

den Berechnung des jüdischen Kalenders» (Königsberg 1847) zu Grunde gelegt, ohne eine Quelle dafür zu nennen!

<sup>42</sup> Arabistische Entstehung von MERON und EUKTEMON: s. Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 24, 1870, S. 355, 358, 390.

### Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Au commencement du 18<sup>e</sup> siècle la théorie générale des équations différentielles était encore peu développée. On avait intégré certaines classes d'équations du premier ordre, et on s'était aussi occupé avec succès de quelques équations du second ordre, dont l'intégration pouvait être effectuée par réduction au premier ordre. De même, quand un problème proposait à une équation différentielle du troisième ordre, on essayait de le résoudre par trois intégrations successives, et JEAN BERNOUILLI avait trouvé<sup>1</sup> avant 1700 une méthode d'intégrer par  $n$  opérations successives l'équation différentielle

$$y + Ax \frac{dy}{dx} + Bx^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + Nx^n \frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

C'est à Euler qu'on doit la découverte de la première méthode d'intégrer par une seule opération une équation différentielle du  $n$ <sup>e</sup> ordre. Cette méthode est applicable à des équations linéaires à coefficients constants, et elle a été exposée pour la première fois dans le mémoire: *De integratione aequationum differentiarum alliorum graduum* publié en 1743 dans le tome VII (p. 193—242) des *Miscellanea Berolinensia*. Mais déjà quelques ans plus tôt, Euler l'avait trouvée, et il en avait rendu compte dans sa correspondance avec JEAN BERNOUILLI. Comme il n'est pas sans intérêt de connaître la première explication qu'EULER a donnée de sa méthode, nous allons la reproduire d'après ses lettres inédites.

La première lettre où Euler parle de l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre quelconque est celle du 15 septembre 1739. Il y écrit:

Inveni nuper singularem modum æquationes differentiales alliorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad æquationem finitam perveniatur. Patet autem hæc methodus ad omnes æquationes, quæ in hac generali forma continentur:

$$y + \frac{a_1 dy}{dx} + \frac{b_1 d^2y}{dx^2} + \frac{c_1 d^3y}{dx^3} + \frac{d_1 d^4y}{dx^4} + \frac{e_1 d^5y}{dx^5} + \text{etc.} = 0$$

Découverte de l'intégrale des équations linéaires. 45

posito  $dx$  constante. Ad hanc aequationem generatim integrandum considero aequationem hanc seu expressionem algebraicam:

$$x - \alpha p + b p^2 - c p^3 + d p^4 - e p^5 + \text{etc.} = 0.$$

Hæc expressio si fieri potest in factores simplices reales hujus formæ  $x - \alpha p$  resolvatur: sin autem hoc fieri nequeat, resolvatur in factores duarum dimensionum hujus formæ  $x - \alpha p + \beta pp$ , quæ resolutio realiter semper institui potest, hocque modo prodibit superior expressio sub forma producti ex factoribus vel simplicibus  $x - \alpha p$  vel duarum dimensionum  $x - \alpha p + \beta pp$ , omnibus realibus. Facta autem hac resolutione, dico valorem ipsius  $y$  finitum per  $x$  et constantes expressionem constare ex tot membris, quot factores habentur expressionis illius algebraicæ, singulosoque factores prebere singula integralis membra. Nempe factor simplex  $x - \alpha p$  dabit integralis membrum

$$C e^{-\frac{x}{\alpha}},$$

factor autem compositus  $x - \alpha p + \beta pp$  dabit integralis membrum hoc

$$\frac{\alpha x}{\beta^2} \left( C \sin A \cdot \frac{x \sqrt{4\beta - aa}}{2\beta} + D \cos A \cdot \frac{x \sqrt{4\beta - aa}}{2\beta} \right)$$

ubi  $\sin A$  et  $\cos A$  mihi denotant sinum vel cosinum arcus sequentis in circulo cuius radius = 1 sunt: notandum autem est, si expressio  $x - \alpha p + \beta pp$  in factores simplices reales resolvi nequeat uti pono, tum fore  $4\beta > aa$  ideoque integrale reale. Proposita sit exempli gratia hæc aequatio

$$y dx^4 = k^4 d^4 y, \quad \text{seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0;$$

ex hac nascetur expressio algebraica hæc  $x - k^4 p^4$ , cuius factores reales sunt tress  $x - kp$ ,  $x + kp$  et  $x + k^2 p^2$ , ex quibus oritur aequatio integralis hæc:

$$y = C e^{-\frac{x}{k}} + D e^{\frac{x}{k}} + E \sin A \cdot \frac{x}{k} + F \cos A \cdot \frac{x}{k};$$

in qua expressione ob quadruplicem integrationem unica operatione peractam quatuor insunt novæ constantes  $C, D, E$  et  $F$ , uti natura integrationis postulat. Alla vice, si tibi vir excellentissime, placuerit, hujus methodi demonstrationem prescribam.

A cette lettre JEAN-BERNOULLI répondit le 9 décembre 1739:<sup>3</sup>

Non minus quoque curiosus videtur modus hunc aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniat. Memini me jam ante multos annos simile quod invenisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquire non vacat.

Par ces mots on pourra se douter que JEAN BERNOULLI eût trouvé le premier une méthode d'intégrer des équations différentielles d'ordres supérieurs, mais en poursuivant la lecture renvoie à son article: *Clar. Taylori mathematici Angli proposita analyticum, quod omnibus geometris nota-Anglis proposuit, solutionem Acta eruditorum 1719, 256—270*, où il s'agit de la décomposition de l'expression  $x^4 + a^4$  en deux facteurs réels du second degré, et il fait voir que l'équation

$$\frac{dy}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

a toujours une intégrale partitivæ de la forme

$$y = e^{mx}$$

où  $m$  est une constante (réelle ou imaginaire), mais il n'est pas en état de déduire l'intégrale complète, ni même une intégrale réelle de l'équation

$$y + \frac{k^4 a^4 y}{dx^4} = 0.$$

Dans sa lettre du 19 janvier 1740, EULER continuait ses renseignements sur sa découverte. Voici ce qu'il y dit:

Quod suspicaris, vir exc., ad methodum mean integrandi aequationes differentiales altiorum graduum, quæ hac forma generali continentur

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bdy}{dx^2} + \frac{cd^2y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ansam inibi præbuisse ingeniosam illam tuam analysis, quam problema-Cotesianum a Tayloro propositum resolvesti, quam insignis similitudo intercedit, tamen postquam problema multis modis tractassest, prius inopinato in mean solutionem incidi, atque ante nequidem suspicione agnoveram, resolutionem aequationum algebraicarum in hoc negotio quicquam subsidiari afferre posse. Mox quidem pariter ac tu, vir celeb., intellexi in hujusmodi aequationibus logarithmicas contineri, modo plures, modo pauciores, sœpius etiam nullas, quæ parametros habeant reales. Verum meum institutum in hoc præcipue versa-

batur, non tam ut unam atque alteram aequationem integralē exhiberem, quæ propositæ differentiali satisficeret, quam ut aequationem integralē completam eruerem, quæ æque late ac ipsa differentialis pateret, et quæ omnes omnino aequationes particulares satisfaciens simul in se complectetur. Imprimis autem in eo eram occupatus, ut aequatio integralis à quantitatibus imaginariis penitus esset libera, id quod mihi ex voto consecutus esse videor. Quod enim oggeris hujus aequationis

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

integrale mea methodo inventam imaginariam esse futuram, id, si quidem mea methodum attentius inspicere dignaberis, aliter deprehendes. Pervenio namque ad hanc aequationem algebraicam  $p^4 + k^4 = 0$ , que in his duas aequationes durarū dimensionum resolvitur

$$p^2 + kp\sqrt{2} + k^2 = 0 \quad \text{et} \quad p^2 - kp\sqrt{2} + k^2 = 0,$$

unde obtineo hanc aequationem integralē completam

$$\begin{aligned} y = & C e^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin A. \frac{x}{k\sqrt{2}} + D e^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos A. \frac{x}{k\sqrt{2}} \\ & + E e^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin A. \frac{x}{k\sqrt{2}} + F e^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos A. \frac{x}{k\sqrt{2}} \end{aligned}$$

cujus aequationis quatuor constantes  $C, D, E$  et  $F$  manifeste testantur hanc aequationem esse integralē completam. Quodsi enim aequatio differentialis quarti ordinis proposita

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

quater omni extensione integretur, necesse est ut quatuor novæ constantes in finalem aequationem integralē ingrediantur. Praecipuum autem, quo haec mea methodus aliis antecellere videtur, in hoc consistit, quod non opus habeat tot integrationes successive instituere, quot gradus habent differentia, sed uno quasi actu inventum aequationem integralē finitam. Simili fere modo possum etiam aequationem integralē completam ac realem inventare, quæ satisfaciat huic aequationi differentiali indefiniti gradus

$$0 = y + \frac{ax^2 dy}{dx^2} + \frac{bx^3 d^3 y}{dx^3} + \frac{cx^4 d^4 y}{dx^4} + \text{etc.};$$

posito  $dx$  constante.

Des remarques ultérieures de JEAN BERNOULLI<sup>3</sup> donnaient lieu à de nouvelles communications de la part d'EULER sur le même sujet. Ainsi il fait observer dans sa lettre du 20 juin 1740 : Quæ de integratione aequationum differentialium indefiniti gradus mibi rescribis, misericordie mihi placent; methodus quidem, qua uteris, vir excell, in aequatione

$$0 = y + \frac{adx}{dx} + \frac{bd^2 y}{dx^2} + \frac{cd^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruit cum mea, altera autem quam præbæs pro aequatione

$$0 = y + \frac{ax^2 dy}{dx^2} + \frac{bx^3 d^3 y}{dx^3} + \frac{cx^4 d^4 y}{dx^4} + \text{etc.}$$

a mea maxime discrepat, mihiique compendia nonnulla patet, quæ ex mea methodo non tam sponte manarent. Ceterum mea methodus hoc præcipue discrepat, quod semper aequationem realē exclusis imaginariis prebeat: id quod nisi ad quantitates vel exponentiales vel a circui quadratura pendentes configere velimus, effici omnino nequit.

Et dans sa lettre du 18 octobre 1740, il ajoute :

Nuncquam ego quantum memini dixi methodum tuum integrandi hanc aequationem

$$0 = y + \frac{adx}{dx} + \frac{bd^2 y}{dx^2} + \frac{cd^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

non satis esse generalem: sed tantum dixi eam hoc laborare: incommodo, ut særissime integrale quantitatibus imaginariis involutum exhibeat. Quotiescumque autem aequationis differentialis realis inventur aequatio integralis imaginariis inquinata, roties ea in aliam formam illi quidem æquivalentem sed realē transformari potest, atque in hoc solo mea methodus a tua differt, ut mea statim illas expressiones reales pro integrali exhibeat. Quo in negotio miror te, vir celeb., integrale aequationis

$$y + \frac{cd^4 y}{dx^4} = 0$$

a me datum a tuo re vera discrepans arbitrari, cum ego tantum logarithmicarū imaginariū, quas tu invenis, statim earum valores reales per quadratū circuli expressos exhibam; eoque magis miror quod tu primus reductionem quadratū circuli ad logarithmos imaginarios et vicissim

patefeceris.<sup>4</sup> Categorice itaque, uti postulas, respondeo, me integrale æquationis

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

a me datum non solum pro vero agnoscere, verum etiam id a tuo logarithmis imaginariis constante specie tantum, non autem ipsa re dissentire. Aequa nimirum integralia nostra inter se convenient, ac istae expressiones  $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$  et  $\cdot 2 \cos Ax$ , etsi specie maxime a se invicem diversæ, existente  $A = 1$ : utraque enim expressio in seriem mutata eamdem dat seriem

$$2 \left( 1 - \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdots 6} + \text{etc.} \right).$$

Utraque etiam est valor integralis ipsius  $y$ . ex æquatione

$$d^4y + y dx^2 = 0;$$

cujus ideo si alter nostrum dicat integrale esse

$$y = e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

alter vero esse

$$y = 2 \cos Ax,$$

diversis quidem modis idem dicimus, at posterior expressio magis est intelligibilis, ex eaque facilius pro quovis ipsis  $x$  valore proposito conveniens valor ipsius  $y$  exhiberi potest. Demonstrare autem possum, quoties in integratione tua methodo instituta perveniat ad logarithmicas imaginarias, eas semper ita esse comparatas ut illarum binæ conjunctæ sinum vel cosinum cuiuspiam arcus, hoc est quantitatem realem representant; atque mea methodo statim valores hos reales loco quantitatum imaginariorum introduco.

Aussi dans une lettre, actuellement perdue, du 16 septembre 1741, EULER s'est occupé de l'intégration des équations différentielles linéaires, comme il résulte d'un passage de la lettre de JEAN BERNOULLI du 28 octobre 1741.<sup>5</sup>

Il s'ensuit des extraits rapportés ci-dessus qu'EULER avait trouvé sa méthode déjà en 1739, et que la découverte en fut faite presque inopinément (*prosesus inopinatus*). EULER relevait aussi expressément, que cette méthode différait essentiellement de celles proposées antérieurement en ce qu'elle donnait immédiatement l'intégrale complète, sans qu'on eût besoin d'intégrations successives.

Découverte de l'intégrale des équations linéaires.

49

Il convient de faire observer que, dans sa lettre du 18 octobre 1740, EULER a indiqué la formule<sup>6</sup>

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2 \cos x,$$

mais qu'il n'en ressort pas, s'il avait encore remarqué les formules

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$$

qu'on rencontre pour la première fois dans l'*Introductio in analysis infinitorum*.

Toutes les recherches d'EULER dont je viens de parler se rapportent exclusivement à des équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0;$$

le cas où le second membre n'est pas 0, mais une fonction de  $x$ , n'a été traité par EULER que dans le mémoire *Methodus nova æquationes differentiales affiorum graduum integrandi ulterius promota* publié en 1753 dans le tome III (p. 3—35) des Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae.

<sup>1</sup> Comparez la *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII<sup>e</sup> siècle, publiée par P. H. Fuss*. Tome II (St Petersbourg 1843), p. 36. La «scheda separata» dont parle JEAN BERNOULLI, n'a pas été publiée par FUSS — sans doute parce qu'il n'y avait pas recours — mais le brouillon de JEAN BERNOULLI est gardé à la Bibliothèque de l'académie des sciences de Stockholm. JEAN BERNOULLI multiplie l'équation proposée par  $x^p$  et détermine  $p$  de manière que le premier membre en puisse être immédiatement intégré. Il obtient alors une équation du  $(n-1)$ <sup>e</sup> ordre semblable à la proposée, et après  $n$  opérations successives il parvient à l'intégrale demandée.

<sup>2</sup> Comparez FUSS, I. c. II, p. 28—29.

<sup>3</sup> Comparez FUSS, I. c. II, p. 35—36, 47—48.

<sup>4</sup> EULER fait allusion ici au mémoire de JEAN BERNOULLI: *Solution d'un problème concernant le calcul integral, avec quelques abrégés par rapport à ce calcul* (Histoire de l'académie des sciences de Paris 1702; Mémoires p. 296—305).

<sup>5</sup> FUSS, I. c. II, p. 62.

<sup>6</sup> Un cas particulier de cette formule a été mentionné vers le même temps par EULER dans une lettre adressée à *Biblioteca Mathematica*. 1897.