15.

Euler an Bernoulli 10. Dezember 1737.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 6. November 1737. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. — Auszüge veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 23.

Inhalt. Erwiderung auf die Bemerkungen von Johann Bernoulli in betreff des 89. Satzes des 1. Teiles der *Mechanica*, sowie des Titels der Arbeit. — Über ein paar andere Stellen der *Mechanica*. — Die Summe der reziproken Quadratzahlen und der von Johann Bernoulli im Briefe vom 6. November 1737 erwähnten Reihe. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung schwimmender Körper. — Über exzentrisches Zusammenstoßen von Körpern.

Viro Excellentissimo atque Celeberrimo Joanni Bernoullio S. P. D.
Leonhardus Euler.

Quas ad me dedisti litteras, Vir Celeberrime, d. 6 Novemb. summo cum gaudio accepi et perlegi. Imprimis autem maximas Tibi refero gratias, tam pro benevolo et forsitan nimis benigno, quod de opere meo ferre dignatus es, judicio, quam pro exquisitissimis annotationibus Tuis mecum communicatis: enixe rogans atque obsecrans, ut cum vacaverit hoc meum opus attentius perlustrare, de singulis judicium Tuum acutissimum perscribere velis. Tantum enim abest, ut si qua in re cespitaverim, errorem sustinere et defendere velim, ut potius correctionem non solum gratissimo animo sim accepturus, sed etiam palam testaturus.

Hoc consilio lapsum, quem in prop. 89 Tom. I deprehendisse es visus, statim etiam antequam rem diligentius considerassem, lubens agnovi atque quibusdam collegis aperui. Sed cum istam propositionem attentius inspexissem, inveni casum, quem ego tracto, prorsus diversum esse ab eo, quem Tibi, Vir Celeb., tractasse videbar. Non enim quaero vim centripetam, quae faciat, ut corpus in orbita mobili eodem modo moveatur, quo in immobili ad idem centrum attractum moveretur, quo casu solutio mea utique erronea esset, cum vis quaesita non ad centrum fixum tendat, nisi w sit constans. Hunc autem casum evolvi in prop. 94 coroll. 2, ubi expresse notavi, praeter vim ad centrum tendentem P aliam insuper vim Q requiri in aliam plagam directam, quae non evanescit, nisi w sit constans. In propositione vero 89 motum in orbita immobili tanquam incognitum specto, neque eum leges vis centripetae sequi pono; alioquin enim non invenissem

$$u = \frac{a^2 c}{w^2 p^2};$$

sed ponere debuissem

$$u = \frac{a^2 c}{p^2}.$$

Quaero scilicet in hac propositione vim ad fixum centrum tendentem, quae faciat, ut corpus in data orbita utcunque mobili revolvi queat, omissa ea conditione, ut corporis motus in ipsa orbita centrum respiciat, et areas temporibus proportionales abscindat. Hoc ipsum tam ex solutione quam coroll. 2 elucet, ubi notavi fieri non posse, ut corpus in eadem orbita, si immobilis esset, eodem modo circa centrum revolvatur, nisi w sit constans; idem etiam magis ex coroll. 3 colligere licet. Cum igitur ipsa propositio requirat, ut verus corporis motus centrum respiciat, et arcus temporibus proportionales circa illud absolvat, sine ulla haesitatione posui veram corporis celeritatem perpendiculo $M\,\Theta$ reciproce proportionalem. Hanc autem et sequentes propositiones ideo potissimum adjeci, ut cum difficillimum esset motus corporum determinare, nisi vires sint admodum simplices, nonnullos saltem casus eruerem, quibus motum respondentem viribus magis compositis assignare liceret.

Quod ad titulum mei operis attinet, agnosco dynamicae nomen esse convenientius, et optarem eo usum esse, sed tum temporis in mentem ejus mihi non venit.

Permitte autem, Vir Celeb., ut Tibi ingenue fatear, quid ego ipse quantum mihi etiamnum philautia permisit, in mea mechanica desiderem quod etiam Tute statim et insuper forte plura alia deprehendes, si attente eam perlegere dignaberis. Nescio scilicet, quonam calculo cum prop. 78 Tom. I tractarem, eo sim deductus, ut crediderim nisi directio corporis initio projecti ponatur normalis ad radium vectorem, veram curvam, quam corpus describit per calculum non elici; in qua etiam opinione necesse esse duxi primam corporis directionem in sequentibus hypothesibus normalem ad radium vectorem ponere. Ita deleri vellem Scholium 2 huic propositioni subnexum, in quo asserui per calculum prodire curvam quarti ordinis, si corpus initio oblique projici poneretur, atque etiam hujus paradoxi causam assignare volui. Calculo enim postmodum repetito ellipsin facile elicui, ita ut prima vice in calculo errorem nescio amplius qualem commiserim, qui me in tam incongruam opinionem tum deduxerit. Interim tamem hinc toti tractationi aliud damnum non contigit, nisi quod per ambages veras projectorias determinaverim, quas brevius et concinnius eruere potuissem. Deinde etiam diu haesitavi, utrum projectoria in medio quod in duplicata ratione celeritatum resistit, quamque Tu, Vir Celeb., primus invenisti,[1]) asymtotam habeat verticalem, prout projectoria Hugeniana in medio in simplici celeritatum ratione resistente, an

1) Siehe Joh. Bernoulli, *Responsio ad nonneminis provocationem, ejusque solutio quaestionis ipsi ab eodem propositae de invenienda linea curva quam describit projectile in medio resistente;* Acta Eruditorum 1719, S. 216—226 (abgedruckt in den *Opera omnia*, T. II S. 393—402).

secus. Tandem quidem, quasi per transennam cognovi, praeditam esse hanc curvam asymtota, sed tamen ejus distantiam et indolem reliquam definire non valui; hanc ob rem contentum me esse oportuit in § 951 Tom. I tantum indicasse istam curvam asymtota gaudere. Quocirca si tu forte, Vir Celeb., hoc negotium jam confeceris, etiam atque etiam rogo, ut mihi plus lucis foenerari velis.

Alteram meam methodum mere analyticam, qua seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

summan inveni, Tibi tantopere probari vehementer gaudeo, eamque ipse alteri longe praeferrem, si pariter ac illa ad potestates superiores accommodari posset, quod quidem adhuc praestare non potui, etiamsi non dubitem eam aeque late patere. Tolluntur vero utique hujus methodi cum priore congruentia omnia dubia, quae circa alteram methodum moveri possunt.

Seriei

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \text{etc.}$$

summam esse $\frac{cc}{8}$ ego quoque jam pridem deprehendi; est enim generaliter

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right)^2 =$$

$$\frac{x^2}{1.2} + \frac{2.x^4}{1.3.4} + \frac{2.4.x^6}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6.x^8}{1.3.5.7.8} + \text{etc.}$$

ex qua posito $x = 1$ illa summatio sequitur; et praeter eam plures aliae ponendo $x = \frac{1}{2}$ vel $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vel $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quoniam intellexi institutum meum analysin infinitorum indeterminatam excolendi non parum placere, optarem, Vir Celeb., ut Tuas hac de materia profundissimas meditationes quae forte nondum publici juris sunt factae mecum communicares, meque pro iis gratissimum fore existimares.

Coepi ante aliquod tempus motus corporum aquae insidentium investigare, methodumque geometricam inveni pro quovis corpore eum situm determinandi, in quo aquae insidens aequilibrium servat. Deinde si corpus aquae insidens ex situ aequilibrii fuerit declinatum, in motum oscillatorium inquisivi, quo circa situm aequilibrii movetur, eumque tandem recuperat; hunc autem motum non solum similem deprehendi motui oscillatorio penduli sed etiam longitudinem penduli simplicis assignare possum, quod suas oscillationes iisdem temporibus absolvat. Ad istam theoriam condendam pluribus novis principiis tam mechanicis, quam hydrostaticis opus habui quorum veritatem firmissimis demonstrationibus evici et quae cum

principio conservationis virium vivarum apprime conveniunt. Haec eadem principia me etiam quasi manuduxerunt ad problema de collisione corporum excentrica solvendum, quod mihi Filius Tuus Clar. proposuerat,[1]) cui etiam in extremis litteris fundamenta meae solutionis perscripsi. . . . .[2])

Ego vero imprimis rogo, ut me favore Tuo et benevolentia complecti, atque Tuis exquisitissimis meditationibus erudire pergas; qui me Tibi omnia debere agnosco et perpetuo agniturus sum. Vale.

Dabam Petropoli d. 10 Dec. 1737.

15*.

Bernoulli an Euler 1738.

Verloren; zitiert von Euler in seinem Brief vom 26. April 1738 („magnopere laetor, probari a te, quae de situ et motu corporum aquae innatantium sum meditatus").

16.

Euler an Bernoulli 26. April 1738.

Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief von 1738. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Die *Phoronomia* von Hermann und die *Principia* von Newton. — Über den 89. Satz des 1. Teiles der *Mechanica*. — Hermanns Beitrag zur unbestimmten Infinitesimalrechnung. — Eulers eigene Behandlung des Gegenstandes. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung schwimmender Körper.

Viro Amplissimo atque Celeberrimo Johanni Bernoulli S. P. D.
Leonh. Euler.

Vehementer doleo tantam pecuniae jacturam, quam per decoctionem mercatorum es perpessus, nihilque magis exopto, quam ut alia Tibi prospere eveniant commoda, quibus dolor amissi tolli animusque Tuus, Vir Celeb., acquiescere queat . . . . .[3])

Illo tempore, quo tractatum meum de Motu conscripsi, Hermanni solutionem de motu absidum non examinavi,[4]) nunc autem Te monstrante paralogismum facile cognovi. Newtoni vero solutionem hoc quidem tempore de novo examinare non vacat, sed memini me olim eam justam etsi obscuram deprehendere; eo minus autem de ea mihi dubitandum videtur,

1) Vgl. die Briefe des Daniel Bernoulli an Euler vom 12. September 1736, 25. Januar und 16. März 1737 (Fuss, a. a. O. S. 433—434, 437, 439).

2) Hier sind 19 Zeilen gestrichen, möglicherweise rührt die Streichung von Johann II Bernoulli her.

3) Hier sind 7 Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

4) Es handelt sich um eine Stelle in Hermanns *Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum* (Amsterdam 1716, S. 95).

cum Newtonus per eam primus veritatem ante incognitam elicuerit; rarissime autem evenire arbitror, ut veritas ante ignorata per vitiosum ratiocinium detegatur.

Scriptum autem quo Ipse, Vir Celeb., analysin Tuam hoc in negotio adhibitam exponis, et quod mecum communicare es polliticus, ingenti desiderio expecto. Ceterum ipsa mea propos. 89 mihi non ambigua videtur, cum pro eo sensu, quo Tu, Vir Celeb., eam primo es interpretatus, necessario hanc conditionem adjicere debuissem, ut corpus in hac orbita mobili eodem modo moveatur quo in eadem quiescente atque ad idem centrum attractum moveretur, quae conditio cum sit omissa, cogitatione superaddi non potest. Problematis autem alterius, adjecta in hac conditione, plenaria extat solutio in sequente propos. 94, quae propositio etiam latius patet, et ex qua plurimis modis virium inventarum decompositiones aliae facile possunt formari.

Hermanni reductionem quadraturarum ad rectificationes curvarum algebraicarum, quamquam est indirecta, tamen quia prima est, aliisque magis genuinis ansam dedit, maximi facio; fortasse enim nunquam solutio genuina in lucem prodiisset, nisi Hermanniana praecessisset.

En autem, Vir Celeb., meam solutionem hujus problematis ex methodo mea infinitorum indeterminata desumta[1]). Posita curvae abscissa $= x$; sit applicata $= \int p\,dx$, et itaque ipsa curva $= \int dx\sqrt{(1+pp)}$, quae igitur formulae ita sunt determinandae ut $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica et $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ datam quadraturam involvat. Quia in his duabus formulis x aequaliter inest, eas transformo juxta regulas a me datas, in alias, in quibus x finito modo aequaliter inest; ita erit

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp;$$

et

$$\int dx\sqrt{(1+pp)} = x\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Ponatur jam

$$\int x\,dp = q$$

et

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int Q\,dq,$$

ubi $\int Q\,dq$ vel eam ipsam quadraturam, a qua rectificatio curvae quaesitae pendere debet, exhibet, vel saltem involvit, ita tamen ut Q sit quantitas algebraica pariter ac q. His positis erit

$$x = \frac{dq}{dp} = \frac{Q\,dq\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp},$$

1) Vgl. mit dem folgenden die etwas abweichende Behandlung des Problems in der auf S. 260 Anm. 2 zitierten Schrift *De curvis rectificabilibus algebraicis*, sowie Stäckel, a. a. O. S. 103—104.

unde oritur

$$p = Q\sqrt{(1+pp)}$$

atque

$$p = \frac{Q}{\sqrt{(1-QQ)}},$$

et

$$x = \frac{dq\,(1-QQ)^{\frac{3}{2}}}{dQ}.$$

Quocirca curvae quaesitae erit abscissa

$$= \frac{dq\,(1-QQ)^{\frac{3}{2}}}{dQ};$$

applicata

$$= \frac{Q\,dq\,(1-QQ)}{dQ} - q;$$

atque ipsa curvae longitudo

$$= \frac{dq\,(1-QQ)}{dQ} - \int Q\,dq;$$

quae formulae apprime cum Tuis, Vir Celeb., conveniunt. Possum autem per methodum meam plures alias expressiones invenire, quibus eidem problemati satisfit, quarum quae speciem maxime amplitudinis prae se ferunt, ita inveniuntur. Sit abscissa $= \int p\,dx$; applicata $= \int pq\,dx$; erit arcus curvae $\int p\,dx\sqrt{(1+qq)}$. Jam quantitates p, q et x ita determino, ut tres formulae integrales vel algebraicae fiant, vel a datis quadraturis pendeant, prout libuerit. In hunc finem omnes formulas ita transmuto ut faciam

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp;$$

$$\int pq\,dx = pqx - \int x\,d.pq$$

et

$$\int p\,dx\sqrt{(1+qq)} = px\sqrt{(1+qq)} - \int x\,d.p\sqrt{(1+qq)}.$$

Nunc pono

$$\int x\,dp = r,\ \int x\,d.pq = s;\ \int x\,d.p\sqrt{(1+qq)} = t;$$

unde oritur

$$x = \frac{dr}{dp} = \frac{ds}{p\,dq + q\,dp} = \frac{dt}{d.p\sqrt{(1+qq)}}.$$

Ex aequatione autem

$$\frac{dr}{dp} = \frac{ds}{p\,dq + q\,dp}$$

prodit

$$dp = \frac{p\,dr\,dq}{ds - q\,dr},$$

atque ob $x = \frac{dr}{dp}$ erit

$$x = \frac{ds - q\,dr}{p\,dq}.$$

Preterea vero ob

$$\frac{dr}{dp} = \frac{dt}{d.p\sqrt{(1+qq)}}$$

erit

$$\frac{dpdt}{dr} = dp\sqrt{(1+qq)} + \frac{pqdq}{\sqrt{(1+qq)}},$$

quae loco dp valorem inventum substituendo transit in hanc

$$dt\sqrt{(1+qq)} = dr + qds;$$

quae praebet

$$q = \frac{drds + dt\sqrt{(dr^2+ds^2-dt^2)}}{dt^2-ds^2}$$

et

$$\sqrt{(1+qq)} = \frac{drdt + ds\sqrt{(dr^2+ds^2-dt^2)}}{dt^2-ds^2}.$$

Definitis autem hoc pacto q et $\sqrt{(1+qq)}$ erit pro curva quaesita abscissa

$$= \frac{ds-qdr}{dq} - r;$$

applicata

$$= \frac{qds-qqdr}{dq} - s;$$

et arcus curvae respondens

$$= \frac{(ds-qdr)\sqrt{(1+qq)}}{dq} - t.$$

Sumendis igitur pro r, s et t quantitatibus vel algebraicis vel a datis quadraturis pendentibus, curvae prodibunt, quarum abscissa, applicata et ipsa curva vel algebraicae erunt vel ab iisdem quadraturis pendebunt; ita ut hae formulae ad infinita problemata huc pertinentia solvenda sint idoneae, multoque latius pateant, quam eae quae priori modo sunt inventae. Hic autem probe notandum est, id commode usu venisse, quod littera p ex calculo excesserit; quod nisi accedisset, solutio hoc modo ad finem perduci non potuisset.

Magnopere laetor, Vir Celeb., probari a Te, quae de situ et motu corporum aquae innatantium sum meditatus. Reduxi quoque omnes quaestiones huc spectantes ad puram geometriam; nam quo corpus in dato situ aquae insidere queat, necesse est

1. ut pars submersa volumine adequetur pondus aquae sibi aequale;
2. ut centrum gravitatis totius corporis, et centrum gravitatis seu potius magnitudinis partis submersae in eadem recta verticali sint sita, quae quidem ex hydrostaticis satis patent.

Sed haec non sufficiunt ad natationem in hoc situ producendam; requiritur enim praeterea, ut vis adsit quae corpus, cum ex hoc situ aliquan-

tillum fuerit declinatum, in situm pristinum restituatur, alioquin enim corpus parumper declinatum ex situ aequilibrii penitus subverteretur, prout in bacillo aquae verticaliter insistente evenit. Hanc ob rem in quovis casu, qui quidem duobus prioribus requisitis jam gaudet, ea vis determinari debet, qua corpus in eo aequilibrii statu continetur atque in eundem restituitur, si aliquantillum declinetur; haecque vis vel affirmativa vel nulla vel adeo negativa esse poterit. Ex quo perspicuum est tum demum corpus in quodam aequilibrii situ perseverare posse, cum vis restituens affirmativum obtinuerit valorem, ex hocque valore firmitatem determino, qua corpus in quoque aequilibrii situ persistit; ita ut firmitas eo major sit, quo major fuerit vis restituens. Haec autem firmitas non solum ab intervallo centrorum gravitatis totius corporis et partis submersae pendet, sed etiam ab amplitudine, quam corpus in suprema aquae superficie occupat; quae omnia, maximam partem nova, in peculiari tractatu exponere coepi.[1])

Ita cubus ex materia homogenea aqua leviori confectus aquae ita innatabit, ut una hedra horizontalem habeat situm, si ejus gravitas specifica vel minor fuerit quam 211 vel major quam 789, posita aquae gravitate 1000. Sin autem cubi gravitas specifica intra limites 211 et 789 contineatur, cubus aquae ita innatabit, ut planum diagonale horizontalem situm teneat quocum convenit casus cubi aqua duplo leviori, quem Tu, Vir Celeb., evolvisti. Corpora autem his casibus minime ex situ aequilibrii firmo depulsa oscillationibus isochronis peragendis restitui non solum in precedentibus meis litteris affirmavi, sed simul significavi me quovis casu longitudinem penduli simplicis isochroni assignare posse; pro his vero omnibus expediendis calculus non solum fit non intricatus, sed etiam mirifice simplex et facilis. Vale.

Dabam d. 26. April. 1738. Petropoli.

16*.

Bernoulli an Euler Juni (?) 1738.

Verloren; zitiert von Euler in seinem Brief vom 30. Juli 1738 („litterae tuae erga me benevolentiae signis . . . repletae . . . sunt redditae").

---

1) Aus dieser Stelle geht hervor, daß Euler die Redaktion der *Scientia navalis*, die bekanntlich 1749 erschien, schon 1738 begonnen hatte. Der von Fuss (a. a. O., II S. 456) als „anachronisme apparent" bezeichnete Umstand, daß Daniel Bernoulli schon 1739 von der *Scientia navalis* sprechen konnte, ist also erklärt — aus einer Stelle in Eulers Brief vom 20. Dezember 1738 geht sogar hervor, daß die Redaktion der *Scientia navalis* damals schon beendet war.

17.

Euler an Bernoulli 30. Juli 1738.

Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief vom Juni (?) 1738. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Abhandlungen von Johann und Nikolaus I Bernoulli für die Commentarii der Petersburger Akademie. — Über die Bewegung von Körpern in veränderlichen und festen Bahnen. — Die Arbeiten von Hermann und von Johann Bernoulli, sowie von Euler selbst auf dem Gebiete der unbestimmten Infinitesimalrechnung. — Über das Gleichgewicht schwimmender Körper. — Die Vorarbeiten zur *Scientia navalis.* — Die Eulersche Preisschrift über das Feuer. — Über die Ursache der Ebbe und Flut. — Die Summe der reziproken Quadratzahlen und der Reihe

$$1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

Lösung eines speziellen isoperimetrischen Problemes und die allgemeine Lösung solcher Probleme.

Viro Excellentissimo atque Celeberrimo Joanni Bernoulli S. P. D.
Leonhardus Euler.

Litterae Tuae eximiae erga me benevolentiae signis pariter ac profundissimis meditationibus repletae Peterhofii, ubi nunc Aula Imperatoria commoratur, ab Illustri Praeside nostro nuper, cum ibi essem, sunt redditae, una cum Tua problematis de motu corporum in orbitis mobilibus solutione[1]), atque Nepotis[2]) Tui acutissimi investigatione summae hujus seriei,

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}$$

His autem litteris acceptis, atque Illustri Praesidi relatis, quae ad Ipsum pertinere videbantur, Tibi nunciari me jussit, ut schedulam separatam, qua centum Rubelones Te accepisse testaveris, mittere velis: quae vero ceterum Ipsius nomine Tibi, Vir Celeberrime, significarem, tum temporis mihi exponere non vacavit, quia hora instabat Aulam adeundi. Quamobrem ad ea quae me spectant, nunc potissimum respondebo.

Quod igitur primo ad Tuum exquisitum schediasma attinet, id statim post ferias finitas in nostris conventibus producam, atque curabo, ut Commentariis nostris inseratur. In hac Tua solutione mirifice mihi placuit, quod differentiam virium centripetarum tum pro orbita immobili,

---

1) Joh. Bernoulli, *Compendium analyseos pro inventione vis centralis in orbitis mobilibus planetarum;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 95—101.

2) Nicolaus Bernoulli, *Inquisitio in summam serici* $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$ *etc.;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 19—22. — Aus einem Briefe von Nikolaus Bernoulli an Euler vom 13. Juli 1742 geht hervor (siehe Fuss, a. a. O. II S. 682), daß die Abhandlung ohne Genehmigung des Verfassers veröffentlicht wurde.

tum pro mobili a differentiali rationis inter motum ipsius orbitae et motum in ea liberasti, quo quidem casu ista ratio ponitur variabilis; id quod evenit, dum alterius vis, quae praeter centripetam requiritur, directionem normalem ad vim centripetam fecisti. Eo enim considerandi modo quo ego sum usus in prop. 94, ubi alterius vis directionem posui ad rectam positione datam normalam, ista insignis proprietas minus est conspicua. Interim tamen Tuo contemplandi modo perspecto, meas formulas statim eo traducere licuit, ut illa proprietas conspiceretur, si enim placeat cum mea propositione figuram allegatam conjungere, atque ad coroll. 2 respicere, quo casus a Te tractatus continetur, quando motus in orbita immobili a vi centripeta sola proficiscitur. Duas scilicet ibi vires dedi, quarum altera tendit ad centrum virium C, estque

$$= \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy},$$

altera vero normaliter tendit ad rectam positione datam DC in directione MP, estque

$$= -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy},$$

quibus conjunctis corpus in orbita mobili movetur. Si nunc vis MP resolvatur in duas, quarum alterius directio cadat in MC, alterius vero directio ad hanc sit normalis, reperietur ea, cujus directio est MC

$$= -\frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy};$$

altera vero, cujus directio est normalis ad MC erit

$$= -\frac{2a^2cqdw}{py^2dy}.$$

Quapropter sequentes duae habebuntur vires corpus in orbita mobili continentes, prima scilicet tendet ad centrum virium C, estque

$$= \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3},$$

altera vero directionem habebit normalem ad illam, eritque

$$= -\frac{2a^2cqdw}{py^2dy}.$$

Unde intelligitur excessum vis centripetae pro orbita mobili super vim centripetam pro orbita immobili esse

$$= \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3},$$

prorsus uti Tu reperisti; sed hanc conditionem adjicere necesse est, ut alterius vis, quae praeter vim centripetam requiritur, directio sit normalis

ad vim centripetam. Interim ista questio tantum est casus particularis propositionis meae 94, ibi enim motum quemcunque corporis in orbita quiescente sum contemplatus, dum in quaestione a Te soluta iste motus ita limitetur, ut tempora sint areis proportionalia, quamobrem mirum non est, si expressiones in solutione ipsius propositionis sint longiusculae.

Reductionem Hermanni quadraturarum ad rectificationes algebraicarum curvarum non studio atque certa quadam methodo esse inventam, de eo quoque minime dubito, cum problematis affinibus solvendis minime inserviat. Tua vero, Vir Celeb., methodus multo magis analysin sapit; interim tamen constructiones Hermannianae ad symbola revocatae statim praebent ipsas formulas Tuas; ex neutra autem certam hujusmodi problematum resolvendorum rationem derivare potui, etiamsi utramque magno studio sim persecutus. In Tua enim solutione viam non indicas, quam secutus ad formas $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{xdy}{dx} - y$, quas pro coordinatis assumis, pertigeris, in quo tamen meo judicio omnis rei cardo versatur; si enim alia hujus generis problemata proponerentur, quis mihi indicaret, cujusmodi formae pro coordinatis essent assumendae? Quamobrem jam ante complures annos coepi cogitare, quomodo certa et analytica methodus inveniri queat omnibus hujusmodi problematis solvendis accommodata, in qua nulla opus esset divinatione: cui desiderato mihi quidem satisfecisse videor, meaeque methodi beneficio hujus ipsius problematis solutionem Tibi perscripsi, atque studio ipsas formulas Tuas deduxi, eum potissimum in finem, ut non tam ad formulas inventas, quam ad methodum, qua eas inveni, attendere velis. Praeterea vero jam ante problematis novi multoque difficillimi solutionem methodo mea erutam Tecum communicavi, qua duas curvas algebraicas exhibui non rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, quae tamen summam arcuum eidem abscissae respondentium habeant rectificabilem. Innumerabilia autem alia atque etiam difficiliora problemata beneficio methodi meae resolvi, quae sine ea vix essent solubilia.

Quae de situ corporum aquae insidentium in litteris postremis Tibi nunciavi, Vir Excellent., ea Tibi probari eo magis laetor, quo parcius haec materia ante fuit exculta. At quas mihi perscripsisti de eadem re meditationes profundissimas, non satis percipere possum, cujus rei causa esse videtur, quod nos diversis modis hoc argumentum tractemus, nam quae ego scripsi, Tibi aliquantum obscura fuisse ex hoc intellexi, quod centro magnitudinis aliam tribuas significationem atque ego feci. Fateor autem utique hoc vocabulum minus esse congruum ad id significandum quod volebam; intelligebam enim centrum gravitatis seu potius inertiae partis aquae immersae, si pars ista ex materia uniformi constaret. Quo

igitur hanc descriptionem evitarem centro neque gravitatis neque inertiae uti potui, ne verum intelligeretur centrum gravitatis partis submersae, etiamsi haec pars ex materia maxime difformi constaret, quo casu plurimum differre possunt partis submersae centrum gravitatis et centrum quod voco magnitudinis; atque ob hanc causam hac appellatione brevitati consulens etsi minus convenienter uti constitui, cum commodior tum non occurreret. Quod autem praecipuum est, memini me non satis dilucide statum quaestionis exponere; quando enim de situ corporis cujuspiam aquae insidentis quaeritur, tum quaestio bipartita est facienda. Namque primo omnes situs, quibus corpus aquae in aequilibrio insidere potest, examinari debent, quos uti satis constat ita comparatos esse oportet, ut et tantum corporis volumen in aqua versetur, quantum si ex aqua constaret ipsum corpus pondere adaequaret, et ambo centra tam gravitatis totius corporis, quam gravitatis partis submersae, si ea ex uniformi materia constaret, in eadem recta verticali sint sita. Ita unumquodque corpus plerumque plures admittit aequibrii situs, quibus singulis aquae insidere posset, si modo omnia in perfectissima quiete essent posita, prout bacillus tenuissimus aquae in situ verticali insistere posset. Secunda autem quaestio versatur in firmitate definienda, qua corpus in dato aequilibrii situ aquae insidet; fieri enim potest, ut corpus in situ aequilibrii positum, quando tantillum ex eo deturbatur vel sese restituat, vel subvertatur; priori casu situm aequilibrii firmum voco, posteriori vero infirmum atque subversioni obnoxium. Maximi igitur momenti est quovis aequilibrii situ proposito definire utrum is sit firmus an infirmus, et quando est firmus, quanta vi corpus ex situ aequilibrii depulsum restituatur, quam vim seu firmitatem commodissime metiri videor per momentum virium restituentium, quando corpus angulo quam minimo declinetur, ad hunc ipsum angulum applicatum. Ita omnis cubus ex materia homogenea confectus in aqua quidem semper aequilibrium tenet, si duae hedrae oppositae fuerint horizontales, reliquae verticales; sed status iste aequilibrii non conservabitur, nisi gravitas specifica cubi vel minor sit quam $211\frac{1}{3}$ vel major quam $788\frac{2}{3}$. Nam si gravitas cubi intra hos numeros contineatur, tum situs iste aequilibrii non erit firmus, hoc est cubus a minima vi depulsus ex hoc situ penitus subvertetur in alium aequilibrii situm, qui sit firmus. Hic obiter indicare sufficiet limites hos minime congruere cum iis, qui ex Tuis formulis consequuntur, etiamsi non negam hos limites non multum in recessu habere. Quando ergo gravitas specifica cubi intra limites $211\frac{1}{3}$, et $788\frac{2}{3}$ continetur, tum cubus aquae immissus alium aequilibrii situm occupabit; plano diagonali autem deorsum verso his tantum casibus aquae insidebit, quando gravitas specifica cubi inter hos limites $281\frac{1}{4}$ et $718\frac{3}{4}$ continebitur. Quoties ergo cubi gravitas specifica continetur vel intra hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$ vel

inter hos $718\frac{3}{4}$ et $788\frac{2}{3}$, tum neutro situ cubus aquae insidet, sed his casibus situm occupabit, qua recta diagonalis ad angulos oppositos ducta situm verticalem tenebit. Simili modo inveni tetraedron regulare aquae ita innataturum, ut una hedra horizontali situ ex aqua emineat, quando ejus gravitas specifica major est quam 512; sin autem levior sit pyramis, hedram horizontalem sub aqua habebit.

Quae porro de cono recto et conoide parabolico commemoras a meis maxime differunt, situs enim illi quod hujusmodi corpora in aqua habitura esse dicis, nequidem proprietatibus ad aequilibrium requisitis gaudent, cum recta ambo gravitatis centra jungens non sit verticalis. Quamvis autem alius in istis corporibus detur aequilibrii situs obliquus, tamen is firmitatem habebit nullam, ite ut talia corpora nunquam in aqua ejusmodi situm obliquum conservare queant; vehementer igitur dubito num Tua cum Archimedeis conveniant. Ceterum fundamentum principii Tui de intervallo planorum horizontalium[1]) per ambo gravitatis centra ductorum non percipio neque quomodo id cum principiis hydrostaticis sit connexum video: mihi saltem istud principium ad hunc scopum minus aptum videtur.

Quo autem Tibi, Vir Celeb., meam methodum, qua in hoc negotio utor, exponam, primo pro dato corpore in situs aequilibrii inquiro ex principiis notissimis, secundum quae tum debita pars aquae debet esse immersa, tum centra gravitatis ambo in eadem recta verticali posita esse oportet. Quae investigatio utique saepius fit admodum difficilis, quando situs aequilibrii obliqui desiderantur: nulla autem difficultate laborat in sitibus aequilibrii regularibus, cujusmodi sunt, quando corpora aquae ita immittuntur, ut ambo centra gravitatis sponte in rectam verticalem eandem incidant. Invento autem hac ratione quocunque aequilibrii situ, sequenti modo investigo ejus firmitatem,[2]) seu vim qua corpus si tantillum circa datum axem horizontalem inclinetur, in situm aequilibrii restituitur. Sit (Fig. 2) datum corpus $CAEBD$ aquae in situ aequilibrii insidens, cujus pars aquae immersa sit AEB, atque sectio horizontalis in ipsa aquae

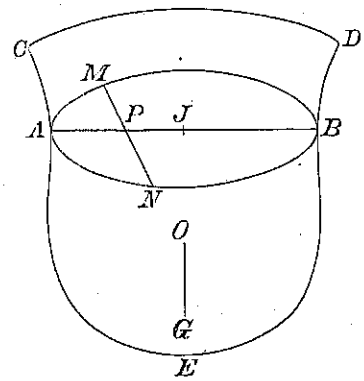

Fig. 2.

1) Siehe Joh. Bernoulli, *De corporum aquae insidentium oscillationibus, et de invenienda longitudine penduli simplicis oscillationibus illis isochroni; Opera omnia*, T. IV S. 286—296.

2) Vgl. Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, T. IV S. 293.

superficie facta $AMBNA$, quam brevitatis gratia sectionem aquae appello. Sit porro volumen partis submersae $AEB = V$, ejusque centrum gravitatis, si ex materia homogenea constaret, in O. Totius vero corporis pondus sit $= M$, ejusque centrum gravitatis situm sit in G, erit ob situm aequilibrii recta GO verticalis, atque V in gravitatem specificam aquae ductum $= M$. Nunc utrum hoc corpus, si secundum datam plagam ex hoc aequilibrii situ minimum deturbetur, sese restituat an vero penitus eum relinquat, aliumque aequilibrii situm recipiat, hoc modo definio. Illi axi horizontali, circa quem corpus inclinando ex situ aequilibrii declinari ponitur, cuique inclinationi respondens vis restituens quaeritur, duco in sectione aquae per ejus centrum gravitatis I rectam parallelam AIB; quam tanquam axem considero, ad eumque ordinatas orthogonales refero; quo facto sit $AP = x$; $PM = y$, et $PN = z$, atque quaeratur integrale $\int (y^3 + z^3)\,dx$ per totam sectionem aquae. Hoc invento erit firmitas, qua corpus inclinationi circa axem AB eive parallelum reluctatur

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right);$$

quae expressio[1]) quo fuerit major, eo magis corpus inclinationi resistet, at si fiat negativa, quod accidere potest, quando punctum G supra O cadit, tum corpus inclinatum non solum non restituetur sed adeo subvertetur. Simili modo firmitas respectu alius cujusvis axis AB definiri potest; at si fuerit inventa pro duobus tantum axibus inter se normalibus, tum firmitatem respectu cujusvis alius axis aestimari licebit. Habeat autem firmitas inventa valorem affirmativum atque inclinetur corpus aliquantillum circa axem AB ex situ aequilibrii, quo facto corpus a vi restituente in situm aequilibrii urgebitur, atque sese restituendo oscillationes absolvet isochronas, prout Tu, Vir Celeb., dudum observasse asseris. At ego non solum inveni oscillationes istas esse isochronas sed adeo longitudinem penduli simplicis isochroni assignare possum hoc modo. Multiplicentur[2]) singulae corporis totius particulae per quadrata distantiarum suarum a centro gravitatis G, atque posito omnium istorum productorum aggregato $= Mk^2$ (hujusmodi enim formam habebit hoc aggregatum), erit longitudo penduli simplicis isochroni

$$= \frac{3Vk^2}{3V.GO + \int (y^3 + z^3)\,dx}.$$

Ex his igitur formulis determinari potest, quanta vi navis omni

1) Vgl. Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, T. IV S. 293.

2) Die folgende Angabe ist unrichtig, siehe Eulers Brief vom 20. Dezember 1738 (unten S. 288).

inclinationi resistat, et quam celeres perficiat oscillationes, cum situm aequilibrii amiserit; unde non tantum plurium rerum quas fabri in navibus architectandis experientia sola edocti observare solent, veram rationem assignare valeo, sed etiam novas easque utilissimas regulas ad constructionem navium sum assecutus. Quo in negotio non parum praestitisse mihi videor, cum ista theoria a nemine adhuc sit tractata, atque adeo omnino ignorata.

Haec autem omnia in peculiari tractatu colligere coepi, in quo non solum omnia, quae ad situm aequilibrii, sed etiam quae ad motum, motusque et situs alterationem a viribus quibuscunque ortam pertinent, ex certissimis principiis mechanicis seu dynamicis maximam partem novis sum derivaturus.

Ceterum etiam atque etiam rogo, ut istas formulas tum firmitatem situum aequilibrii, tum oscillationes spectantes cum Filio Tuo Celeb. communicare velis.

Pro Tua tam benevola gratulatione, Vir Celeb., ob trientem praemii Parisini[1]) mihi adjudicatum debitas habeo gratias, et nescio quomodo iste honor mihi obtigerit; forte enim et casu alia cogitans incidi in quandam ignis explicationem, in qua potissimum explicui, quomodo a tum exigua vi, quae ad scintillam eliciendam requiritur, tam stupendus motus tantaque virium quantitas proficisci queat.

Alia utique aestus maris causa mihi assignari non posse videtur praeter Newtonianam, cum eae quas Cartesius et Wallisius dedit, satis sint refutatae. Sed Newtonus tantum ex sua theoria pleraque aestimatione deduxit, cum calculus fere insuperabilis evadat. Praeterea etiam Newtonus ad complures circumstantias theoriae suae non satis adtendit, quas mihi ad calculum revocare licuit, unde si tempus permittet, completam hujus phaenomeni causam explicare possem. At multo temporis otiique opus est ad hanc quaestionem evolvendam, quae subsidia vix sperare possum.[2])

Inquisitio summae

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

a Celeb. Nicolao Bernoulli mecum communicata mirifice mihi placuit, et propterea maximas ago gratias. Statim enim eam abstrusissimae inda-

1) Siehe die Abhandlung von Euler, *Dissertatio de igne*; Pièces qui ont remporté les prix de l'académie des sciences en 1738 (Paris 1739), S. 1—19.

2) Bekanntlich hat Euler diesen Gegenstand später in einer von der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1740 gekrönten Preisschrift *Sur le flux et reflux de la mer* behandelt.

ginis esse intellexi, cum per tot serierum transmutationes tandem ad aequationem differentialem secundi gradus perveniatur, cujus resolutio desideratum valorem praebet. Considerans autem hanc maxime ingeniosam methodum, inquirere volui, an non immediate ex serie

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.},$$

sine tot transmutationibus, summa reperiri posset, id quod mihi successit sequenti modo.

Ponatur

$$y=\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{x^6}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{x^8}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

quippe quae series posito $x = 1$ abit in propositam. Differentialibus igitur sumtis habebitur

$$dy=2dx\left[\frac{x}{1}-x^3\left(1+\frac{1}{3}\right)+x^5\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-x^7\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}\right]$$

$$=\frac{2dx}{1+xx}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\text{etc.}\right)$$

$$=\frac{2dx}{1+xx}\int\frac{dx}{1+xx}.$$

Posito nunc arcu circuli $= s$ cujus tangens est x, existente radio $= 1$, erit

$$y=\int 2sds=ss.$$

Fiat $x = 1$, abibit s in octavam peripheriae partem seu denotante $p : 1$ rationem peripheriae ad diametrum, erit

$$s=\frac{p}{4}\text{ atque }y=\frac{1}{16}pp,$$

omnino uti acutissimus Nepos Tuus invenit. Videbis autem, Vir Celeb., methodum hic a me usitatam serierum summas a priori investigandi satis esse concinnam atque latissime patentem; extat ea jam impressa[1]) in 6to tomo Comment. nostr.; quem tomum quam primum erit absolutus, una cum quinto Tibi statim sum missurus.

Proposuit mihi nuper Filius Tuus Clar. istud problema,[2]) ut inter

1) Siehe die Abhandlung von Euler *Methodus generalis summandi progressiones;* Comment. acad. sc. Petrop. 6, 1732/1733 (gedruckt 1738), S. 68—97.

2) Vgl. die Briefe des Daniel Bernoulli an Euler vom 12. September 1736 und 24. Mai 1738 (Fuss, a. a. O. II S. 435, 448).

omnes curvas isoperimetras ea determinetur, in qua $\int r^m ds$ esset maximum vel minimum, ubi r radium osculi, s vero arcum denotat; quod problema eo difficilius censebat, quod per methodum isoperimetricam resolvi nequeat, ob differentialia secundi gradus, quae in r insunt. Inveni autem ante aliquot annos novam methodum hujus generis problemata solvendi, quae ad differentialia cujusque ordinis est accommodata; ejus ope hanc problematis propositi inveni solutionem[1]), ut curvae quaesitae natura exprimatur hac aequatione

$$Ax + By + Cs = (m + 1) \int r^m ds,$$

in qua x et y denotant coordinatas orthogonales quascunque seu in quocunque axe acceptas, quam ob causam sine ulla restrictione vel A vel B poni potest $= 0$. At si C fiat $= 0$, tum aequatio

$$Ax + By = (m + 1) \int r^m ds$$

praebebit curvam, quae inter omnes omnino curvas iisdem terminis contentas, habebit $\int r^m ds$ minimum. Hoc casu si fiat $m = 1$, curva fiet cyclois ordinaria, quae ergo hanc habet proprietatem, ut in ea sit $\int r ds$ minimum. At hoc casu Filius Tuus dissentit, negatque pro hoc casu cycloidem satisfacere,[2]) etiamsi ipsius aequatio prioris problematis, quam eo casu quo est $m = 1$ mihi perscripsit, cum mea apprime consentiat.

Hujusmodi autem problematum solutio mea in genere ita se habet.[3]) Invenienda sit inter omnes omnino curvas iisdem terminis comprehensas ea, in qua $\int Z dx$ habeat maximum minimumve valorem. Sit autem x abscissa, y applicata, atque

$$dy = p dx;\ dp = q dx;\ dq = r dx;\ dr = s dx \text{ etc.};$$

ope quarum substitutionum ex Z omnia differentialia exterminari poterunt, cujuscunque etiam sint gradus; hoc autem facto differentietur Z, sitque

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{etc.},$$

---

1) Siehe die Abhandlung von Euler, *Solutio problematis a celeb. Dan. Bernoullio propositi;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 164—180.

2) Diese Bemerkung von Euler ist schwer zu verstehen, denn in dem zitierten Briefe vom 24. Mai 1738 sagt Daniel Bernoulli (siehe Fuss, a. a. O. S. 448): „Wenn aber conditioni hujus problematis die aequalitas perimetri dazugethan wird, so finde ich diese aequationem, posito ds constanti,

$$ds = \frac{2 R dR}{\sqrt{(-4RR + 4nR + g)}},$$

quae est ad cycloidem, si fiat $n = 0$".

3) Siehe die Abhandlung von Euler, *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis;* Comment. acad. sc. Petrop. **8**, 1736 (gedruckt 1741), S. 159—190.

unde facillimo negotio aequatio pro curva quaesita formabitur haec:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}$$

At si in Z non solum differentialia, sed etiam integralia contineantur, pro ejusmodi casibus peculiarem adeptus sum solutionem, qua pariter statim sine ulla figurarum descriptione aequatio pro curva quaesita facillime formari potest; hocque modo id genus problematum quae vulgo sub nomine isoperimetricorum comprehendi solent, latissimo sensu atque singulari facilitate solutum dedi, ut nihil amplius in hoc negotio hacque analyseos parte desiderandum videatur.

Sed ne Tibi tam prolixe scribendo molestus fiam, litteris hisce finem imponam, me meaque omnia Tibi, Vir Celeb., submisse commendans. Vale, Vir Excellentissime, meque amore prosequi non desine.

Dabam Petropoli d. 30 Jul. 1738.

17*.

Bernoulli an **Euler** September (?) 1738.

Verloren; zitiert von Euler in seinem Brief vom 20. Dezember 1738 („cum litteras Tuas postremas ex omni capite gratissimas accepissem").

18.

Euler an **Bernoulli** 20. Dezember 1738.

Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief vom September (?) 1738. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Die von Johann Bernoulli in Aussicht genommene Arbeit über die Hydraulik. — Über die Herausgabe der Commentarii der Petersburger Akademie. — Über den Inhalt des Eulerschen *Tentamen novae theoriae musicae.* — Über die Beendigung der *Scientia navalis* und Aufschlüsse über den Inhalt der Arbeit. — Über die allgemeine Lösung isoperimetrischer Probleme und über das im vorhergehenden Brief behandelte Problem. — Eine merkwürdige Eigenschaft der elastischen Kurve.

Viro Excellentissimo Joanni Bernoulli S. P. D.
Leonardus Euler.

Cum litteras Tuas postremas ex omni capite gratissimas accepissem, mox occasio se obtulit. . . . . .[1])

Quamobrem Te nomine Academiae rogare jussus sum, ut novam et incomparabilem theoriam de motu aquarum sine ullo temporis dispendio

1) 7½ Zeilen sind gestrichen, ohne Zweifel von Euler selbst vor dem Absenden des Briefes, wie aus seinem folgenden Brief ersichtlich ist.

ad nos transmittas[1]) eamque vel per Filium Tuum Celeb. vel directe huc expedias, atque ad Illustr. Praesidem nostrum dirigas. Ego enim restitutionem sumtuum non facile obtineo ab Academia, eo quod in tali commercio pro litteris ad Praesidem directis nequidem portorium postulatur. Maxime autem desidero Tuas meditationes hydraulicas perlegere, cum ego jam dudum imperfectionem, qua haec doctrina etiam nunc tractari solet, cognovissem, ac frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocassem. Quo magis ergo impedimenta in hac re perspicio, eo majorem utilitatem ex Tua theoria capere spero.

Ceterum solutionem Tuam succintam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus,[2]) pariter ac Filii Tui Celeb. dissertationes[3]) nobiscum communicatas in conventibus nostris praelegi, ex quo mox Commentariis nostris sunt insertae; speramus autem residuos tomos omnes sequenti anno prelo committere atque absolvere: jam enim finitus est tomus sextus, continens annos 1732 et 33, et reliqui quinque anni in tribus tomis comprehendentur; ita ut in posterum finito quoque anno mox tomus Comment. publicari queat. Ne autem uni tomo quotannis adimplendo materia desit, invitandi sunt exteri Academiae sodales, ut suas meditationes communicent, inter quos maximam fiduciam in Te, Vir Excell., Filioque Tuo Celeb. collocamus. Proximo autem vere ad Te mittentur opera nostra quae tum erunt parata, Tibique adhuc desunt.

Initio sequentis anni Tractatus . . . . . .[4]) Musica quem jam ante aliquot annos conscripseram[5]) prelo committi . . . . . et genuina harmoniae principia detexisse mihi videor: egregie enim . . . . . suggessit tam cum musica veterum quam hodierna congruunt . . . . . scilicet systema sonorum diversorum omnium ad harmoniam quandam . . ducendam idoneorum sub termino quodam generali comprehendi oportet, cujus singuli divisores ipsos sonos systematis exhibeant. Ita iste terminus

---

1) Die betreffende Arbeit des Johann Bernoulli wurde in zwei Abteilungen an Euler gesandt, die erste am 7. März 1739, die zweite am 31. August 1740 (siehe Fuss, a. a. O. II S. 18, 42).

2) Siehe oben S. 276 Anm. 1.

3) Ohne Zweifel handelt es sich um die zwei Abhandlungen des Daniel Bernoulli: *Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur* und *Commentationes de statu aequilibii corporum humido insidentium* in den Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 116—124, 147—163.

4) Das Papier des Briefes ist oben beschädigt, so daß Teile von fünf Zeilen fehlen.

5) Über das *Tentamen novae theoriae musicae* vgl. Eulers Brief an Joh. Bernoulli vom 25. Mai 1731 (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 383—386).

generalis $2^n.3^3.5$, est exponens generis diatonici PTOLEMAICI, ejus enim divisores omnes intra rationem 1 : 2 contenti dant sonos hujus generis unius octavae intervallum replentes. Divisores enim simplices neglecta binarii potestate, quae sonos tantum una pluribusve octavis elevat, sunt:

$$1;\ 3;\ 3^2;\ 3^3;\ 5;\ 3.5;\ 3^2.5;\ 3^3.5;$$

quorum singuli per ejusmodi binarii potestates multiplicati, ut intra rationem duplam cadant, sequentes praebebunt numeros sonos generis diatonici singulos exponentes

$$\begin{array}{ccccccccc} 96: & 108: & 120: & 128: & 135: & 144: & 160: & 180: & 192. \\ C: & D: & E: & F: & Fs: & G: & A: & H: & c. \end{array}$$

quod systema a recepto non differt nisi quod hic ingrediatur sonus Fs, qui omitti est solitus, quo quidem theoria nil turbatur. Generis vero usu nunc maxime recepti diatonico-chromatici 12 sonos intervallo unius octavae continentis observavi exponentem esse $2^n.3^3.5^2$, cujus sunt duodecim divisores simplices

$$1;\ 3;\ 3^2;\ 3^3;\ 5;\ 3.5;\ 3^2.5;\ 3^3.5;\ 5^2;\ 3.5^2;\ 3^2.5^2;\ 3^3.5^2;$$

qui per binarii potestates in unius octavae intervallum reducti, sequens dabunt sonorum systema

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2^7.3: & 2^4.5^2: & 2^4.3^3: & 2.3^2.5^2: & 2^5.3.5: & 2^9.1: & 2^2.3^3.5: & 2^6.3^2: & 2^3.3.5^2: & 2^7.5: & 3^3.5^2: & 2^4.3^2.5 \\ 384: & 400: & 432: & 450: & 480: & 512: & 540: & 576: & 600: & 640: & 675: & 720 \\ C: & Cs: & D: & Ds: & E: & F: & Fs: & G: & Gs: & A: & B: & H. \end{array}$$

Haeque sonorum proportiones tam exacte cum iis, quae a novissimis Musicis practice sunt stabilitae, conveniunt, ut unicus sonus B aliquantillum discrepet; solent enim ponere rationem $A:B$ ut 25 ad 27, cum per theoriam sit ut 128 ad 135. Quemadmodum autem totum sonorum systema exponente exprimi potest, ita quaelibet consonantia hoc modo per exponentem repraesentari atque ex exponente suavitas consonantiae dijudicari potest; quae omnia in tractatu brevi proditurо abunde explicavi et demonstravi.

Nunc etiam ad finem perduxi tractatum de situ et motu corporum aquae innatantium quem, quia ad naves potissimum omnes meditationes direxi, *Scientiae navalis* nomine insignire placuit; ex quo nonnulla, quae ad situs firmitatem aestimandam spectant, atque ad motum oscillatorium definiendum Tecum, Vir Celeb., communicavi. Minime autem principia illa hydrostatica trita commemoravi, quasi Tibi essent incognita, sed eum in finem, ut indicarem ea non sufficere ad firmitatem dijudicandam: quo enim corpus talem situm conservet, neque a minima vi de eo deturbetur, aliud

quid insuper requiritur, quod firmitatem appello; quae in casu ante perscripto mihi est

$$M\left(G\,O+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3\,V}\right),$$

cujus expressionis ratio ita se habet, ut ea, si corpus angulo infinite parvo dw circa axem illum horizontalem, ad quem formula est accommodata, inclinetur, per hunc ipsum angulum multiplicata praebeat momentum virium corpus in situm aequilibrii restituentium. Hacque circumstantia arbitror omne dubium, quod circa hanc formulam movisti, sublatum iri. Ceterum utique lapsui calami est adscribendum si dixi singulas corporis particulas per quadrata distantiarum suarum a centro gravitatis multiplicari debere, cum distantiae ab axe illo horizontali per centrum gravitatis ducto, circa quem oscillationes peraguntur, computari debeant. Quod denique ad axem illum attinet, circa quem corpus vel oscillationes conficit, vel se in situm aequilibrii restituit, is perpetuo situm habet horizontalem et per centrum gravitatis transit, interea autem centrum gravitatis recta vel ascendere vel descendere poterit ita ut semper debita portio aquae maneat submersa.

Quae scripsisti, Vir. Celeb., de cono et conoide parabolico, ea calculo repetito rectissime se habere deprehendo, atque errorem in examine primum instituto mox animadverti; non solum autem situs aequilibrii obliqui a Te assignati debitis proprietatibus gaudent, sed etiam semper firmitatem habent, nisi respectu axis majoris in sectione aquae, cujus respectu firmitas evanescit, id quod etiam rei natura declarat, cum ejusmodi corpus tali mutationi, qua axis corporis inclinatio ad horizontem non afficitur sed in aliam tantum regionem urgetur, non reluctetur.

Ceterum in ipso tractatu meo non adeo sollicitus fui in sitibus aequilibrii obliquis pro quoque corpore investigandis, cum omnia ad naves praecipue direxerim, in quibus aequilibrii situs debet esse erectus et sponte datur. Theoria autem Filii Tui, quam de hoc eodem argumento nobiscum communicavit, mirifice cum meis consentit, et insignes quasdam proprietates observavit, quas ego non annotavi, quamobrem non dubito quin ipsius theoria de oscillationibus cum meis penitus sit consensura.

Quae scripsisti de oscillationibus verticalibus[1]) maxime sum admiratus, praesertim propter simplicitatem expressionis et insignem usum, quem in explorandis navium ponderibus praestare possunt. Veritatem principii Tui de minima distantia inter ambo centra gravitatis utique agnosco, neque tam de ejus veritate quam sufficientia ad situs firmitatem definiendam dubitavi atque etiamnum dubito, cum firmitas non solum a positione horum centrorum sed etiam a sectione aquae pendeat. Ex fundamento

1) Vgl. Joh. Bernoulli, *Opera omnia* T. IV S. 294—296.

autem, quo istud principium nititur, scilicet ut commune corporis et aquae centrum gravitatis locum infimum petat, puto explicari debere, cur naves in mari agitato per undas motu accelerato ascendant, retardato vero descendant; cujus phenomeni causa mihi similis videtur illi, qua levia corpuscula aquae in vase quodam contentae innatantia ad latera accedant, si quidem aqua ad latera magis sit elevata, sed de hujus generis principiis hydrostaticis, quando aquae superficies non amplius est horizontalis, nil certi adhuc statuere valeo.

Quod ad formulam meam generalem pro problemate isoperimetrico attinet, ea rectissime se habet, atque ambos casus a Te allegatos utique sub se complectitur: substitutiones

$$dy = pdx,\ dp = qdx, \text{ etc.}$$

ideo tantum facio, ut speciem differentialium tollam; non autem quasi in hac substitutione novitatem vel aliud mysterium latere putarem. Illa quidem formula, quam perscripsi, latissime patet, atque non solum ad problema, quo curvae propositae sunt ejusdem longitudinis sed etiam si quaecunque proprietates vel una vel plures iis sunt communes, est accommodata: quando autem inter omnes curvas isoperimetras ea postulatur, in qua sit $\int Zdx$ maximum vel minimum, existente Z functione quacunque arcus s, abscissae x, applicatae y, et quantitatum

$$\frac{dy}{dx} = p;\ \frac{dp}{dx} = q;\ \frac{dq}{dx} = r, \text{ etc.}$$

Erit igitur Z quantitas finita nulla differentialia saltem specie talia in se continens, sed quantitates tantum finitas s, x, y, p, q, r, etc. Quare, si functio Z differentietur, habebit dZ ejusmodi formam

$$Lds + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq \text{ etc.}$$

ac quantitates, L, M, N, P, Q etc. erunt cognitae. Ex his vero sequens pro curva quaesita mihi invenitur aequatio

$$Ad.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\int Ldx + Ndx - dP + \frac{ddQ}{dx} - \frac{d^3R}{dx^2} + \text{etc.},$$

in qua solutione non solum ambo Tui casus continentur, sed etiam Filii Tui quaestio de radio osculi. Sit enim Z functio solius arcus s, evanescent quantitates M, N, P, Q etc. eritque

$$Ad.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\int Ldx$$

seu integrando

$$A + B\frac{\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int Ldx,$$

quae differentiata dat

$$-\frac{Bdp}{p^2\sqrt{(1+p^2)}} = Ldx = \frac{Lds}{\sqrt{(1+pp)}},$$

unde fit

$$Lds = -\frac{Bdp}{pp}$$

et

$$\int Lds = Z = C + \frac{B}{p},$$

quare cum sit $p = \frac{dy}{dx}$, orietur haec aequatio pro curva quaesita:

$$(Z - C)\,dy = Bdx.$$

Simili modo si sit Z functio quaecunque applicatae y, erit

$$dZ = Ndy$$

evanescentibus L, M, P, Q etc., habebiturque haec aequatio

$$Ad \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = Ndx = \frac{Adp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Ndy}{p},$$

seu

$$Ndy = \frac{Apdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\int Ndy = Z = B - \frac{A}{\sqrt{(1+pp)}},$$

ita ut sit

$$Adx = ds(B - Z).$$

Hocque modo omnia problemata, quae in hoc genere proponi possunt, resolvere licet, etiamsi differentialia secundi gradus, altiorumve in Z insint. At si differentialia secundi gradus insint, reperitur immediate aequatio differentialis quarti gradus, quae ob quatuor constantes in integratione ingredientes, non per duos terminos, per quos curva transeat, sed per quatuor demum determinatur: cujusmodi est problema Filii Tui, quod mihi omnino determinatum videtur, si curvae quaesitae vel quatuor puncta, vel positio tangentium in terminis curvae detur; quod problema ope ejusdem canonis resolvi. Cum enim sit radius osculi

$$= \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{dp} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

ob $\frac{dp}{dx} = q$; et elementum curvae $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, habebitur ista expressio

$$\int \frac{dx\,(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

maxima minimave efficienda; eritque

$$Z = \frac{(1+p^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m},$$

unde ad meam solutionem sum perductus.[1])

Observavi nuper insignem elasticae rectangulae proprietatem, in qua si abscissa ponatur x, est applicata

$$= \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}},$$

et longitudo curvae

$$= \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}},$$

quae expressiones ita sunt comparatae, ut inter se comparari nequeant. At si abscissa sumatur $= a$, inveni[2]) rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli cujus diameter sit abscissa $= a$; quae observatio mihi quidem notatu maxime digna videtur.

Damnum denique ex decoctione mercatorum quod es perpessus ex animo doleo.

Vale, Vir Celeberrime, meque favore Tuo amplecti non desinas.

Dabam Petropoli d. 20 Decembr. 1738.

---

1) Vgl. die Abhandlung von Euler, *Solutio problematis cujusdam a celeb. Dan. Bernoullio propositi;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 164—180.

2) Soviel ich weiss, hat Euler diesen Satz zuerst am Ende seiner Abhandlung *Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam* (Miscell. Berolin. **7**, 1743, S. 129) veröffentlicht. Früher geschrieben war vermutlich die Abhandlung *De productis ex infinitis factoribus ortis* (Comment. acad. sc. Petrop. **11**, 1739 [gedruckt 1750], S. 3—31), wo der Satz S. 11—12 bewiesen wird.