Viro Celeberrimo atque longe Eximio LEONHARDO EULERO S. P. D.
JOH. BERNOULLI.

Jam per aliquot menses valetudine usus minus prospera, ut mihi fieri solet hac imprimis anni tempestate, ac subinde lecto affixus ob insultus podagricos, promtius respondere non potui ad litteras Tuas novissimas multa eruditione refertas; quam ipsam ob causam ne nunc quidem adhuc transmittere possum secundam partem meditationum mearum hydraulicarum, utpote nondum omnino descriptam, etiamsi materiam a longo jam tempore in parato habeam. Adde quod multo copiosior erit haec altera pars atque sui triente superabit primam, unde facile intelliges, describendi laborem non posse non esse mihi molestissimum, cum ob hebetudinem oculorum tum ob tremorem manuum, quae duo sunt mala quotidie fere ingravescentia; quodque pessimum accidit hac in re est, quod ipse cogor describere, cum nullus mihi detur amanuensis, qui talia describere velit vel possit . . .[1])

Filius meus professor Lipsiam misit chirographum Exc. SCHUMACHERI ad repetenda exemplaria Commentariorum Tuique tractatus de *Musica*, pro quo debitas Tibi gratias ago, quem, ubi accepero, legem magna cum voluptate, et eo majore quidem, quod de hac materia hactenus nihil mihi videre contigit, quod mihi ex asse satisfacere potuerit.

Methodus, qua uteris, Vir Exc., ad summandam seriem

$$\frac{1}{1\pm n}+\frac{1}{4\pm n}+\frac{1}{9\pm n}+\text{etc.}$$

est omnino curiosa et extraordinaria, sed simul postulans calculum longum et intricatum, a cujusmodi instituendis jam a multo tempore absterreor, ob senectutis incommoda superius memorata, contentus iis, quae sola vi meditationum, sine longa analysi, eruere possum. Daretur forsan, si velles sagacitatem Tuam consuetam consulere, alia via brevior magisque trita idem praestandi; sunt enim infiniti casus jam dudum soluti, nimirum omnes illi, quos olim communi opera cum Fratre meo defuncto tractavimus[2]), in quibus Tuum n significat numerum quadratum cum praefixo —. Aperi modo, si habes, tractatulum posthumum Fratris mei *De arte conjectandi*, ubi pag. 252 reperies[3]) hoc problema solutum: *Invenire summam*

1) Zwischen „possit" und „Filius" stand offenbar im Briefe etwas, das bei Fuss ausgelassen ist. Da das Konzept des Briefes in Stockholm fehlt, kann ich nicht entscheiden, ob möglicherweise das bei Fuss ausgelassene sich auf eine überstrichene Stelle bezieht, die vermutlich in der von ihm benutzten Abschrift fehlt.

2) Soviel ich weiß, hat JOHANN BERNOULLI in keiner seiner eigenen Schriften diese Reihe behandelt.

3) Die von JOHANN BERNOULLI zitierte Stelle findet sich auch in JAKOB BERNOULLIS *Opera* (Genevae 1744), S 395

serierum Leibnitianarum *aliarumque, quarum denominatores sunt numeri quadrati aut trigonales, minuti aliis quadratis vel trigonalibus.* Exemplum habetur pag. 252 hujus seriei:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.},$$

hoc est hujus:

$$\frac{1}{4-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \text{etc.}$$

quae est $= \frac{3}{4}$. Item pag. seq. 254 hoc exemplum habetur:[1])

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \text{etc.}$$

seu

$$\frac{1}{16-9} + \frac{1}{25-9} + \frac{1}{36-9} + \frac{1}{49-9} + \text{etc.}$$

quae series est $= \frac{49}{120}$. Tuum est examinare, an Tua sublimia cum hisce trivialibus quadrent.

Non minus quoque curiosus videtur modus Tuus aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniatur. Memini me jam ante multos annos simile quid invenisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquirere non vacat. Ex paucis quae in hanc rem adumbrationis causa adjicis sine demonstratione, concludo fere, Tibi ad has meditationes occasionem praebuisse ea, qua olim publice dedi pro solutione problematis Cotesiani a Taylorо propositi omnibus geometris non Anglis, ubi modum tradidi[2]) resolvendi quantitates integrandas in factores reales, eosque discernendi a non realibus. Quod vero attinet ad generalem Tuam formulam:

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \frac{dd^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0,$$

posita dx pro constante, huic quidem satisfacere potest semper aliqua ex curvis logarithmicis, cujus tantum subtangens est quaerenda, quod ita facio. Aequatio generalis pro istis curvis haec est: $y = n^{x:p}$, ubi p denotat subtangentem generalis logarithmicae, et n numerum, cujus logarithmus = unitati, ita ut $ln = 1$. Hoc ita exprimendi morem primus ego introduxi jam ante exitum superioris saeculi, id quod nunc magnum usum habere compertum est. Differentiando ergo continuo $n^{x:p}$ habebuntur valores ipsarum dy, ddy, d^3y, d^4y, etc. nimirum:

1) Siehe Jakob Bernoulli, a. a. O. S. 397.

2) Siehe Johann Bernoulli, *Clar. Taylori mathematici Angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-Anglis proposuit, solutum;* Acta Eruditorum 1719, S. 256—270 [= *Opera omnia*, t. II S. 402—418].

$$dy = \frac{dx}{p} \cdot n^{x:p},\ ddy = \frac{dx^2}{pp} \cdot n^{x:p},\ d^3y = \frac{dx^3}{p^3} \cdot n^{x:p},\ d^4y = \frac{dx^4}{p^4} \cdot n^{x:p},\ \text{etc.}$$

Quibus valoribus substitutis in formula Tua

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \text{etc.}$$

mutabitur illa in hanc:

$$n^{\frac{x}{p}}\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3} + \frac{d}{p^4} + \text{etc.}\right) = 0.$$

Diviso itaque per $n^{x:p}$ et multiplicato per maximam dimensionem ipsius p, orietur aequatio algebraica, cujus quaelibet radix p dabit subtangentem logarithmicae quaesitae. Exemplum quod das aequationis differentialis quarti gradus

$$ydx^4 = k^4 d^4 y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

ita facillime solvitur. Cum enim hic litterae a, b, c deficiant atque sit $d = -k^4$, habebis hanc aequationem quatuor dimensionum, sed non affectam,

$$p^4 - k^4 = 0 \text{ seu } p = k.$$

Dico igitur, logarithmicam, cujus subtangens $= k$, satisfacere aequationi propositae

$$y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Fateor interim hoc modo pro hoc exemplo unam tantum exhiberi logarithmicam, a Te vero exhibentur plures curvae

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin \text{A.} \frac{x}{k} + F \cos \text{A.} \frac{x}{k}.$$

Fateor etiam, si proponeretur

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0,$$

fore meam logarithmicam impossiblem seu imaginariam; sed idem etiam in Tua solutione, licet universaliore, contigeret, nam apud Te foret pariter k impossible, seu non reale.

Cum nuper mihi aliquantulum plus otii nacto in mentem rediret id quod scripseras de oscillationibus corporum in aqua natantium, volebam per me ipsum inquirere in longitudinem penduli isochroni oscillationibus quas subeunt hujusmodi corpora in aqua natantia, postquam ex statu quietis nonnihil deturbata fuerunt per vim, cujus directio est horizontalis. Post aliquot horarum meditationem compos factus sum perfectae solutionis, ut mihi quidem videtur, quae Tuae, ceu apparet, satis similis est; Ecce eam[1]). Retentis litteris et schema quibus usus es pro parte in epistola

1) Vgl. Johann Bernoulli, *Opera omnia*, t. IV S. 287—293.

data 30 Julii 1738, voco praeterea g vim gravitatis acceleratricis qua corpora naturaliter ad descensum verticalem animantur, item n angulum minimum, quo corpora ex situ verticali OG paululum inclinantur, eritque vis motrix applicanda in O horizontaliter ad restituendum corpus ad situm quietis pro quolibet angulo minimo ω

$$= \frac{ngV}{OG}\left(OG + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right);$$

longitudinem penduli simplicis isochroni invenio

$$= \frac{3\int rr\delta p}{3V.\,OG + \int(y^3+z^3)\,dx}$$

ubi per p intelligo volumen singularum particularum, quae totum corpus innatans heterogeneum componunt, δ exprimit densitatem cujuslibet particulae p, r distantiam cujusque, perpendicularem, ab axe, circa quem fit oscillatio, tandem aquae densitas supponitur $= 1$ seu unitati, atque ita tota expressio longitudinis quaesitae erit geometrica, nil nisi lineas exprimens. Si corpus innatans est homogeneum, hoc est si ubique δ est constans, seu habens ad unitatem rationem invariabilem, erit G supra O, adeoque OG negativa; quod si praeterea OG tum sit etiam major quam $\int(y^3+z^3)\,dx : 3V$, fiet vis motrix negativa, adeoque corpus inclinatum non restituetur, sed praecipitabitur, quousque labi potest. Sciendum quoque est rectam AB inter oscillandum eum semper situm capere debere, ut ab una parte $\int yydx$ sit $= \int zzdx$ ab altera parte, quod sine omni dubio Tu, Vir Cel., etiam observasti. Denique id etiam non est omittendum, quod centrum gravitatis G secundum vigorem non omnino immobile maneat durante oscillatione corporis, sed alternatim ascendat et descendat, quamvis isti ascensus et descensus sunt infinities minores quam excursiones puncti O, quae ipsae jam sunt infinite parvae. Hinc tuto considerari potest centrum gravitatis G tanquam omnino immobile, dum centrum gravitatis voluminis aquei O facit suas oscillationes laterales. Theoria mea extenditur quoque ad alios casus cognatos; ex. gr. si in vase aliquo quiescente datae figurae contineatur data quantitas aquae, cujus tota massa a causa quadam incipiat fluctuare, ascendendo nempe ab uno latere super horizontem, dum a latere opposito descendit infra eundem, mox postea motu contrario refluendo ad hoc latus ultra limitem horizontalem, de hinc iterum ad partem oppositam redeundo, atque ita porro. Reciprocantes istae fluctuationes repraesentant speciem oscillationum, quibus inveniri potest longitudo penduli simplicis isochroni. Alia item foret species oscillationum non minus curiosa. Si nempe pelvis aliqua habens ansam, ut lebetes solent habere, impleretur aqua, sed non ad summitatem usque, et deinde si ad ansam suspenderetur pelvis ex clavo firmiter fixo, expectando parumper

donec aqua contenta ad quietem sese composuerit, ita ut ejus superficies suprema induerit situm horizontalem. Concipe nunc pelvim ita pendentem ex situ quietis tantillum dimoveri, sed placide, ne aqua ad fluctuandum concitetur. Facile utique intelligis, pelvim, sibi relictam, esse inchoaturam oscillationes minimas, sed ita, ut aquae superficies semper maneat horizontalis, secus ac fieret, si aqua esset congelata, quo casu pendulum non differet ab ordinario pendulo composito. Quaeritur ergo in nostra suppositione fluiditatis aquae, quanta sit longitudo penduli simplicis isochroni, abstrahendo facilitatis gr. a gravitate et a materialitate ipsius pelvis et ansae; video meam methodum huc pertingere, quamvis quia inter scribendum modo mihi in mentem venit, solutionem nondum tentaverim; non dubito quin pro sagacitate Tua quaesitum facile sis assecuturus.

Sed abrumpo jam nimium fatigatus scribendo, ut Tu, Vir Exc., forsan fatigaberis legendo inconcisam meam scripturam. En tamen adhuc paucis observationem meteorologicam. Nupero scil. 6. Dec. st. v. qui dies consecratus est divo Nicolao, gentis Russicae patrono, hora circiter nona matutina, deprehendi mercurium in barometro ad tantam profunditatem descendisse, ad quam non memini unquam pervenisse. At vero in hoc statu non diu permansit, nam sub vesperem ejusdem diei rediit ascendendo ad mediocrem fere altitudinem, quae hic est 26 poll. 10 lin. Paris.; tempestas non fuit valde procellosa, nisi quod ventus solito violentior spiraverit.

Vale, Vir Celeberrime. Dabam Basileae a. d. 9. Decembr. 1739.

23.

Euler an Bernoulli 19. Januar 1740.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 9. Dezember 1739. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 45—46.

Inhalt. Euler bedauert, daß die Reinschrift der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica* so schwer herzustellen ist. — Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

besonders für den Fall, daß n eine Quadratzahl ist. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und einer anderen Differentialgleichung ähnlicher Art. — Über Schwingungen schwimmender Körper. — Lösung der zwei von Johann Bernoulli in seinem letzten Briefe gestellten Probleme. — Die von Johann Bernoulli in demselben Briefe erwähnte meteorologische Beobachtung.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Johanni Bernoulli S. P. D.
Leonhardus Euler.

Quanquam summo desiderio alteram partem meditationum Tuarum hydraulicarum expectamus, tamen quia labor eas describendi Tibi admodum

est molestus, ante mihi ad litteras Tuas gratissimas summaque eruditione refertas respondendum est visum, quam illas meditationes acciperemus. Interim vehementer doleo, describendi laborem a Te Ipso, Vir Celeb., esse suscipiendum neminemque Tibi praesto esse, qui hoc labore Te sublevare posset. Filius autem Tuus Cl. postremam dissertationem quam huc misit non ipse scripserat, sed erat ab amanuensi satis idoneo descripta, qui Tibi etiam fortasse operam suam in hoc negotio commodare posset.

Inveni interea aliam methodum[1]) seriem

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \text{etc.}$$

summandi a priori quidem diversam, sed quae pariter ac illa summationes omnium serierum hac forma

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \text{etc.}$$

contentarum postulat, mihique plane videtur sine hac serie cognita illius summationem frustra tentari. Quamvis enim illa series innumeris casibus, quibus scilicet $-n$ est numerus quadratus, summas habeat rationales, tamen harum summarum cognitio nihil omnino confert ad summas indagandas iis casibus, quibus $-n$ non est numerus quadratus. Quoties enim quaepiam series summam habet rationalem, toties ego quidem suscipere auderem illius summae inventionem: at quando summa rationalis non datur, tum multo est difficillimum plerumque summam assignare. Ceterum casus a Te, Vir Excellentissime, commemorati, quibus $-n$ est numerus quadratus integer, ex mea generali summae expressione satis facile derivantur. Primum autem considerandum est posito $-n =$ numero quadrato integro, puta m^2, aliquem seriei

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \frac{1}{16-m^2} + \text{etc.}$$

terminum in infinitum abire, summamque ideo fieri infinite magnam. Quare ut Tuos casus obtineam, illum terminum, qui fit infinite magnus, omitti oportet. Cum igitur seriei istius propositae generatim spectatae

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \frac{1}{16-m^2} + \text{etc.}$$

summa a me inventa fit

$$= \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2m} \cot \text{A.}\, m\pi = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2m \operatorname{tag} \text{A.}\, m\pi},$$

1) Die Methode, worauf Euler hier hindeutet, ist vielleicht die in seiner Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes;* Comment. acad. sc. Petrop. **12**, 1740 (gedruckt 1750), S. 53—96 auseinandergesetzte.

pono m infinite parum a numero integro discrepare, ita ut sit $m = i + dx$ denotante i numerum integrum, eritque summa[1])

$$= \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2(i+dx)\,\text{täg A.}(i\pi + \pi dx)} = \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2(i+dx)\,dx}$$

ob täg A. $(i\pi + \pi dx) = \pi dx$; arcus enim, qui infinite parum excedit semiperipheriae multiplum quodcunque, tangens ipse illi excessui est aequalis. Quocirca erit istius seriei:

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \cdots + \frac{1}{i^2-(i+dx)^2}^{*} + \frac{1}{(i+1)^2-m^2} + \frac{1}{(i+2)^2-m^2} + \frac{1}{(i+3)^2-m^2} + \text{etc.}$$

summa

$$= \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2idx + 2dx^2}$$

subtrahatur utrinque terminus asterisco notatus quippe qui est infinitus $= \frac{1}{-2idx - dx^2} = -\frac{1}{2idx + dx^2}$, eritque residuae seriei

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^2-m^2} + \frac{1}{(m+1)^2-m^2} + \frac{1}{(m+2)^2-m^2} + \frac{1}{(m+3)^2-m^2} \text{ etc.}$$

summa finita atque aequalis

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2idx + 2dx^2} + \frac{1}{2idx + dx^2} = \frac{1}{2m^2} + \frac{dx^2}{4i^2dx^2} = \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4m^2} = \frac{3}{4m^2},$$

facto re ipsa $dx = 0$ atque $i = m$. Quodsi nunc termini negativi seriei qui hunc $\frac{1}{(m+1)^2-m^2}$ antecedunt in alteram partem transponantur, prodibit seriei hujus, in qua casus a Te allegati continentur:

$$\frac{1}{(m+1)-m^2} + \frac{1}{(m+2)^2-m^2} + \frac{1}{(m+3)^2-m^2} + \frac{1}{(m+4)^2-m^2} + \frac{1}{(m+5)^2-m^2} + \text{etc.}$$

summa

$$= \frac{3}{4m^2} + \frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^2-4} + \frac{1}{m^2-9} + \cdots\cdots + \frac{1}{m^2-(m-1)^2}.$$

Hinc enim erit, numeris integris successive loco m substituendis, ut sequitur:

si $m = 1$; $\frac{1}{4-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$

si $m = 2$; $\frac{1}{9-4} + \frac{1}{16-4} + \frac{1}{25-4} + \frac{1}{36-4} + \text{etc.} = \frac{3}{4.4} + \frac{1}{4-1} = \frac{25}{48}$

1) Vgl. Eulers *Institutiones calculi differentialis*, cap. 15, § 366 [= S. 205 des 3. Teiles der Übersetzung von J. A. Ch. Michelsen].

si $m = 3$; $\frac{1}{16-9} + \frac{1}{25-9} + \frac{1}{36-9} + \frac{1}{49-9} + \text{etc.}$

$$= \frac{3}{4.9} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{9-4} = \frac{49}{120};$$

si $m = 4$; $\frac{1}{25-16} + \frac{1}{36-16} + \frac{1}{49-16} + \frac{1}{64-16} + \text{etc.}$

$$= \frac{3}{4.16} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{16-4} + \frac{1}{16-9} = \frac{761}{2240}.$$

Fateor quidem lubens summas has pluribus modis multo facilius inveniri posse, verumtamen ostendisse juvavit eas quoque ex formula mea generali derivari posse. Praeter hos autem casus summas rationales admittentes notari merentur, qui in hac forma jam ante, ni fallor[1]), Tibi perscripta continentur:

$$\frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{16-m^2} + \frac{1}{36-m^2} + \frac{1}{64-m^2} + \frac{1}{100-m^2} + \text{etc.}$$

cujus seriei, si m sit numerus impar quicunque, summa perpetuo est $= \frac{1}{2mm}$, quae hujus seriei summa generalis per alios modos vix tam facile patebit.

Quod suspicaris, Vir Exc., ad methodum meam integrandi aequationes differentiales altiorum graduum, quae hac forma generali continentur

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ansam mihi praebuisse ingeniosam illam tuam analysin, qua problema Cotesianum a Taylorо propositum resolvisti, quanquam insignis similitudo intercedit, tamen postquam problema multis modis tractassem, prorsus inopinato in meam solutionem incidi, atque ante nequidem suspicione agnoveram, resolutionem aequationum algebraicarum in hoc negotio quicquam subsidii afferre posse. Mox quidem pariter ac Tu, Vir Celeb., intellexi in hujusmodi aequationibus logarithmicas contineri, modo plures, modo pauciores, saepius etiam nullas, quae parametros habeant reales. Verum meum institutum in hoc praecipue versabatur, non tam ut unam atque alteram aequationem integralem exhiberem, quae propositae differentiali satisfaceret, quam ut aequationem integralem completam eruerem, quae aeque late ac ipsa differentialis pateret, et quae omnes omnino aequationes particulares satisfacientes simul in se complecteretur. Imprimis autem in eo eram occupatus, ut aequatio integralis a quantitatibus imaginariis penitus esset libera, id quod mihi ex voto consecutus esse videor. Quod enim oggeris hujus aequationis

1) Die hier ausgesprochene Vermutung von Euler dürfte nicht richtig sein, sofern sie sich nicht auf den verlorenen Brief vom Jahre 1736 bezieht.

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

integralem mea methodo inventam imaginariam esse futuram, id, si quidem meam methodum attentius inspicere dignaberis, aliter deprehendes. Pervenio namque ad hanc aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$, quae in has duas aequationes duarum dimensionum resolvitur

$$p^2 + kp\sqrt{2} + k^2 = 0 \quad \text{et} \quad p^2 - kp\sqrt{2} + k^2 = 0,$$

unde obtineo hanc aequationem integralem completam

$$y = Ce^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin \text{A.} \frac{x}{k\sqrt{2}} + De^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos \text{A.} \frac{x}{k\sqrt{2}}$$
$$+ Ee^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin \text{A.} \frac{x}{k\sqrt{2}} + Fe^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos \text{A.} \frac{x}{k\sqrt{2}},$$

cujus aequationis quatuor constantes C, D, E et F manifesto testantur hanc aequationem esse integralem completam. Quodsi enim aequatio differentialis quarti ordinis proposita

$$y + \frac{dy^4}{k^4 d^4 x} = 0$$

quater omni extensione integretur, necesse est ut quatuor novae constantes in finalem aequationem integralem ingrediantur. Praecipuum autem, quo haec mea methodus aliis antecellere videtur, in hoc consistit, quod non opus habeam tot integrationes successive instituere, quot gradus habent differentialia, sed uno quasi actu inveniam aequationem integralem finitam. Simili fere modo possum etiam aequationem integralem completam ac realem invenire, quae satisfaciat huic aequationi differentiali indefiniti gradus

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bx^2 ddy}{dx^2} + \frac{cx^3 d^3 y}{dx^3} + \frac{dx^4 d^4 y}{dx^4} + \text{etc.}$$

posito dx constante.

Quae meditatus es de oscillationibus horizontalibus corporum aquae innatantium, mirifice cum meis conveniunt; atque adeo ipsa methodus qua uteris a mea non multum discrepare videtur; deduxi enim ego quoque omnia ex consideratione sollicitationum, quae a viribus motricibus proficiscuntur. Interim quam proprietatem affers rectae AB in suprema aquae sectione sumtae, qua utrinque debet esse

$$\int yy dx = \int zz dx,$$

eandem proprietatem ego ita expressi, ut dicerem rectam AB per centrum gravitatis sectionis navis in aquae superficie factae transire debere.

Quod denique ad motum centri gravitatis totius navis, durantibus oscillationibus, attinet, is maxime pendet a distantia rectae verticalis per

centrum gravitatis sectionis aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius navis ducta. Quodsi enim hae duae rectae verticales conveniant, tum motus centri gravitatis omnino erit nullus, si quidem oscillationes navis fuerint infinite parvae, at quo majore intervallo hae binae rectae verticales a se invicem distent, eo major subsequetur centri gravitatis navis mutatio. Quamobrem his casibus fieri non poterit, ut navis oscillationes horizontales puras absolvat, sed perpetuo conjunctae erunt cum oscillationibus verticalibus, quarum Tu primum, Vir Celeb., mentionem fuisti, quae peculiarem sequuntur legem, ita ut nisi tempora binarum oscillationum sint inter se vel aequalia vel commensurabilia, oscillationes totales regulares esse nequeant. Qua in re Filius Tuus Clar. etiam nunc a me dissentit, qui statuit utrasque oscillationes semper sese ad uniformitatem componere debere, ita ut unicum quasi oscillationum genus appareat. Multo autem major difformitas sese oscillationibus immiscebit, quando planum in quo sitae sunt binae illae memoratae verticales, non est normale ad axem horizontalem, circa quem fiunt oscillationes. Tum enim non solum alterni centri gravitatis navis ascensus et descensus motum oscillatorium contaminabunt, sed etiam ipse axis, circa quem oscillationes fiunt, erit mutabilis, ita ut unica durante oscillatione motus circa alium atque alium axem horizontalem per centrum gravitatis navis transeuntem perficiatur. Quae oscillationum difformitas mihi quidem tantopere difficilis videtur, ut eam calculo subjicere adhuc non potuerim: praeter vires enim motum oscillatorium generales inter oscillandum perpetuo adest alia quaedam vis, quae positionem axis, circa quem eo instanti motus oscillatorius absolvitur, mutare conatur, cujus effectum nondum ad calculum revocare potui; qua de re plura in postremis litteris ad Filium Tuum Celeb. datis scripsi.

Deinde duorum problematum mentionem facis, Vir Excellentissime, maxime ingeniosorum ac dignorum, quorum solutio suscipiatur, quae Tu etiam, per methodum Tuam jam solvisse mihi perscribis.

Priori autem problemate postulas, ut oscillationes aquae in vase [Fig. 4] quiescente ADB definiantur, quando aqua motu reciproco ad latera vasis opposita A et B affluit defluitque. En igitur istius problematis tam solutionem quam solvendi methodum meam. Teneat aqua, dum a statu aequilibrii maxime recessit, situm aDb, sitque ab ejus suprema superficies secans horizontalem AB in puncto medio C, ex quo ducta perpendicularis CD per centrum gravitatis aquae in

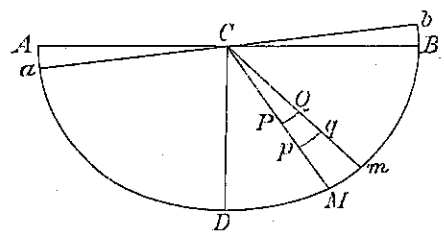

Fig. 4.

quiete sitae ADB transeat, quae quidem conditio non est necessaria ad meam solutionem, sed eam tantum assumo, ut quaestio fiat planior magisque intelligibilis. Ponatur angulus $ACa = BCb = dq$, quem valde parvum concipio, ut cum suo sinu confundatur; sitque $AC = BC = a$, erit aquae spatium vel BCb vel ACa replentis volumen $= \frac{1}{2}\, aadq$, neglecta vasis longitudine: similique modo totum aquae oscillantis volumen exprimetur per aream ADB. Dum nunc aqua oscillando ex situ aDb sese in situm aequilibrii ADB recipit, quasi circa polum fixum C rotabitur, eritque ejus momentum respectu hujus poli, dum situm aDb tenet $= \frac{2}{3}\, a^3 dq$, ut ex regulis staticis facile intelligitur. Sit jam f longitudo penduli simplicis isochroni, erit vis, qua quaelibet aquae particula in situm aequilibrii urgebitur, ad ejusdem pondus reciproce ut haec penduli longitudo f ad spatium ab ista particula percurrendum, quo ad situm aequilibrii attigerit. Concipiatur totum aquae volumen aDb divisum in sectores numero infinitos atque cum inter se aequales tum sectori $BCb = \frac{1}{2}\, aadq$, cujusmodi sector sit mCM, cujus particula quaecunque Q per spatiolum QP moveri debebit, dum aqua ex situ aDb in situm ADB pertinget. Sit angulus $ACM = s$, erit $MCm = ds$ et posita $MC = y$, ob sectores MCm et BCb aequales, erit

$$aadq = yyds.$$

Sumatur distantia $CP = CQ = z$, erit $PQ = zds$ et molecula aquae spatiolo $PpqQ$ contenta $= zdsdz$. Huic moleculae, dum aquae superficies ex Cb in CB subsidit, percurrendum est spatium $PQ = zds$, ex quo erit $(f : zds) =$ vis urgens particulam PQ in directione QP hincque vis urgens particulam $Pq = zdsdz$ in directione $QP = \frac{z^2 dzds^2}{f}$; atque hujus vis momentum ad axem motus C relatum erit $= \frac{z^3 dzds^2}{f}$ cujus integrale $\frac{z^4 ds^2}{4f}$ dat momentum ex sectore PCQ ortum, unde momentum pro toto sectore MCm prodibit

$$= \frac{y^4 ds^2}{4f} = \frac{yyds}{4f}\, aadq,$$

ob $yyds = aadq$. Cum autem $\frac{yyds}{2}$ exprimat aream sectoris MCm, erit integrando momentum totale ex universa aqua aDb natum $=$ areae $aDb \cdot \frac{aadq}{2f} = ADB \cdot \frac{aadq}{2f}$. Hoc vero momentum aequale esse debet illi, quod ex actione gravitatis oritur, quodque invenimus $= \frac{2}{3} a^3 dq$; quapropter habebitur

$$ADB \cdot \frac{aadq}{2f} = \frac{2}{3} a^3 dq,$$

hincque

$$f = \frac{3}{4} \cdot \frac{ADB}{a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{ADB}{AB},$$

haecque est longitudo penduli simplicis isochroni quaesita; neque uti spero a Tua solutione discrepabit.

Alterum quod proponis problema de oscillationibus pelvis aqua repletae mihi quidem multo difficilius videtur, si quidem eo sensu proponatur, quo ad praxim revocari queat. Dum enim pelvis ex situ inclinato, in quo superficies aquae fuit horizontalis, in situm verticalem pervenit, aqua interea sese vel etiam in situm naturalem recipiet, vel secus. Prius eveniet, quando aqua in pelvi quiescente eodem tempore oscillationes suas secundum prius problema perficeret, quo integrum pendulum ex pelvi et aqua compositum. Hoc autem nisi eveniat oscillationes maxime erunt irregulares, atque admodum raro superficies aquae fiet horizontalis; cujusmodi oscillationes ex gemino oscillationum genere mixtas vix ac ne vix quidem ad calculum revocare licet. At conditio quam adjicis, vi cujus superficies aquae perpetuo maneat horizontalis, problema ad solvendum accommodatum reddit.

Pono igitur praeter vim gravitatis perpetuo aliam quandam vim adesse, quaecunque ea sit, quae superficiem aquae in pelvi contentae constanter ad horizontalem compositam teneat, praetereaque nihil omnino motum oscillatorium afficere. Hac autem assumta hypothesi ego oscillationes sequenti modo determino. Sit [Fig. 5] EDF pelvis dum situm erectum tenet ad ab usque aqua repleta, cui ad utramque partem DAE et DBF similem figuram tribuam. Suspensa porro sit ista pelvis ex unco firmo O circa quem oscillationes peragat, teneatque nunc situm in figura repraesentatum, ita ut recta OD, quae in situ naturali est verticalis, nunc cum verticali OH angulum constituat $GOH = dq$; atque secundum hypothesin aquae superficies hoc statu sit horizontalis, puta AB; quae rectam ab ipsi OD normalem in medio C ita bissecabit, ut sit angulus $ACa = GOH = dq$. Ponatur $AC = BC = a$, ac repraesentet area BDA vel bDa volumen aquae, longitudini vasis vel neglecta vel per unitatem designata. Cum igitur si aquae superficies esset ab, ejus centrum gravitatis positum esset in recta OD puta in puncto G, nunc aquae superficie existente AB

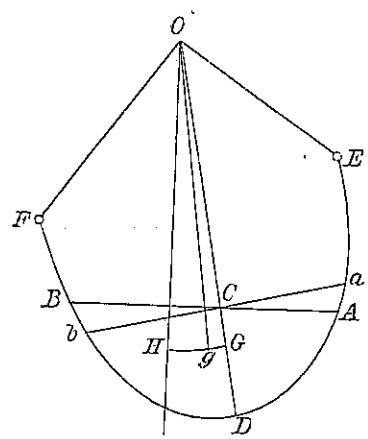

Fig. 5.

centrum gravitatis extra OD in g cadet, eritque distantia punctorum G et g horizontalis $Gg = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 dq}{BDA}$: verticalis autem distantia quasi immutata manebit. Sit P pondus totius aquae, et distantia $OG = OH = h$, erit

$$\text{angulus } GOg = \frac{2a^3 dq}{3h \cdot BDA},$$

et

$$\text{angulus } HOg = dq\left(1 - \frac{2a^3}{3h \cdot BDA}\right).$$

Hinc neglecta plevis gravitate, uti Tu suades, Vir Celeb., ne calculus praeter necessitatem nimis fiat prolixus, erit momentum vis gravitatis aquae ad pelvim in situm verticalem circa O constituendum

$$= P \cdot Og \cdot \text{ang. } HOg = Pdq\left(h - \frac{2a^3}{3 \cdot BDA}\right).$$

Per haec (rejecto dq quia a vase angulus dq absolvi debet antequam in situm verticalem perveniat), si dividatur aggregatum omnium aquae particularum in quadrata distantiarum suarum ab axe O multiplicatarum, prodibit longitudo penduli simplicis isochroni. Quodsi autem hoc aggregatum non differre ponamus ab eo, quod haberetur, si aqua spatium bDa in vase occuparet, quod ob discrimen infinite parvum tuto assumere licet. Ponamus longitudinem penduli simplicis, quod isochronum foret oscillationibus ejusdem pelvis, si aquae superficies perpetuo esset ab, hoc est si aqua esset congelata pendulumque compositum consuetum; hoc inquam pendulum ponamus $= k$: et aggregatum illud omnium particularum aquae in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis O multiplicatarum sit $= S$, erit $k = \frac{S}{Ph}$ hincque $S = Phk$. Cum igitur S etiam nostro casu eundem valorem obtineat, erit pro eo longitudo penduli simplicis isochroni

$$= \frac{Phk}{P\left(h - \frac{2a^3}{3 \cdot BDA}\right)} = \frac{k}{1 - \frac{2a^3}{3h \cdot BDA}}.$$

Longitudo igitur penduli isochroni posita aqua in pelvi congelata se habebit ad longitudinem penduli isochroni posita aqua fluida in hypothesi assumta, uti se habet $1 - \frac{2a^3}{3h \cdot BDA}$ ad 1. Quamobrem si fiat $2a^3 = 3h \cdot BDA$, tum tempus unius oscillationis pelvis suspensae erit infinite magnum seu pelvis ex situ erecto declinata sese non restituet. Ceterum si mea hypothesis hic exposita cum ea, quam Tu, Vir Celeb., ad aquae superficiem constanter horizontalem conservandam assumsisti, convenit, non dubito quin nostrae solutiones perfecte sint consensurae.

Mirabilem mercurii in barometro descensum a Te observatum hic cum iis, qui observationibus meteorologicis operam dant communicavi, qui Tibi idcirco gratias habent maximas.

. . .[1]) quod ut quam citissime eveniat nos omnes summo desiderio flagitamus.

Vale, Vir Excellentissime, meque amare perge.

Dabam d. 19. Jan. 1740. Petropoli.

24.

Bernoulli an Euler 16. April 1740.

Antwort auf Eulers Brief vom 19. Januar 1740. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 33—41, nach einer von N. Fuss verfertigten Abschrift des Originals. Die wahrscheinlich verloren gegangene Beilage des Briefes wurde von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—61 nach dem Konzepte zum Abdruck gebracht.

Inhalt. Über die mit der Fertigstellung der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica* verbundenen Schwierigkeiten. — Geldangelegenheiten. — Über die Reihen

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1^n} \pm \frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} \pm \ldots,$$

$$\frac{1}{1} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} \pm \ldots.$$

Eine Eigenschaft der harmonischen Reihe. — Die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Über die Zerlegung eines Binoms in Faktoren zweiten Grades. — Integration der Gleichung

$$0 = y + ax\frac{dy}{dx} + bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + cx^3\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

— Über die Schwingungen schwimmender Körper. — Über die zwei von Euler im vorigen Briefe gelösten hydrodynamischen Probleme. — Schwierigkeiten, die von Euler übersandten Bücher zu bekommen. — Die Differentialgleichung $yx^2 + a\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. — *Beilage:* Integration der oben angeführten Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Leonhardo Eulero S. P. D.
Joh. Bernoulli.[2])

Non ita facile eluctatus sum asperrimam hyemem, quin magnam ejus partem in lecto transigere coactus fuerim, vehementi laborans tussi, nec non asthmate et podagra, quibus malis, nondum omnino liberatus, non potui satis attente considerare cuncta, quae mihi perscripsisti, elegantissima atque ex profundissimo Tuo ingenio depromta, in litteris 19 Jan. sine dubio styli veteris, exaratis, in quibus inveneram alias ad Filium meum datas, quas sine mora ipsi transmisi; fuerunt illae ut credo, etiam a te

1) Hier sind sieben Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.
2) Bei dem folgenden Abdruck habe ich auch das Konzept verglichen.

scriptae, etsi earum inscriptio, ut et quae communi involucro ad me directa, non manu Tua sed aliena mihique ignota facta fuerint.[1])

Juvenis ille, quo usus fuerat Filius meus ad describendum suam dissertationem, nunc mortuus est ex febre ardente; sed etiam si adhuc viveret, non tamen possem ejus opera uti, neque cujusquam alius, ad describendas meas meditationes, quia soleo eas admodum confuse et abruptis verbis in chartam conjicere, atque tum demum inter describendum corrigere et in ordinem redigere; unde vides, neminem alium, nisi memet ipsum, id operis suscipere posse et exequi.

Filius meus nuper mihi Tuo nomine transmisit valorem 25 Rubelonum, nempe monetae hic usitatae florenorum $47\frac{4}{5}$. Ago gratias pro diligentia Tua atque cura hac in re adhibita; si quid vicissim potero praestare Tui in gratiam, certus esto, me nihil intermissurum, quod in viribus meis erit, ut commodis Tuis inserviam . . .[2])

Transeo nunc ad analytica Tua. Quae habes circa series hujusmodi:

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \text{etc.}$$

sapiunt certe singularem ingenii sagacitatem; animo quidem meo concepi quasdam vias, quibus ad earum summam eruendam in omni extensione pervenire liceat, sed quia praevideo, multum laboris et calculi requiri ad executionem, non audeo rem aggredi, aliis occupationibus distractissimus; malo igitur talia a Te discere, quando suo tempore evulgaveris, quam hisce diu insudare et fortassis sine successu.

Hac tamen occasione aliquid monebo. Non est difficile demonstratu, quod summa hujus seriei:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ubi termini omnes affirmativi sunt, sit ad summam ejusdem, sed signis terminorum alternative sumtis:

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ut se habet 2^n ad $2^n - 2$. Nosti vero procul dubio, me dedisse olim modum exprimendi hanc seriem:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.},$$

1) Die Worte: „fuerunt . . . fuerint", die bei Fuss fehlen, sind nach dem Konzepte ergänzt.

2) Die Worte: „Filius . . . inserviam", die bei Fuss fehlen, sind nach dem Konzepte ergänzt. Nach dem Worte „inserviam" sind im Konzepte 14 Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli; diese Zeilen fehlen auch bei Fuss.

per hanc quantitatem finitam: $\int x^x dx$, cui illa series est aequalis, quando nempe fit x aequalis unitati.[1]) Quaero nunc, an pariter invenire possis rationem, quam illa habet ad eandem seriem terminorum signis continuo affirmative procedentium:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Memini Leibnitio, olim me roganti, an habeam compendium expedite summandi progressionem harmonicam

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x}$$

ad terminos numero x continuatam, dedisse pro responso[2]) hoc, non quidem compendium, sed theorema, scilicet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x} \text{ erit} = \text{huic alteri progressioni}$$

$$x - \frac{x.x-1}{2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4.4}$$

$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{2.3.4.5.5} - \ldots . \pm \frac{1}{x},$$

cujus termini nil aliud sunt quam coefficientes binomii ad numerum x elevati, dividendo singulos per respective numeros 2, 3, 4, 5 . . . . x. Ex. gratia

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

erit aequalis huic

$$5 - \frac{10}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5}.$$

Quod attinet ad methodum Tuam, Vir Excel., integrandi aequationes differentiales, quae hac forma generali continentur:

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

video ex paucis quae dicis, meam solutionem problematis Cotesiani a Tayloro propositi habere aliquid analogi cum Tua ipsa solutione, quamvis non attenderis ipse; nam quod ais, aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$ resolvi posse in factores reales hos duos: $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, id ipsum est, quod ego jam dudum animadverti contra Taylorum, qui credidit haec nobis incognita fuisse, ideo, quia Leibnitius alicubi dixerat $\int dx : (x^4 + a^4)$ neque ad circuli neque ad hyperbolae quadraturam reduci

1) Siehe Johann Bernoulli, *Principia calculi exponentialium seu percurrentium;* Acta Eruditorum 1697, S. 125—133 (= *Opera omnia*, t. I S. 179—187).

2) Dieser Brief von Johann Bernoulli an Leibniz wurde am 12. Februar 1695 geschrieben; vgl. *Leibnitii et Bernoullii Commercium* (Lausannae 1745) I, S. 28.

posse. Respondi autem, LEIBNITIUM hoc non asseverasse absolute, sed tantum relative ad methodum, qua usus fuerit in illo loco, ubi ita locutus est: „ego vero monstravi TAYLORO, binomium $x^4 + a^4$ revera resolvi posse in hos duos factores reales: $xx + ax\sqrt{2} + aa$ et $xx - ax\sqrt{2} + aa$, praeter duos alteros imaginarios $xx + aa\sqrt{-1}$ et $xx - aa\sqrt{-1}$.“ Inspice modo Acta Lips. anni 1719 p. 257,[1]) ubi haec, quae dico, expressissimis verbis invenies, fluuntque ex fundamento totius meae solutionis problematis COTESiani. Miror interim Te dicentem, aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$ resolvi in *has duas aequationes* duarum dimensionum *reales* $pp + kp\sqrt{2} + kk = 0$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk = 0$; debebas dicere: *resolvi in duos factores reales*, non vero in aequationes reales; nam $pp \pm kp\sqrt{2} + kk$ non possunt esse $= 0$, alias foret radix $p = \mp k\sqrt{\frac{1}{2}} \pm k\sqrt{-\frac{1}{2}} =$ imaginario, ergo nullus casus datur, ubi fieri possit $pp \pm kp\sqrt{2} + kk = 0$, hoc est, nulla relatio realis dabilis est inter p et k, ut inde formari queat $pp \pm kp\sqrt{2} + kk = 0$, nisi velis utrumque p et k sumere $= 0$, sed non est hic sensus verborum Tuorum.

Alteram, cujus mentionem facis, aequationem differentialem indefiniti gradus nimirum hanc:

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

posita ut supra dx constante, ego quoque jam ante initium hujus saeculi reduxi ad aequationem integralem finitam, quae quidem est generalis, sed fateor, in illa contineri mixtim tam reales quam non reales; interim possunt a se invicem distingui, ideoque non puto meam solutionem eandem esse cum Tua. Quidquid sit, exscribam meam methodum in Schedam separatam[2]), quam examinare poteris, ex adversariis meis antiquis, ita tamen ut ad litteras Tuas, a, b, c etc., x y accommodem scriptum meum.

Conspirant utique re ipsa nostrae duae solutiones de oscillationibus horizontalibus corporum aquae insidentium; sunt tamen quaedam monenda circa minus essentialia.[3])

Bene notas, quod et ego notaveram, eandem esse proprietatem rectae AB in suprema aquae sectione sumtae, sive dicatur esse

$$\int yydx = \int zzdx,$$

ut ego enunciavi, sive concipiatur AB, ut Tu fecisti, tanquam transiens per centrum gravitatis sectionis corporis in aquae superficie factae. Malebam autem rem ipsam exprimere per proprietatem pure geometricam, quam

1) Vgl. S. 40 Anm. 2.

2) Diese Beilage scheint FUSS nicht zugänglich gewesen zu sein; sie fehlt jedenfalls in seinem Abdruck des Briefes.

3) Vgl. hierüber JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia*, t. IV S. 287—293.

per mechanicam, eoque magis, quod hic superficies sola, in imaginatione tantum subsistens, nihilque materiae habens, non nisi improprie dici possit habere centrum gravitatis.

Secundo, Tecum, non sentio, quod pace Tua dixerim, quando asseris, motum centri gravitatis totius navis, vel cujusque corporis innatantis, pendere a *distantia* rectae verticalis per centrum gravitatis *sectionis* aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; nam mihi clare videtur, considerari debere distantiam rectae verticalis per centrum gravitatis non sectionis aquae, sed (NB.) ipsius voluminis, quod corpus in aqua occupat, hujus, inquam *distantiam* a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; etenim in centro voluminis (quod volumen inter oscillandum perpetuo ejusdem magnitudinis est supponendum) concentratur tota vis motrix, agens sursum verticaliter, ad restituendum corpus in situm pristinum quietis, quamdiu durant oscillationes: interim fateor, propter variabilitatem figurae voluminis, centrum ejus gravitatis non semper eundem locum occupare in corpore oscillante, sed hinc inde evagari in singulis oscillationbus ab uno latere in alterum respectu rectae lineae quae, dum corpus adhuc est in quiete, verticaliter transit per ejus centrum gravitatis.

Tertio non nego quod dicis centrum gravitatis corporis totius oscillantis non manere omnino immotum; nam, secundum rigorem loquendo, revera mutat suum situm tam in directione horizontali quam verticali, magisque in illa quam in hac; sed cum supponantur oscillationes corporis totius quamminimae, hoc est quasi infinite parvae, potest demonstrari, mutationes illas centri gravitatis corporis, quas nominare vellem trepidationes, non tantum esse insensibiles, sed omnino infinities minores, quam sunt ipsae oscillationes minimae corporis ipsius, adeoque tuto negligendae, ut jam monui in praecedentibus meis litteris.

Quarto. In iisdem volebam sciscitari, sed quod dein obliviscebar, quid nempe intelligas proprie per vim firmitatis, de qua in litteris Tuis 30. Julii 1738 agis dicisque, quod sit illa quae resistit inclinationi corporis, eamque esse

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right).$$

Si per vim firmitatis intellectam cupis vim illam, per quam corpus inter oscillandum continuo verticaliter sursum urgetur a pressione aquae, et quam vim dixi concipiendam esse tanquam concentratam in centro gravitatis voluminis aquae a corpore occupati, tunc credo, Te voluisse dicere hanc vim esse

$$= \frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right),$$

omittendo per incuriam subjicere GO pro denominatore infra M; sic enim scribendum esse inveni ex mea solvendi methodo, in qua conjectura eo magis obfirmor, quod alioquin vis Tua firmitatis compararetur cum pondere M, multiplicato per lineam $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, quae duo inter se sunt incomparabilia; talis autem incongruentia non reperitur in mea expressione, quippe in qua linea $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, divisa per lineam GO, dat numerum, quisquis ille sit, qui indicat, quoties sumendum sit pondus M, ut fiat aequale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oscillatione oriundae et sursum tendenti; atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo, quae utique non sunt asystata. Quod cum ita sit, judicandum relinquo, an vis Tua correcta

$$\frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right)$$

commode satis appellari possit *vis firmitatis reluctans inclinationi corporis;* ut enim proprie dici possit *vim vi resistere*, oportet sane alteram alteri esse directe oppositam: hic vero *vis firmitatis* dicta, habens directionem verticalem, alteri vi, quae corporis inclinationem molitur, et quae ideo agit secundum directionem horizontalem nullatenus resistere potest, etiamsi illa maxima esset, haec minima; haud secus ac videmus magnum pondus ex filo pendens dimoveri posse a situ verticali per vim quantumlibet exiguam a latere horizontali impingentem. Meo igitur judicio melius esset, pro *vi firmitatis* adhibere eandem quidem expressionem, sed multiplicatam per n seu per angulum inclinationis: inveni enim

$$\frac{n \cdot M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right)$$

esse vim motricem horizontalem, qua corpus inclinatum ad situm aequilibrii restituitur, proportionalem sane ipsi n, atque adeo etiam distantiae centri gravitatis voluminis a situ aequilibrii, uti requiritur in oscillationibus tautochronis. Quae in hac quarta annotatione dico exscripsi ex manuscripto[1]), quod paravi circa hanc materiam juxta multa alia nova et curiosa ad dynamicam spectantia, quae aliquando, si otium daretur, in ordinem redigere et Vobiscum communicare possem.

Problemata illa duo de oscillationibus fluidorum, unum in vase quiescente, alterum in pelvi vel situla ex ansa suspensa reciprocante, quae inter scribendum mihi in mentem inciderunt ac Tibi proposui, statim post abitum litterarum mearum prorsus deserui atque neglexi, quia attentius rem considerans animadverti, problemata illa solvi non posse, nisi faciendo

1) Vgl. Johann Bernoulli, *Opera omnia*, t. IV S. 293.

suppositiones quae mere sunt precariae nullumque habent fundamentum in ipsa rei natura, ita ut aliae atque aliae inde emergant solutiones, prout haec vel illa hypothesis adhibetur, dum interim una aeque ac altera eundem obtinet probabilitatis gradum. Sic Tuae solutiones videntur bonae et cum meis conspirantes; quia eadem generali hypothesi usi sumus, supponendo scilicet, in ejusmodi oscillationibus totam massam simul moveri, et quidem moveri certo modo, quod verum esse demonstrari nequit, propterea quod hoc pendeat a circumstantiis accessoriis, ex. gr. a quantitate fluidi, figura vasis, etc.

Et vel hinc colligi potest, massam integram fluidi non semper in oscillationibus partium superiorum simul moveri, quod si vera sunt, quae legi et audivi, in maximis tempestatibus, cum suprema maris superficies vehementer agitetur et fluctuet urinatores experiri tamen in profunditate 200 vel 300 pedum omnimodam aquaram tranquillitatem, imo se nullum plane motum sentire: unde praesumi potest, in nostris vasibus simile quid fieri, ut nempe superiores tantum partes in motum cieantur, reliquis inferioribus locum suum non mutantibus, cum praesertim superiorum motus sit tam languidus, tam placidus, ut non sit credibile, ab illis turbari posse situm inferiorum. Oporteret igitur prius inquirere, quousque se extendat superficies illa, quae separet partem aquae mobilis ab immobili, item quamnam habeat figuram illa superficies, et alia multa, quae vix definiri possunt a sagacitate humana. Adde quod in problemate secundo pelvis, scilicet ex unco pendentis et oscillantis, si ejus figura haberet ventrem tumidum et desineret superius in collum oblongum et angustum, ad cujus medium usque aqua pertingeret, annon facile percipimus, aquam cum vase et in vase sensibiliter haud aliter oscillaturum, quam si illa esset congelata et ita repraesentaret pendulum ordinarium. Ob has itaque multasque alias difficultates inseparabiles abstinui ab ulteriori scrutinio et animi applicatione tanquam frustanea.

Tandem[1]) significo Tibi, Vir Exc., quod in hunc usque diem nondum accepimus tomos V et VI Commentariorum vestrorum atque Tuum librum de *Musica* tractantem, quamvis jam plures elapsi sint menses, quod filius meus Lipsiam miserit chirographum illud ab Exc. Schumachero transmissum, ad cujus exhibitionem in manus bibliopolae Lipsiensis Schusteri hic extradere debuisset latori praedictos libros ad nos deferendos. Erat autem lator hujus schedulae aliquis auriga qui mercatoribus nostris saepe advehere solet merces lanarum, promittens se proxima vice nobis allaturum libros desideratos, sed hucusque nec aurigam nec libros vidimus; posset ille, si vellet, furem agere nosque frustrare petito,

1) Das Stück: „Tandem ... commercium habet", das bei Fuss fehlt, ist nach dem Konzepte ergänzt.

siquidem filius meus hominem vix facie tenus novit, nomenque ejus, ut credo, oblitus est. Optarim id a vobis curari imposterum, ut libri ad nos mittendi dirigantur immediate Basileam, vel saltem, si fieri potest, Tubingam ad Exc. BULFINGERUM[1]) cum commendatione ut ad nos porro deferri curet. Si bibliopola SCHUSTERUS voluisset urbane nobiscum agere, potuisset sponte nobis transmittere libros istos cum aliis quos sine dubio mittendos habet ad aliquem bibliopolam nostratem vel in vicinia nostra, ex. gr. Argentoratum, ubicunque commercium habet.

Vale, Vir Excellentissime, atque mihi favere perge.

Dabam Basileae a. d. 16. April. 1740.

P. S. Vides ex iis, quae ab initio hujus epistolae dixi, me ob valetudinem adversam non fuisse in statu absolvendi alteram partem meditationum mearum hydraulicarum; spero autem, nisi recidiva me capiat, tantum effici posse, ut prima vice, qua ad Te sum scripturus, post acceptam responsionem sine longa mora transmittere queam in scripto partem secundam omnium quae circa hanc materiam a me dicendum restabunt, quae quidem talia sunt ut ad multo plura detegenda viam pandant, Tibi praesertim, qui in sagacitate nullum parem habes.

Potestne reduci haec aequatio:

$$yxxdx^2 + addy = 0\,^{2)}$$

ad differentias primas? supponitur dx constans.

Problema analyticum.

Reducere aequationem differentialem cujusque gradus quae hanc habet formam

$$ydx + axdy + \frac{bxxddy}{dx} + \frac{cx^3 d^3y}{dx^2} + \text{etc.} = 0,$$

quotquot sunt termini, ex gr. quatuor; eadem est etenim regula pro pluribus, ad aliam aequationem uno grado depressiorem.

Sit illa, haec

$$ydx + axdy + \frac{bxxddy}{dx} + \frac{cx^3 d^3y}{dx^2} = 0.$$

Solutio. Multiplicando per x^p prodit

$$yx^p dx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2} = 0.$$

---

1) GEORG BERNHARD BILFINGER (geb. 1693, gest. 1750), früher Professor der Logik in St. Petersburg, war 1740 Professor der Theologie an der Universität in Tübingen.

2) Diese Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeineren

$$y^m \frac{d^2y}{dx} = ax^n \left(\frac{dy}{dx}\right)^r,$$

mit welcher sich JOHANN BERNOULLI und EULER in ihren früheren Briefen beschäftigt hatten (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 346). Meines Wissens hat JOHANN BERNOULLI diesen Spezialfall in keiner seiner Schriften behandelt.

Ad terminum primum addo terminum analogum secundo, qui ambo simul sint integrabiles, deinde huic analogo secundo sub signo contrario addo terminum analogum tertio, qui ambo simul sint integrabiles, et ita ad finem usque, ut videre est ex sequenti laterculo:

$$\int\left(yx^p dx + \frac{1}{p+1}x^{p+1}dy\right) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}y,$$

$$\int\left(-\frac{1}{p+1}x^{p+1}dy - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx}\right) = -\frac{x^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx},$$

$$\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right) = \frac{x^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}.$$

Nunc multiplico secundum et tertium per coëfficientes constantes e et f, quorum valores ut et valor exponentis p postea quaerendi sunt, atque laterculus erit ut sequitur:

$$\int\left(yx^p dx + \frac{x^{p+1}dy}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1},$$

$$e\int\left(-\frac{x^{p+1}dy}{p+1} - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx}\right) = -\frac{ex^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx},$$

$$f\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right) = \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}.$$

Conjungendo terminos analogos, nascetur aequatio sequens

$$\int\left(yx^p dx + \frac{\overline{1-e}\cdot x^{p+1}dy}{p+1} + \frac{\overline{f-e}\cdot x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{fx^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right)$$
$$= \frac{x^{p+1}y}{p+1} + \frac{-ex^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2} \pm A.$$

Nota quod A sit constans arbitraria quae in integrationibus addi vel subtrahi solet.

Porro ut membrum prius identificetur cum differentiali proposito seu cum ejus aequivalente

$$yx^p dx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2},$$

oportet coaequare coefficientes terminorum homogeneorum, nempe:

$$a = \frac{1-e}{p+1},\quad b = \frac{f-e}{p+1\cdot p+2},\quad c = \frac{f}{p+1\cdot p+2\cdot p+3},$$

unde lucrabimur

$$e = (p+1\cdot p+2\cdot p+3)\,c - (p+1\cdot p+2)\,b$$

et

$$f = (p+1\cdot p+2\cdot p+3)\,c;$$

ipsius vero p valor est radix hujus aequationis

$$1-(p+1)a+(p+1\cdot p+2)b-(p+1\cdot p+2\cdot p+3)c=0,$$

quae erit trium dimensionum. His igitur valoribus substitutis in altero membro, orietur quaesita aequatio reducta differentialis uno gradu simplicior quam proposita, quae scilicet hic erit:

$$\frac{x^{p+1}y}{p+1}+[-(p+3)c+b]\frac{x^{p+2}dy}{dx}+\frac{cx^{p+3}ddy}{dx^2}\pm A=0.$$

Rejecta arbitraria A et tum dividendo per x^{p+1} prodibit aequatio minus quidem universalis sed multo simplicior,

$$\frac{y}{p+1}+[b-(p+3)c]\frac{xdy}{dx}+\frac{cxxddy}{dx^2}=0.$$

Ceterum vero, servata licet arbitraria A, jam videmus formam quam induit aequatio reducta ex differentiali tertii gradus ad differentialem secundi gradus, quae forma utique similis est illi quam habet ipsa reducenda, ratione progressionis dimensionum tam ipsius x quam graduum differentialium ipsius dy; unde statim concludere licebit si jam ulterius reducatur, per hanc methodum, aequatio reducta differentialis secundi gradus, ad aliam primi gradus, quae habitura sit talem formam

$$ax^qy+\frac{bx^{q+1}dy}{dx}\pm Ax^r\pm B=0.$$

Quae ipsa post institutam reductionem tertiam quae hic est finalis, abibit tandem in aequationem finitam sine differentialibus hujus formae

$$mx^ny\pm Ax^s\pm Bx^t\pm C=0,$$

ubi cum A, B, C sint assumtae arbitrariae possunt illic omnino negligi, retenta sola C, ita ut pro aequatione quaesita sit tantum

$$mx^ny\pm C=0;$$

per consequens curva ex genere vel hyperbolarum vel parabolarum est, prout exponens n est vel affirmativus vel negativus.

25.

Euler an Bernoulli 20. Juni 1740.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 16. April 1740. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 47.

Inhalt. Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\cdots$$

Über die Reihen

$$\frac{1}{1}\pm\frac{1}{2^n}\pm\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{4^n}\pm\cdots$$

$$\frac{1}{1}\pm\frac{1}{2^2}\pm\frac{1}{3^3}\pm\frac{1}{4^4}\pm\cdots$$

Eine Methode, die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe annähernd zu bestimmen. — Wert der dabei vorkommenden Konstante. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und der von Johann Bernoulli in seinem vorigen Briefe integrierten Gleichung. — Die Schwingungen schwimmender Körper. — Zurückführung der Differentialgleichung $yx^2 + a\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ auf eine Riccatische Gleichung.

Viro[1]) Excellentissimo et Celeberrimo Johanni Bernoulli S. P. D.
Leonh. Euler.

Jam fortasse certior es factus de collata Praesidi nostro Illustri Korffio Legatione Danica, et quemadmodum Augustissima Nostra Imperatix Academiae Praesidem praefecerit Illustrissimum Consiliarium Status atque Equitem Alexandrini Ordinis a Brevern . . .[2])

Interim vehementer doleo, valetudinem Tuam tantopere labefactari, Deumque T. O. M. precor, ut Te adhuc complures annos ad patriae carissimae splendorem, academiae nostrae ornamentum ac Tuae familiae salutem salvum sespitemque conservare velit.

Quod ad summam hujus seriei

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \text{etc.}$$

attinet, quia ex Tuis litteris intellexi, Te hanc investigationem non solum probare, sed etiam methodum, qua usus sum, videre cupere, eam Tibi, Vir Celeb., perscribam.[3]) Posita hujus seriei, quam quaero, summa $= s$ singulisque terminis methodo consueta in series geometricas conversis, habebitur:

$$\begin{aligned}
s = &+ 1\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right) = 1 \cdot \alpha\pi^2 \\
&- n\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) = - n \cdot \beta\pi^4 \\
&+ n^2\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.}\right) = + n^2 \cdot \gamma\pi^6 \\
&- n^3\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.}\right) = - n^3 \cdot \delta\pi^8 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Pervenitur scilicet ad series eas, quas jam pridem per potestates peripheriae circuli π, diametro existente $= 1$, summare docui. Coefficientes

1) Oben hat Johann Bernoulli notiert: „Empfangen d. 27 Julij 1740".

2) Hier sind vier Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

3) Die hier auseinandergesetzte Methode ist genau dieselbe, die Euler in seinem Briefe vom 15. September 1739 angab, was er offenbar schon vergessen hatte.

autem harum potestatum, quos hic brevitatis ergo litteris α, β, γ, δ, etc., indicavi, hanc tenent legem, ut sit

$$\alpha = \frac{1}{6};\ \beta = \frac{2\alpha^2}{5};\ \gamma = \frac{4\alpha\beta}{7};\ \delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta\beta}{9};\ \varepsilon = \frac{4\alpha\delta + 4\beta\gamma}{11};$$

$$\zeta = \frac{4\alpha\varepsilon + 4\beta\delta + 2\gamma\gamma}{13},\ \text{etc.},$$

quae progressionis lex a forma quadrati hujus seriei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ etc. pendere intelligitur. Erit ergo

$$s = \alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \text{etc.}$$

atque hinc fiet:

$$s^2 = \alpha^2\pi^4 - 2\alpha\beta n\pi^6 \begin{matrix} + 2\alpha\gamma n^2 \\ + \beta\beta n^2 \end{matrix} \pi^8 \begin{matrix} - 2\alpha\delta \\ - 2\beta\gamma \end{matrix} n^3\pi^{10} + \text{etc.}$$

Multiplicetur haec series per $2d\pi$, tantisper enim π tanquam quantitatem variabilem tractare licet, et singulis terminis integratis erit

$$\int 2s^2 d\pi = \frac{2\alpha^2}{5}\pi^5 - \frac{4\alpha\beta}{7} n\pi^7 + \frac{(2\alpha\gamma + 2\beta\beta)}{9} n^2\pi^9 - \frac{(4\alpha\delta + 4\beta\gamma)}{11} n^3\pi^{11} + \text{etc.},$$

hoc est, lege determinationis, quam coefficientes α, β, γ etc. tenent, in subsidium vocata:

$$\int 2s^2 d\pi = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \text{etc.}$$

At cum sit

$$s = \alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{\alpha\pi^3 - \pi s}{n} = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \text{etc.} = 2\int ss\,d\pi.$$

Quare ob $\alpha = \frac{1}{6}$ habebitur ista aequatio

$$\frac{1}{6}\pi^3 - \pi s = 2n\int ss\,d\pi,$$

quae differentiata dat

$$\frac{1}{2}\pi^2 d\pi - \pi ds - s d\pi = 2nss\,d\pi,$$

haecque aequatio tam casu, quo n est numerus affirmativus quam negativus integrata, praebebit valorem definitum pro s, hoc est pro summa seriei

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \text{etc.};$$

eae ipsae scilicet expressiones resultant, quas Tibi, Vir Celeb., ante perscripsi.