INTRODUCTION A E729 ET E730

Pour introduire ces études d'Euler sur la quadripartition[1] du triangle, problème qu'il qualifie de "remarquable et tel qu'on en rencontre peu en géométrie",on propose une revue de mathématiciens dont on sait qu'ils l'ont abordé et, au moins, partiellement résolu.

Ce problème peut avoir 1, 2 ou 3 solutions suivant les cas de figure. Si on appelle base le côté du triangle coupé par les deux droites, on a:

-**cas général**: si la base est le côté moyen, il y a une solution pour n'importe quel triangle.
-**cas partiel**: pour certains triangles, proches de l'équilatéral, dans des limites bien précises, on a, pour le petit côté, 2 solutions ou une double.
-**cas singulier**: si la médiane et la base sont dans le rapport de 8 à 9, il y a toujours une solution où les distances des pieds des droites aux extrémités de la base sont égales à 5/6 de celle-ci. Suivant l'angle entre la médiane et la base on sera dans le cas général ou dans le cas partiel d'où 1, 2 ou 3 solutions.

Les solutions les plus anciennes connues sont celles de Huygens, Jacob Bernoulli et L'Hospital. Tous trois ont choisi la même approche de la solution à partir d'un système de deux équations. La première est une hyperbole qui donne la condition pour que les droites divisent le triangle en quatre parties égales sans nécessairement être perpendiculaires, la deuxième, du 4e degré, pour qu'elles soient perpendiculaires. Les inconnues sont les distances des pieds des droites aux extrémités de la base. Ne pouvant résoudre analytiquement l'équation du 8e degré qui en résulte, ils optent pour une solution graphique, en cherchant, point par point, l'intersection des courbes représentatives des équations. Ils travaillent avec des triangles définis par trois paramètres.

Huygens (1675?) qui aurait connu l'énoncé par Maubuisson, rencontré à Paris (et inconnu par ailleurs), a uniquement vu le cas singulier, sûrement quand médiane et base sont perpendiculaires et peut être quand elles sont obliques[2] mais ne parle pas des autres cas.

Bernoulli est au courant de la solution d'Huygens mais ne l'a pas lue[3]. Dans une première étude(1687)[4] où il ne considère que les triangles scalènes, il remarque le cas général mais ne le démontre pas et soupçonne le cas partiel pour les triangles proches de l'équilatéral. Il ne parle pas du cas singulier. Il revient sur le problème en 1695, à l'occasion de ses commentaires sur la Géométrie de Descartes[5], où il propose une solution graphique mais sans revenir sur le cas général ou le partiel.

L'Hospital (1707)[6] retrouve les équations d'Huygens avec une forme identique et les mêmes paramètres. A l'aide de sa solution graphique, il démontre le cas général mais ne perçoit pas les autres.

C'est Euler qui donnera la solution complète du problème. Bien qu'en sous-titre il évoque l'étude de Bernoulli, il ne s'en inspire pas. Il élabore une équation à une seule inconnue, l'angle entre l'une des droites et la base, avec deux paramètres, les angles à la base. Il travaille donc sur

---

[1]Le mot quadrisection n'existe pas en français mais bien quadripartition qui exprime d'ailleurs mieux un partage. Et de même en latin.

[2] Oeuvres complètes-Tome XX-Musique et Math.(Ed.J.A.Vollgraff)-Den Haag 1940-pp.427-433 et 435-436.

[3] Lettre de J.Bernoulli à Nicolas Facio, de Bâle, le 22 septembre 1700.

[4] Solutio algebraica problematis de Quadrisectione Trianguli Scaleni per duas Normales rectas. AE Novembris 1687, pp.617-623.

[5] Opera II- Nota et animadversiones tumultuariae in Geometriam Cartesii--1695- p.670, nota II.

[6] Traité analytique des sections coniques- 1720- Livre 10e- Des problèmes déterminés- pp.53 et 400-407.

une forme de triangle, ce qui facilite l'analyse qu'il conduit de manière algébrique pour aboutir à trois solutions, une pour le cas général(E729) et deux pour le cas partiel(E730) suivant que le triangle est isocèle ou scalène, et donne un procédé de calcul numérique pour chaque cas dont le domaine de validité en fonction des paramètres est bien précisé sauf pour le cas partiel scalène où il doit être élargi, suivant l'étude ci-dessous. Il a été amené au cas partiel en constatant la proximité du cas singulier avec l'équilatéral, quand médiane et base sont perpendiculaires.

La solution Lobet (2010, en annexe à E730) se base sur un système de deux équations analogues à celles décrites ci-dessus. Les paramètres sont l'angle au sommet et le rapport des côtés adjacents. Les inconnues sont les segments compris entre les intersections des droites avec les côtés adjacents de l'angle au sommet et la base, divisés par la longueur du côté. La recherche des solutions est menée à l'aide de la représentation graphique des équations en fonction de la variation des paramètres et conduit aux mêmes résultats qu'Euler en donnant une vue très claire des cas de solution possibles. On donne une représentation graphique des domaines où on a 0, 1 ou 2 solutions, ce dernier étant plus étendu que celui d'Euler. Les solutions sont obtenues à l'aide d'un logiciel et, si on les considère comme exactes, il faut reconnaître que celles d'Euler sont remarquablement précises.

On ne sait avec certitude à qui attribuer la paternité de ce problème dont l'énoncé simple invite à chercher la solution et a donc dû faire l'objet de nombreuses tentatives plus ou moins abouties . On l'attribue à Leibniz[7], peut-être parce qu'il le cite comme exemple d'un problème dont la solution demande de résoudre une équation du 8e degré[8]. On ignore cependant s'il l'a résolu. Mais comme le dit Bernoulli dans l'introduction à son étude, ce problème "a tenu occupé le plus haut point mathématique de cet âge". Et encore longtemps après, pour des solutions ou des commentaires[9],[10],[11].

G.Lobet Les

---

[7]A.Bouvier, M.Georges, F.Le Lionnais- Dictionnaire des Mathématiques-4e éd.-"Quadrige"-PUF-

[8] Leibnizens Mathematische Schriften, ed.Gerhardt, T.7, Halle-1863 p.154- Nova algebrae promotio.

[9] Intermédiaire des Mathématiciens-I-1894-pp. 39 et 135.(Solutions fausses, dont celle d'Eugene Catalan, et commentaires).

[10] Loria,G. Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare- Bibliotheca math.(3)4, pp.48-51(1903). (Commentaires).

[11] Hofmann,J.E. Über die Quadrisectio trianguli - Math.Zeitschrift. 74, pp.105-118 (1960). (Historique et commentaires).