seriem hanc

$$(b^2+t^2)^{1/2}+\frac{Ant^2}{(b^2+t^2)^{1/2}}+\frac{Bn^2t^4}{(b^2+t^2)^{3/2}}+\frac{Cn^3t^6}{(b^2+t^2)^{5/2}}+\text{etc.}$$

in qua breuitatis gratia est $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{-1\cdot 1}{2\cdot 4}$, $C=\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}$, $D=\frac{-1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ etc. Habebitur ergo

$$ds=\frac{b^2dt}{b^2+t^2}+\frac{Ab^2nt^2dt}{(b^2+t^2)^2}+\frac{Bb^2n^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3}+\frac{Cb^2n^3t^6dt}{(b^2+t^2)^4}+\text{etc.}$$

et integer arcus ellipticus s erit integrale huius seriei.

§4. Notandum hic est singulorum horum terminorum integrationem ad primi termini $\int\frac{bb\,dt}{bb+tt}$ posse reduci, dat vero $\int\frac{bb\,dt}{bb+tt}$ arcum circuli radii b cuius tangens est t. Hanc ob rem singulos terminos assumpto hoc circulari arcu integrabo, vt sequitur:

$$\begin{aligned}
\int\frac{b^2t^2\,dt}{(b^2+t^2)^2} &= \frac{1}{2}\int\frac{bb\,dt}{bb+tt}-\frac{1}{2}\frac{b^2t}{bb+tt};\\
\int\frac{b^2t^4\,dt}{(b^2+t^2)^3} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\int\frac{b^2\,dt}{bb+tt}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{b^2t}{bb+tt}-\frac{1}{4}\frac{b^2t^3}{(bb+tt)^2};\\
\int\frac{b^2t^6\,dt}{(b^2+t^2)^4} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\int\frac{b^2\,dt}{bb+tt}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{b^2t}{bb+tt}-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\frac{b^2t^5}{(bb+tt)^2}-\frac{1}{6}\frac{b^2t^5}{(bb+tt)^3},
\end{aligned}$$

ex quibus lex integralium relinquorum terminorium iam satis apparet.

§5. Si quarta perimetri elliptici pars AMB requiratur, oportet facere t infinitum, hocque facto omnes termini algebraici in superioribus integralibus euanescunt. Arcus circularis vero $\int\frac{bb\,dt}{bb+tt}$ posito $t=\infty$ dabit quartam peripheriae circuli partem, cujus radius est b seu BC, quam designabimus littera e. Erit propterea $\int\frac{b^2\,dt}{bb+tt}=e$, $\int\frac{b^2t^2\,dt}{(bb+tt)^2}=\frac{1\cdot e}{2}$, $\int\frac{b^2t^4\,dt}{(bb+tt)^3}=\frac{1\cdot 3\cdot e}{2\cdot 4}$, $\int\frac{b^2t^6\,dt}{(bb+tt)^4}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot e}{2\cdot 4\cdot 6}$ etc. Prodibit igitur quarta perimetri elliptici pars

$$AMB=e\left(1+\frac{1An}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}Bn^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}Cn^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}Dn^4+\text{etc.}\right).$$

Atque substitutis loco A, B, C, D, etc. valoribus debitis habebitur

$$AMB=e\left(1+\frac{1\cdot n}{2\cdot 2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3n^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5n^3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7n^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}+\text{etc.}\right)$$

§6. Haec series, si n est valde paruum seu $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ id quod euenit, quoties ellipsis admodum propinqua est circulo, vehementer conuergit; hocque casu igitur facile ellipsis perimeter inuenitur. Quando vero n est quantitas, quam minima, seu $a=b+\omega$, denotante ω quantitatem quam minimam, erit $n=\frac{2\omega}{b}$, et $AMB=e\left(1+\frac{\omega}{2b}\right)$ q.p. Quando vero sit $a=0$, incidit punctum A in C, et euadit $AMB=BC=b$; hoc vero casu erit $n=-1$, habebitur igitur $\frac{b}{e}=1-\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}-\text{etc.}$ Summa huius seriei ergo exprimit rationem radii ad quartam peripheriae partem in circulo.

§7. Quemcunque igitur habeat valorem littera n in serie §.5. inuenta, summa seriei semper poterit assignari ope rectificationis ellipsis, cuius axis maior se habet ad minorem, ut $\sqrt{n+1}$ ad 1. Hoc cum ita se habeat, usus sum quoqoe methodo mea summationes serierum ad resolutionem aequationum reducendi, quam nuper exhibui[3], ut inuestigarum, a cuius aequationis resolutione summatio

[3] *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **6**,1732/3, pp. 68-97. [E25]

inuentae seriei pendeat. Quo autem haec methodus facilius possit adhiberi pono $n = -x^2$, eritque summanda ista series $1 - \frac{1x^2}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot x^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot x^6}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6} -$ etc., huius igitur summam pono s. Erit ergo differentiando $\frac{ds}{dx} = -\frac{1\cdot x}{2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot x^3}{2\cdot 2\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot x^5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} -$ etc. Iam denuo per x multiplico, sumoque differentialia posito dx constante, erit $\frac{d.xds}{dx^2} = -1 \cdot x - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot x^3}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot x^5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} -$ etc. Porro diuido vbique x contraque per dx multiplico, sumoque integralia, erit $\int \frac{d.xds}{xdx} = -x - \frac{1\cdot 1\cdot x^3}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} -$ etc. Denique iterum per dx multiplico, diuido vero per x^3 et sumo integralia, erit $\int \frac{1}{x^3} \int \frac{d.xds}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1\cdot x}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot x^3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot x^5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6} -$ etc. Haec vero series esi ipsa initialis per x diuisa: eius igitur summa est $\frac{s}{x}$. Quocirca habemus hanc aequationem $\int \frac{1}{x^3} \int \frac{d.xds}{x} = \frac{s}{x}$, quae sumtis differentialibus abit in hanc $x^2ds - sxdx = \int \frac{d.xds}{x}$. Differentietur haec denuo prodibit $x^2dds + xdxds - sdx^2 = \frac{d.xds}{x} = dds + \frac{dxds}{x}$. Huius aequationis resolutio igitur pendet a summatione seriei propositae, quae cum per rectificationem ellipsis habeatur, aequationis constructio quoque dabitur.

§8. Cum in ista aequatione s vbique vnam tenet dimensionem, reduci ea poterit per methodum meam Tom. III. Comm.[4] insertam ad aequationem simpliciter differentialem , facta substitutione $s = c^{\int pdx}$, vbi c denotat numerum, cuius log. est 1. Hoc posito erit $ds = c^{\int pdx}pdx$ et $dds = c^{\int pdx}(dpdx + ppdx^2)$, atque aequatio inuenta transformabitur in hanc $x^2dp + x^2p^2dx + pxdx - dx = dp + ppdx + \frac{pdx}{x}$, quae diuisa per $xx - 1$ mutatur in istam $dp + ppdx + \frac{pdx}{x} = \frac{dx}{xx-1}$. Ad hanc simpliciorem efficiendam pono $p = \frac{y}{x}$, et proueniet $dy + \frac{yydx}{x} = \frac{xdx}{xx-1}$. Quae quomodo separari possit neque perspicio, neque constructionis consideratio eo perducit.

§9. Quo autem ipsa constructio huius aequationis ex praecedentibus deducatur, pono illam axis sermissem AC, quem ante littera a denotaui, aequalem r, quia vt variabilis debet considerari; et quartam perimetri ellipsis partem respondentem q; erit $-xx = n = \frac{r^2-b^2}{b^2}$, et $x = \frac{\sqrt{b^2-r^2}}{b}$. Porro erit $q = es$, est vero $s = c^{\int pdx} = c^{\int \frac{ydx}{x}}$, quocirca habebitur $q = ec^{\int \frac{ydx}{x}}$, et $lq - le = \int \frac{ydx}{x}$, adeoque $y = \frac{xdq}{qdx} = \frac{(r^2-b^2)dq}{qrdr}$. Ne autem, quando r maior est quam b, irrationalia proueniant, restituo loco xx valorem $-n$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dn}{2n}$, et $\frac{xdx}{xx-1} = \frac{dn}{2(n+1)}$. His substitutis habebitur ista aequatio $2dy + \frac{y^2}{dn} = \frac{dn}{n+1}$. quae construetur sumendis $n = \frac{r^2-b^2}{b^2}$ et [5] $y = \frac{(r^2-b^2)dq}{qrdr}$, seu iam inuento, n, $y = \frac{2ndq}{qdn}$. Hinc sequens nascitur constructio: descripto quadrante elliptico BCA, cuius centrum in C et semi-axis $AC = r$, ex A erigatur normalis $AD =$ arcui elliptico AB, erit punctum B in curua aliqua BD, cuius constructio hoc modo est in promtu. In ea igitur erit $AD = q$. Sit F huius ellipsis focus, erit $CF = \sqrt{r^2 - 1}$ et ad BF ducatur normalis FP, erit[6] $CP = r^2 - 1 = n$. Notetur hic, quando sit $AC < BC$ et focus F in BC incidit, valorem n fieri negatiuum, et ex altera parte puncti C versus B accipi oportere. Deinceps ducatur tangens DT curuae BD in D, erit $AT = \frac{qdr}{dq}$, et iuncta AP ex T ducatur recta TG normaliter secans AP, si opus est, productam in O et DA productae occurens in G, erit ob similia triangula PCA et TAG, $AG = \frac{rqdr}{(r^2=1)dq}$. Ipsi AG aequalis capiatur CH at sumta $CI = CB = 1$; ad ductam HI erigatur perpendicularis IK erit $CK = \frac{(r^2-1)dq}{rqdr} = y$. Huic CK fiat aequalis PM, eritque M in curua quaesita BM, huius enim curuae haec est proprietas, vt, dictis CP, n et PM, y, sit $2dy + \frac{y^2dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$.

[4] *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **3**, 1728, pp. 124-137. [E10]
[5] Ed.: The text reads dy for dq in the next equation.
[6] Ed.: The text reads EP for CP in the next equation.

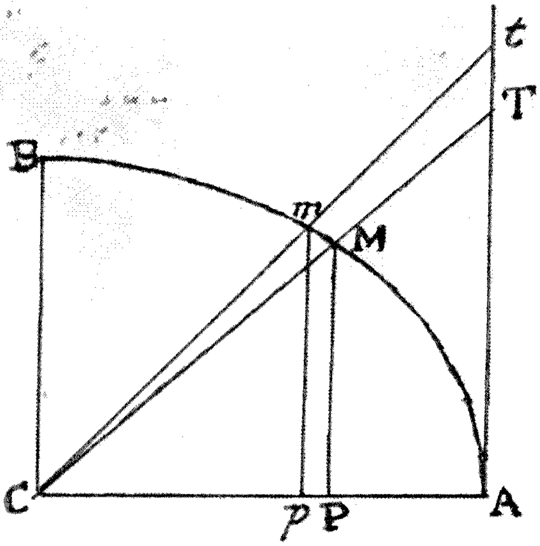

fig 1.

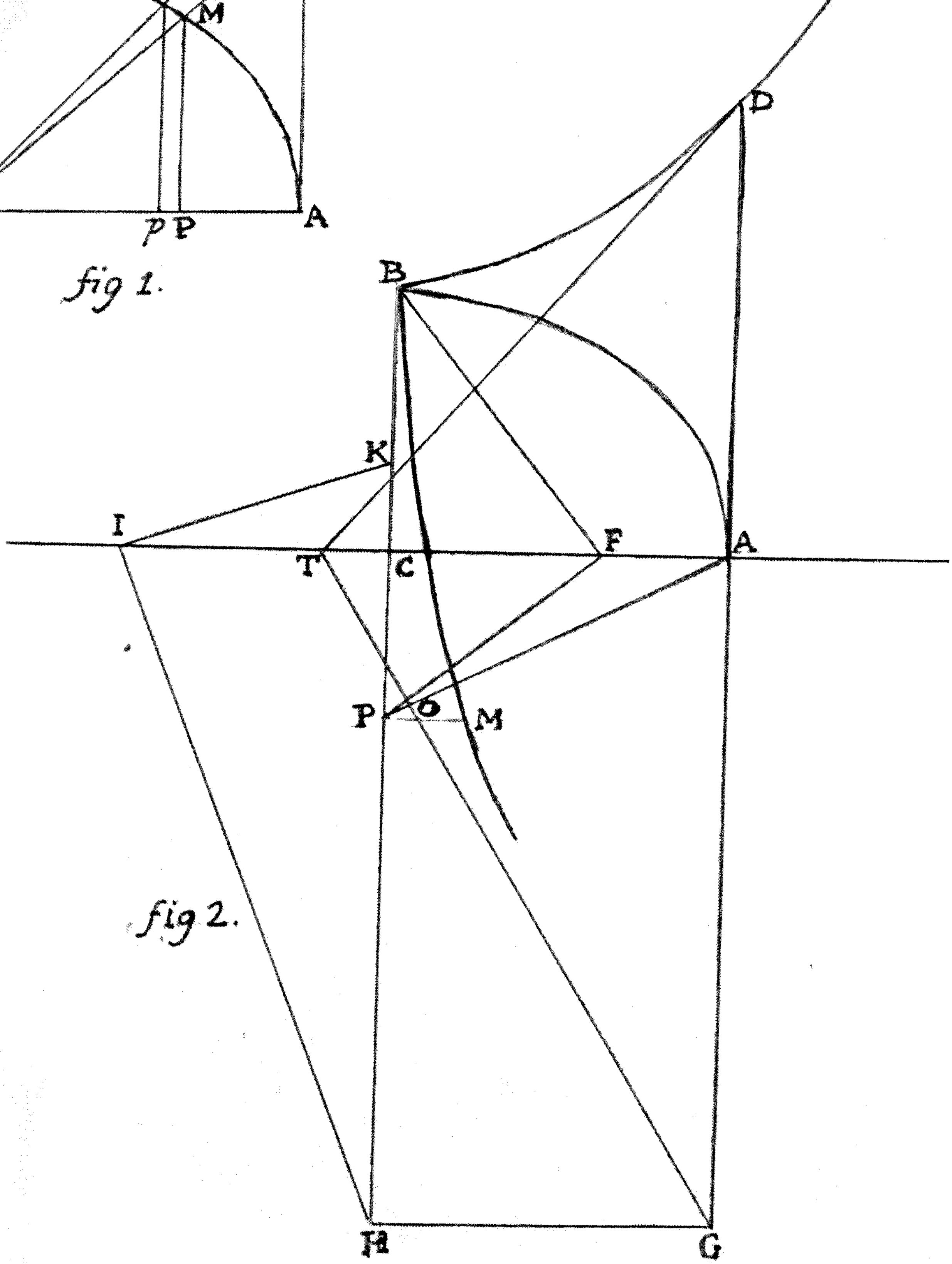

fig 2.