BIHANG TILL K. SVENSKA VET. AKAD. HANDLINGAR. Band 5. N:o 21.

TROIS LETTRES INÉDITES

DE

JEAN I^ER^ BERNOULLI À LÉONARD EULER

TIRÉES

DE LA CORRESPONDANCE DE JEAN I^er^ BERNOULLI GARDÉE DANS LA BIBLIOTHÈQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE STOCKHOLM

PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

Note présentée à l'Académie Roy. d. sc. de Suède le 8 Octobre 1879.

STOCKHOLM, 1880.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER

La correspondance de JEAN Ier BERNOULLI gardée dans la bibliotèque de l'académie des sciences de Stockholm contient des copies de 8 lettres de JEAN Ier BERNOULLI à LÉONARD EULER, écrites ou corrigées par la main du premier. Cinq de ces lettres (en date du 9 Janv. 1728, du 2 Avr. 1737, du 7 Mars 1739, du 16 Avr. 1740 et du 27 Août 1742) sont déjà publiées dans la »Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle, publiée par P.-H. FUSS», mais les trois autres (en date du 18 Avr. 1729, du 17 Déc. 1729 et du 6 Nov. 1737) sont restées jusqu'à présent inédites. Comme ces lettres ne sont pas sans intérêt, nous les reproduisons ici, faisant observer seulement que le ton de supériorité, dont se sert si souvent JEAN Ier BERNOULLI dans sa correspondance, se fait sentir aussi dans les lettres suivantes. Outre le sommaire des lettres, nous n'ayons ajouté que quelques petites notes explicatives, historiques et bibliographiques.

Sommaire des lettres.

I. [1729 Avr. 18.] Quelques réflexions sur les logarithmes des quantités imaginaires. Sur l'équation

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} = x,$$

et sur une autre équation differentielle du second degré, proposée par EULER. La détermination des lignes les plus courtes, qu'on puisse tracer sur une surface donnée.

II. [1729 Déc. 17.]. Solution des équations

$$y^m \frac{d^2y}{dx^2} = qx^n \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2-p},$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = qy.$$

Sur l'équation proposée par EULER et mentionnée dans la première lettre. Sur les courbes tautochrones et isochrones. Sommation de la suite

1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, etc.

III. [1737 Nov. 6.] Le mémoire de JEAN II BERNOULLI sur la lumière. Quelques observations sur la *Mechanica* d'EULER, la *Phoronomia* de HERMANN, et les *Principia* de NEWTON. Sur le mémoire de JEAN II et DANIEL I BERNOULLI sur les ancres. Sommation des suites dont les termes generaux sont $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{2.4.6\ldots\ldots(2x-2)}{1.3.5\ldots\ldots(2x-1).2x}$. Observation sur les suites des *sinus* et des *arcustangens*. Sur une nouvelle partie du calcul infinitésimal, cultivée par EULER.

I.

Clarissimo ac Doctissimo Viro LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Debeo responsum ad binas litteras1) quas a te accepi; ad priores — — — partim jam respondi in litteris meis ad filium datis, ubi ei ostendi dubia vestra (nam et ipse similes formavit difficultates circa logarithmos imaginarios) inde tantum oriri, quod conceptus quem habuistis de logarithmis quantitatum negativarum cum rei natura non satis bene congruebat, dixique si statuatur (& recte quidem)

$$lx = l - x,$$

intelligendum esse

$$l-(x)^2),$$

non vero

$$l(-x),$$

vos autem utrumque confudisse, etiamsi magna sit inter utrumque differentia, sic. e. gr.

$$l-(x)^{\frac{1}{2}}$$

est reale quid, sed

$$l(-x^{\frac{1}{2}})$$

imaginarium. Hoc bene observato, cessant omnes vestræ difficultates & monstrosæ inde deductæ consequentiæ. Quod attinet ad scrupulum quem porro moves desumtum ex area sectoris circularis per logarithmum expressa, ubi posito sinu $= y$ & cosinu $= x$ invenitur per methodum meam quadraturam circuli ad logarithmum reducendi, area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}},$$

de eo pariter jam monui filium meum in casu quo

$$x = 0,$$

hanc aream revera exhiberi tanquam $= 0$, quamvis deberet esse $=$ quadranti, hinc autem nihil aliud concludi debere, quam quod expressio ista

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

augeri debeat quantitate constante nQ, seu multiplo quadrantis, quod vel ideo patet, quia sinus & cosinus inter se convertuntur, atque non uno tantum modo sed infinitis modis fieri potest ut sit

$$x = 0 \ \& \ y = 1,$$

vel vice versa

$$x = 1 \ \& \ y = 0;$$

nam hoc fit assumto sectore = vel $1Q$, vel $2Q$, vel $3Q$, etc. vel etiam, quando vis, $= 0Q$, adeoque nulla ratio est cur

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

unum potius exprimat quam alterum; malo itaque dicere quod area sectoris statuenda sit generaliter

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + nQ,$$

adeo ut quotiescunque pars prior in nihilum abit, id, quod deest, suppleri possit per nQ, hoc est, per multiplum, submultiplumve quadrantis, prout necessitas id exigit[3]); semper enim invenies differentiando sectoris tui differentiale quod est

$$\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}},$$

sicuti decet. In casu semiquadrantis, ubi

$$x = y = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

habebis etiam partem priorem = 0, aut si mavis

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l \sqrt{-1},$$

quocirca adjiciendum $\frac{1}{2}Q$[4]); sed hujusmodi expressiones imaginariæ usum potius habent, si in series expendantur in quibus quippe termini imaginarij se destruunt. De his satis.

Probum erit intelligere methodum, quam tibi inventam dicis ejusque communicationem promittis, reducendi hujusmodi æquationes differentio-differentiales

$$yyddy = \tfrac{1}{2}\, xdx^2,$$

existente

$$ddx = 0,$$

ad differentiales primi gradus, interim non satis capio mentem tuam de duobus aliis generibus differentio-differentialium pluribus quam duobus terminis constantibus; imprimis non video quomodo quadretur exemplum[5])

$$ddx = x^n\, Ydx^{m-n}\, dy^{2-m} + x^p\, Ydx^{q-p}\, dy^{2-q} \text{ etc.}$$

ad eas, quas innuis, æquationes, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem dimensionum numerum obtinet; unius autem dimensionis tam x quam dx & ddx dicis te ponere, cum tamen in exemplo, quod proponis, neque x, neque dx, neque ddx unius sit dimensionis nec etiam eundem dimensionum numerum obtineat. Cave autem ne in his asystata vel incompatibilia comparare inter se suscipere velis, nam e. gr. comparare velle ddx cum Ydx vel cum Ydx^3 æque absurdum est quam velle lineam invenire æqualem superficiei, sed ddx comparabile est cum Ydx^2. Ut verbo dicam comparabilia sunt tantum illa differentialia in quibus littera d ubique æqualiter reperitur, cujuscumque gradus sint differentialia, sic e. gr. ddx cum Ydx^2 vel Ydy^2 vel $Ydxdy$ vel $Y\frac{dy^3}{dx}$; et d^3x cum Ydx^3, vel Ydx^2dy, vel $Ydxddx$, vel $Y\frac{d^4x}{dy}$; atque ita in aliis. Hinc itaque primus terminus tui exempli generaliter loquendo est incomparabilis cum ddx, nam ut cum ddx subsistere possit

$$x^n\, Ydx^{m-n} dy^{2-m},$$

oportet supponere

$$m - n + (2 - m) = 2,$$

sed cum sit $= 2 - n$, vides nullam posse fieri comparationem inter ddx & hunc terminum nisi in casu quo $n = 0$; idem etiam de altero termino dicendum, quare hæc attentiori curæ tuæ commendo, ne possibilia velis facere quæ sua natura sunt impossibilia.

Venio nunc ad litteras tuas novissimas. Solutio tua[6]) problematis de ducenda linea brevissima in superficie data videtur bona. Quod ad meam[7]) attinet, ea consistit in hac æquatione

$$\frac{Tddy}{Tdzdy - zds^2} = \frac{ddz}{ds^2 + dz^2},$$

ubi notandum per x, y, z me intelligere tres coordinatas, quæ tibi sunt t, x, y, item T esse subtangentem curvæ illius datæ, quæ fit in superficie data, quando secatur per planum subjecto plano perpendiculare & ipsis y parallelum; porro per ds (quod constans suppono) intelligo elementum curvæ projectæ seu

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Possum etiam naturam curvæ quæsitæ exprimere hac æquatione

$$\frac{\Theta ddx - Tddy}{\Theta dx - Tdy} = \frac{dzddz}{ds^2 + dz^2},$$

quæ aliquando commodior est, ubi litteræ x, y, z, T idem mihi significant quod ante, & præterea Θ est subtangens alterius curvæ datæ quæ fit secando superficiem per planum priori coordinatum, h. e. ipsis x parallelum. Ex his æquationibus facile omnes casus particulares, quos solutos das, deducuntur. Non unum tantum solvendi fundamentum habeo; quantum conjicio, tuus solvendi modus nititur natura minimi, quo etiam agnatus meus feliciter usus est, & problema legitime solvit, sed hic solvendi modus non satis est generalis, ad alia quippe hujusmodi problemata sese non extendens, quale esset e. gr. hoc: Ducere in data superficie lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum osculans datam habeat inclinationem ad planum tangens superficiem datam in eodem puncto. Voco autem planum osculans quod transit per tria curvæ quæsitæ puncta infinite sibi invicem propinqua. Patet hoc problema includere prius, nam si angulus inclinationis est rectus, erit quilibet arcus curvæ quæsitæ minimus inter duo puncta sua extrema. Poteris ergo etiam vadum tentare pro hoc problemate ita generaliter concepto, ego illud pariter reduxi ad æquationem differentio-differentialem. Cæterum in applicatione quam facis æquationis tuæ ad superficiem cylindricam, qui tamen casus est omnium facillimus, posset dubium moveri utrum liceat in æquatione ad quam pervenis

$$\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

supponere

$$dxddx + dyddy = 0,$$

cum hoc nihil aliud sit quam communis divisor utriusque membri; ideoque mallem ego citra hanc suppositionem immediate integrare utrumque membrum per logarithmos, nempe sic: Assumto logarithmo constante numeri arbitrarii c habebo

$$lc + l(dx^2 + dy^2) = l(dt^2 + dx^2 + dy^2),$$

ideoque

$$cdx^2 + cdy^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2.$$

Hinc

$$\overline{c-1}\,.\,\overline{dx^2 + dy^2} = dt^2,$$

vel

$$\frac{1}{\sqrt{c-1}}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{c-1}}\,t = \int\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

prorsus ut tu invenisti. Quod enim tibi est n, id hic est $\frac{1}{\sqrt{c-1}}$. Si superficies proposita sit conoidea, cujus sectiones transversæ per planum primarium sint circuli, habeo præter methodum generalem aliam particularem pro hoc casu, quæ immediate deducit ad æquationem differentialem primi gradus, ubi indeterminatæ non sunt permixtæ, & quæ suppeditat constructionem, quam olim frater meus dedit, nescio ex quo fundamento erutam, quod quia non exhibuit, incertum est an sit legitimum, nam observavi posse perveniri etiam ad eandem illam constructionem per viam aliquam quæ est paralogistica. Interim quod attinet ad tuam pro hoc casu æquationem

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

non video, quomodo (positis $yy + xx = zz$ & $\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du$) inde sequatur

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}},$$

multo minus, quomodo hæc aliquid conferat ad constructionem curvæ quæsitæ, si quidem du est elementum ipsius curvæ & dt, dz elementa diversarum indeterminatarum[8]). Mea vero, quam habeo æquatio, in qua indeterminatæ sunt separatæ, expedit more solito constructionem per quadraturas, cujus ope in casu particularissimo globi statim videre est, lineam brevissimam in superficie sphærica esse circulum maximum. Porro si in æquatione pro solidis rotundis (quorum scilicet axis est perpendicularis ad basin, nam si est obliquus, res est altioris indaginis, quam non facile ad differentias primas reduces), ponatur $a = 0$, ita ut sit

$$xdy - ydx = 0,$$

seu $y = nx$, haud dubie dat meras (ut dicis) etiam lineas brevissimas, sed omnes nonnisi unam eandemque efficiunt, nempe eam ex cujus revolutione generatur solidum rotundum. Eas vocat frater meus in suo schediasmate *meridianos;* circulos vero, quos singula puncta in revolutione describunt — *parallelos;* corpora *conica*, quæ tu non satis apte *conoidica* vocas, sunt utique omnia illa quæ generantur ex circumductu lineæ rectæ circa curvam aliquam datam in aliquo plano & perpetuo transeuntis per punctum (quod vertex conici corporis vocatur) extra planum existens. Quæ hic habes de ducenda linea brevissima in superficiebus horum corporum conicorum sunt intricata & obscura; putat agnatus meus, cui epistolam tuam legendam tradidi, in iis aliquem paralogismum latitare [9]). Quidquid vero sit, problema pro hujusmodi superficiebus non minus quam pro simplicibus conis & cylindroidibus facillimam admittit solutionem, ita ut non egeat tam operoso quod suscipis molimine; possunt enim eæ omnes superficies transmutari in planas, ut tu ipse nunc etiam probe animadvertisti, postquam idem ego jam diu insinuavi, vid. Act. Lips. a. 1698 p. 469, ac revera hic casus nihil aliud est quam corollarium unius ex solutionibus meis generalibus, nam plures habeo. Quod superest vale & omnes amicos meos verbis saluta.

Dab. Bas. a. d. 18 Apr. 1729.

P. S. Tenta num possis problema de ducenda linea brevissima reducere ad æquationem differentialem primi gradus in superficie aliqua quæ non sit vel cylindroidica vel conoidica sed alia aliqua.

II.

Viro Cel. LEONHARDO EULERO, S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Egregia sunt quæ habuisti in binis litteris [10]) ad me postremo datis; cum autem novissimas ante paucos demum dies acceperim, brevis ero in mea responsione, atque communicabo vicissim quæ ea occasione inveni, etsi brevi admodum meditandi spatium concessum fuerit. Quod attinet ad reductionem hujus æquationis differentio-differentialis [11])

$$y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p},$$

eam tum temporis cum acciperem anteriores tuas litteras, ita obtinui: Posui statim $y = tx^a$, ut et valores ex hac suppositione prodeuntes ipsarum dy et ddy (supposito $ddx = 0$) substitui in æquatione proposita. In æquatione transmutata posui porro $dx = xzdt$, ita ut inde emergat æquatio continens nullum dx, sed quæ constet tribus indeterminatis x, t & z, quare ut eliminetur x, ponendæ sunt (te quoque ita observante) exponentes ejus dimensionum ubique æquales, & hoc modo invenitur conditio ipsius a, nempe

$$a = \frac{n+p}{m+p-1};$$

sequestratis itaque x ex singulis terminis, superest æquatio duabus tantum indeterminatis t et z constans, quæ erit tantum primi gradus. Curva ergo ei conveniens, si qua arte construi potest, dabit coordinatas z et t, ex quibus habentur valores ipsarum x et y, nimirum

$$x = c^{\int zdt}, \text{ et } y = tc^{\frac{n+p}{m+p-1}\int zdt},$$

ubi etiam c est numerus cujus logarithmus $= 1$. Fortassis non absimili modo invenisti tuum x et y, quando sumere jubes

$$x = c^{(n+p-1)\int zdt}, \text{ et } y = c^{(m+p)\int zdt}.$$

Vides tunc rem peractam per substitutiones mihi primo dudum usitatas. In casibus quibusdam particularibus possunt separari z et t, sed non sine aliqua dexteritate. Sic pro hoc exemplo, quod satis memorabile est [12])

$$xxddy = qydx^2,$$

invenio æquationem finitam hanc

$$y = bx^{(\frac{1}{2} + \sqrt{q+\frac{1}{4}})} + cx^{(\frac{1}{2} - \sqrt{q+\frac{1}{4}})},$$

ubi b et c sunt coefficientes arbitrarii, quæ omnino fit algebraica, si $\sqrt{q+\frac{1}{4}}$ est rationale. Caeterum æquatio parabolica quæ semper satisfacit, hæc est

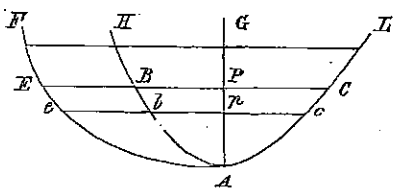
$$(n-m+1)\,y^{m+p-1} = \left(q(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p\right) x^{n+p}.$$

Licet autem illa non omnes possibiles curvas complectatur, ideo tamen non est contemnenda, quia saltem solvit æquationem propositam et quidem semper per æquationem finitam, etiam iis in casibus ubi in formula generali indeterminatæ t et z videntur inseparabiles adeo ut pro constructione parum utilitatis allatum sit, rem reduxisse ad differentias primas. Non satis intelligo in penultimis tuis litteris, quam requirant conditionem duo altera genera æquationum, in quorum prioris generis æquationibus vis ut alterutra indeterminata in singulis terminis eundem habeat dimensionum numerum, cujus exemplum quod affers, hoc est

$$ddx = Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m} + Yx^n dx^{1-n} dy^{1+n} \ \&c,$$

quam dicis *itidem esse homogeneum & in singulis terminis x unam habere dimensionem*, cum tamen utrobique x nec unam nec eandem habeat dimensionem; tertii generis exemplum, quod mentem tuam illustrare deberet, simili laborat obscuritate, præterquam quod exponentes differentialium ita se habeant & reddant quantitates heterogeneas & ideo incomparabiles; oportet itaque ut te explices clarius, si ea de re judicare debeam[13]).

Speculationes tuæ de Tautochronis mirifice quidem placent, sed illud quod proponis inveniendum, *data scilicet qualicumque curva, invenire aliam ei jungendam, per quam utramque oscillationes integræ sint isochronæ in vacuo*[14]), non admodum difficile est; nam statim ac legi e vestigio solvi adeoque non mirum est, si idem & tu & filius meus solvistis. Tota res huc redit ut ad axem AG verticalem curvæ datæ ABH constituatur arcus cycloidalis AEF, verticem habens in A, et postmodum quæritur alia curva ACL, ejus naturæ,



ut ducta quavis horizontali EC, secante curvas & axem in punctis E, B, C & P, arcus compositus BAC sit semper æqualis arcui cycloidico EA, ab eadem horizontali EC resecto vel sit ejusdem multiplex qualiscumque. Ducta enim proxima parallela ec, erit $Bb + Cc = Ee$ vel $n \times Ee$; concipiuntur jam duo mobilia cadere ex eodem horizonte FL, unum incipiens ab F, alterum ab H, habebunt illa in punctis E, B & C velocitatem æqualem, quæ est $\sqrt{GP}$; erit igitur

$$\frac{Bb + Cc}{\sqrt{GP}} = \frac{Ee}{\sqrt{GP}}, \text{ vel} = \frac{n \times Ee}{\sqrt{GP}},$$

unde tempuscula duo per Bb & per Cc simul sumta sunt = tempuscula per Ee vel hujus multiplo, ideoque tempus per arcum compositum BAC = tempori per arcum cydoid. EA vel = hujus temporis multiplo; quandoquidem igitur tempora

per singulos arcus cycloidales EA sunt æqualia, erunt etiam tempora per singulos arcus combinatos BAC æqualia h. e. oscillationes integræ (descensu et ascensu simul peragendo) sunt isochronæ etiamsi tempus per descensum sit inæquale tempori per ascensum. Quod nunc attinet ad modum id præstandi, ut duo arcus BA & AC faciant arcus unius ejusdemque curvæ continuæ BAC, & ut quæratur talis BAC quæ sit algebraica, de quo ita loqueris, quasi Tu solus id præstiteris, ita ut nesciam annon in solutione harum duarum posteriorum conditionum habueris etiam socium filium meum æque ac in priori, cujus solutionem ipsi non minus quam Tibi adscribis. Etenim hisce quoque conditionibus satisfacere haud adeo difficile deprehendes, ubi ante omnia hoc dico, in inquisitione hujus non opus esse ea quam innuis cautela, *ut nimirum in functionem tempus exprimentem nulla quantitas, quæ ab arcu descripto pendet, ingrediatur.* Quin imo ego contrarium facio, dum curvam BAC determinaturus, assumo pro longitudine arcus AB vel AC, aliquam functionem convenientem solius arcus cycloidalis AE, quæ functio id præstet, ut arcus illi duo AB et AC inde mutuo continentur ex suppositione arcus AE negative sumti; sic post superiorem meam solutionem tempus non amplius in considerationem venit; ecce ergo meam methodum: sit arcus cycloidis $AE = s$, fiatque ad lubitum aliqua ejus functio $= S$, quæ componatur ex meris potentiis ipsius s dimensionum parium. Quo facto ponatur arcus $AC = s + S$, erit utique idem ille continuatus in partem oppositam seu negative sumtus $AB = -s + S$, adeoque arcus ipse absolute seu affirmative sumtus $AB = s - S$. Hinc $AC + AB$ seu curva tota continua $CAB = 2s = 2AE$. Ergo curva CAB vel BAC erit Isochrona. Q. E. I.

Restat ut modum ostendam naturam curvæ exprimendi per æquationem inter coordinatas AP & PC, seu inter x et y ex assumta functione S, quod non est arduum. Differentietur S, voceturque $dS = Tds$; sit diameter circuli generatoris cycloidis $AEF = \frac{1}{4}a$, erit arcus AE seu $s = 2\sqrt{\frac{1}{4} . ax}$ $= \sqrt{ax}$, unde $ds = \frac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}}$ & dS seu $Tds = \frac{1}{2}Tdx\sqrt{\frac{a}{x}}$, adeoque

$$Cc = ds + dS = \frac{1+T}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}},$$

a cujus quadrato

$$\frac{1+2T+TT}{4x}adx^2$$

auferatur quadratum Pp seu dx^2, erit radix quadrata reliqui

$$dx\sqrt{\frac{a+2aT+aTT-4x}{4x}}=dy,$$

id quod dat æquationem pro natura curvæ AB, quæ ut algebraica fiat, id quidem dependet ab electione quantitatis liberæ S; sumamus ergo $S=ss:a$ utpote simplicissimam inter functiones ipsius s præscriptam conditionem habentes; eritque $dS=Tds=2sds:a=dx$, et $T=2s:a=2\sqrt{\frac{x}{a}}$; quibus substitutis in æquatione generali

$$dx\sqrt{\frac{a+2aT+aTT-4x}{4x}}=dy,$$

abit illa in hanc

$$dx\sqrt{\frac{a+4\sqrt{ax}}{4x}}=dy,$$

quæ ut commode integrari possit, scribatur tantisper (quod quidem jam supra fieri potuisset) $\frac{ss}{a}$ pro x, $\frac{2sds}{a}$ pro dx, et s pro $\sqrt{ax}$, & tunc habebitur

$$ds\sqrt{\frac{a+4s}{a}}=dy;$$

cujus integrale

$$\tfrac{1}{6}\overline{a+4s}.\sqrt{\frac{a+4s}{a}}=y+\tfrac{1}{6}a;$$

seu

$$(a+4s)^{\frac{3}{2}}=(6y+a)\times\sqrt{a};$$

resubstituto pro $4s$ ejus valore $4\sqrt{ax}$ prodibit æquatio algebraica inter coordinatas x & y, quæ hæc est

$$(a+4\sqrt{ax})^{\frac{3}{2}}=(6y+a)\times\sqrt{a}.$$

Hæc autem sublata asymmetria producit accurate tuam æquationem

$$81y^4+54ay^3-216axyy-\&c=0.$$

Coroll. Hinc patet quia diameter circuli generatoris cycloidis $=\frac{1}{4}a$, fore pendulum simplex longitudini $\frac{1}{2}a$ isochronum cum oscillatione integra per curvam BAC vel CAB. Quod ad tautochronas in medio secundum quadrata velocitatum resistente spectat, non vacavit per paucos hos dies de solu-

-tione hujus casus cogitare, verum ubi per otium licuerit, tentabo, neque de successu despero. Interim quando de tua inventa curva dicis, quod descensus per CA sibi invicem sint isochroni, pariterque etiam isochroni sint ascensus per AD, non addis, an etiam isochroni fiant regressus, h. e. descensus per DA & ascensus per AC, hoc enim omnino necessarium esset ad reciprocationem oscillationum.

Non habeo multum quod addam de progressione

1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, &c.,

de qua dicis te habere modum accurate determinandi terminos medios[15]); sed definiendum fuisset, quid per terminos medios intelligendum sit; idea enim hujus rei nimis est vaga; WALLISIUS in sua Arithmetica infinitorum adhibet suas interpolationes pro simili negatio & ni fallor eandem hanc rem jam pertractavit.

Vale. Dabam Basil. a. d. XVII. Xbr. 1729.

III.

Bas. a. d. 6 Nov. 1737.

Viro Celeberrimo atque eximio LEONHARDO EULERO Mathematico longe acutissimo S. P. D. JOHANNES BERNOULLI.

Accepi litteras tuas novissimas 27 Aug. st. vet. datas, mihi gratissimas, et paulo ante Tomos quoque Commentariorum, qui mihi defuerant, cum opere tuo incomparabili Mechanicam tractante pro quibus omnibus ingentes gratias refero; de eo postmodum aliquid dicam, postquam respondero ad alia quæ in litteris tuis habes. Ante omnia gratum fuit intelligere tibi non displicuisse filii mei JOANNIS dissertationem de lumine[16]); difficultas quam invenis in ejus modo determinandi celeritatem tam luminis quam soni qui eandem pro sono dat celeritatem, quam NEWTONUS assignavit juste utique minorem, quam quæ per experientiam deprehenditur, difficultas inquam ista jam diluitur in ipsa dissertatione, ubi origo ejus rejicitur in id quod fibra sonora consideratur ut linea recta, quæ tamen tanquam coni acutissimi duplicis in vertice sibi oppositi figuram habens consideranda fuisset, sed quæ studio non fuit adhibita, quia talis figuræ consideratio deducit ad æquationem differentialem secundi gradus, quæ ad differentias primas (ut fieri potest in suppositione lineæ rectæ) non potuit reduci in suppositione figuræ conicæ, sed simul monuit dissertationis auctor fibram, quæ haberet figuram conicam re vera daturam esse vibrationes suas longitudinales promtiores quam dat fibra linearis, id quod per approximationem ope seriei convergentis reperiretur. NEWTONUS, ad veram tarditatis causam non attendens, putavit eam consistere in extentione corpusculorum in aëre per intervalla natantium, quæ concussiones impressas in instanti transmittant ab uno diametri suæ extremo ad alterum oppositum, ita ut si cujusque corpusculi diameter ponatur $\frac{1}{8}$ vel $\frac{1}{10}$ unius intervalli, inde sequatur, majorem pro debito celeritatem (quæ per experientiam observetur) prodituram; in dissertatione vero assumitur corpuscula solida infinities majus a se invicem distare quam sit longitudo unius diametri. Tua, vir celeberrime dissertatio de sono mihi non amplius ad manus est, neque omnino memini, quomodo se habeat tua methodus determinandi celeritatem soni. — — — — .

Opus tuum mechanicum quod nuper redditum mihi est a bibliopego nitidissime compactum, refertum utique est rebus sublimibus atque arduis, tuo ingenio ac sagacitate dignis; at nondum licuit nisi perfunctorie tantum illud perlustrare. Vidi te mei quoque aliquoties mentionem facere honorificam, id quod urbanitati tuæ gratus attribuo. Præfixisti tuo operi titulum *Mechanicæ;* cujus rationem reddis in præfatione, sed nescio, annon aptius convenisset titulus *Dynamicæ;* vox enim *Mechanicæ* jam antiquitus recepta fuit pro indigitandis iis scientiis, quæ tractant de viribus mortuis, quarum scientiarum pars est quæ vocatur Statica; mihi videtur non temere et citra necessitatem esse mutanda nomina atque ad alium sensum alliganda, quando præsertim suppetunt nomina notionem tuam admodum bene significantia, quale est nomen *Dynamicæ* quod LEIBNITIUS indidit scientiæ quæ versatur circa ejusmodi vires, quæ ipsæ *vivæ* vocantur[17]). Sed hoc in transitu dictum esto. Vidi te multum quoque esse in materia quam pertractaveram in Act. Lips. anni 1713. Non dubito, quin omnia bene enucleaveris, laudas mea pro sinceritate tua, laudas etiam quæ NEWTONUS dedit in eadem materia, sed nihil dicis de ejus erroribus, quos ibi notaveram et demonstraveram, ipseque postea in nova editione Princip. Philos. ex mea admonitione partim correxit, nulla monitoris facta mentione, prolaudabili sc. Anglorum consuetudine; quosdam errores intactos reliquit aliosque de novo commisit. Perspicacia tua vir cl. tibi detexit varios lapsus in Dynamicis eosque satis graves a HERMANNO commissos, neque tamen omnes notasti, quos ego etiam animadverti tam in Commentariis vestris, quam in ipsius Phoronomia, non dubitans, multo plures adhuc superesse, si tu et ego vellemus studio adhibito in illos inquirere. Bonus HERMANNUS plerumque fuit infelix quotiescunque ex connata sua æmulatione paria vel superiora voluit præstare iis, quæ ab aliis ante ipsum inventa fuerunt; id imprimis curæ cordique habuit, ne quid a me prodiret, quod ipsius vires superare videretur.

Permitte nunc Vir clarrissime ut moneam te amice de errore quodam qui tibi elapsus videtur ex mera inadvertentia; extat ille in solutione problematis quam tradis propositione 89[18]) Tom. I. pag. 300, ubi agitur de definienda vi centripeta P in orbita mobili, quam perperam invenis exprimi hac æquatione

$$P = 2aac\left(\frac{dp}{w^2p^3dy} + \frac{w^2-1}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2p^2dy}\right),$$

differt enim tam in forma quam in valore ab ea quam jam ante 6 circiter annos singulari modo calculandi inveni et quæ hæc est (retentis tuis symbolis et nominando ds elementum orbitæ immobilis (M)(m))

$$P = 2a^2c \times \left(\frac{w^2}{y^3} - \frac{1}{pds}d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

ubi vides non ingredi dw ut in tua formula; curiosus itaque detegendi originem diversitatis examinavi attente totam tuam analysin deprehendique errorem latere in his verbis pag 302 contentis: Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim

$$v = \frac{aacv}{w^2up^2} \ (589)$$

Hæc quippe propositio quam citas ex art. 589 hic non quadrat, quando nempe ratio celeritatis angularis in curva vera ad celeritatem angularem correspondentem in orbita immobili non est constans, hoc est quando w est variabile. Nosti utique veritatem Propos. art. 589 fluere ex notissima illa proprietate quod in orbitis immobilibus, per corpora ad centrum fixum attracta descriptis tempora sint proportionalia areis sectorum circumcentralium, sed statim et levi attentione hic patet elementa horum sectorum circa centrum C factorum in curva vera non posse esse proportionalia elementis tempusculorum si nimirum w non est constans, unde male concluditur, pro hoc casu esse celeritatem in curva vera reciproce proportionalem perpendiculari ductæ ex centro virium C in tangentem MB: ut paucis dicam, in casu w variabilis, vis retrahens corpus a tangente MB directe non tendit ad centrum C, imo ad nullum centrum fixum tendit, sed habet, ut ita dicam, centrum lineare, hoc est centrum virium mutat locum pro quolibet novo elemento curvæ veræ, ut autem innotescat, quantum ex illa vi aliorsum tendente quam ad C redundet ad ipsum C centrum virium in orbita immobili, id obtinetur decomponendo more solito vim absolutam ita ut ejus pars debita dirigatur ad C, quod si rite instituatur et postea calculus dextre tractetur, prodibit mea formula

$$P = 2aac \times \left(\frac{w^2}{y^3} - \frac{1}{pds} d\left(\frac{q}{py}\right)\right).$$

quæ pro quocumque casu valet, sive w sit variabile sive constans, continens quoque ipsam vim centripetam pro orbita immobili, utpote ad quam extenditur supponendo tantum w esse $= 1$, sic enim evanescente motu angulari coincidit curva vera cum ipsa orbita immobili et formula mea generalis abit in hanc

$$P = 2aac \times \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{pds} d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

unde immediate elucet veritas propositionis NEWTONI Princ. Philos. 44 libri 1 pag. 122 Edit. secunda, quæ ita sonat: *Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in orbe eodem revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse* (supponit nempe rationem w ad 1 esse constantem). Nam si P^1 subtrahatur a P oritur statim

$$P - P^1 = 2aac \times \left(\frac{w^2 - 1}{y^3}\right)$$

hoc est existente w invariabili in triplicata ratione communis altitudinis inverse. Res est clara ex formula mea, sed demonstrationem Newtonianam propter obscuritatem non satis bene intellexi. HERMANNUS qui idem suo modo demonstrare voluit in sua Phoronomia p. 97, turpem paralogismum commisit; præterquam enim quod nullam attentionem faciat an w sit variabile an invariabile, reperiretur per ejus ratiocinium

$$P - P^1 = \left(\frac{ww - 2w + 1}{y^3}\right);$$

fons erroris et paralogismi in hoc consistit, quod admodum inepte et illicite decomponit ipsam celeritatem per bg (vid. ejus fig. 45) in duas celeritates collaterales circa centrum C, quamvis æquo jure circa quodvis alind centrum in recta bC sumtum circulatio considerari posset; præterea quis unquam sanæ mentis Geometra celeritati decompositæ cum sit tantum imaginaria vel idealis attribuit tamen affectionem realem? Quid si curva vera $ANbg$ abiret omnino in lineam rectam, ita ut corpus in illa motum, nulla vi attractum moveretur celeritate æquabili, annon eodem argumento Hermanniano sequeretur circulantem celeritatem per mg, circa centrum C, producere vim centrifugam, quæ tamen nulla esset vel in imaginatione tantum existens? Sed in his nimius sum; hoc interim monere adhuc volui, annon corrigenda sint corollaria, qua tuæ solutioni subjungis. Saltem ea quæ nituntur Propositione art. 589, male applicata ad casum ubi w est variabile, hæc omnia examinare, cum mihi ob temporis penuriam non vacet examen instituendum tibi ipsi lubens relinquo.

Gratulationem tuam cum singulari gaudio, quod testaris, consumtam ob reportata a filiis meis proemia circa Anchoras [19]) proposita gratissimo animo accepi, tibi quoque ut omnia prospere et ex vota cedant quæ suscipis, enixe apprecans.

Quæ de seriebus disseris sunt omnino pulchra atque acutissimo tuo ingenio dignissima; mirifice placet altera tua methodus summandi seriem

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.,$$

quæ in hoc consistit, ut statim ponas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right)^2,$$

ex quo post operationes aliquot pervenitur ad hanc seriem

$$1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7} + \&c = \frac{c^2}{8}$$

unde porro fluit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c = \frac{cc}{6};$$ [20])

institui ego calculum et successum habui asserto tuo prorsus conformem. Hæc altera methodus est demonstrativa adeoque priori, quæ procedit ex natura radicum in æquationibus, longe præferenda. Ad imitationem hujus aliam quoque inveni seriem eidem $\frac{cc}{8}$ æqualem nempe hanc

$$\frac{1}{1.2}+\frac{2}{1.3.4}+\frac{2.4}{1.3.5.6}+\frac{2.4.6}{1.3.5.7.8}+\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.10}+\ldots \&c=\frac{cc}{8}\,^{21}).$$

Potest esse factum, ut in præcedentibus meis litteris ex festinatione scripserim $\frac{c^6}{940}$ pro $\frac{c^6}{945}$ [22]), hæc mihi nunc non sunt præsentia.

Quando dicis te non videre, cur ista methodus nempe prior in hac serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^5 + \&c = 0$$

ad absurditatem deducat, ex eo colligo, te meam mentem non recte percepisse; volebam enim facere argumentum ad hominem contra eum, qui vellet concludere in serie sinuum ex arcubus cognoscendorum

$$x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3\ldots.7}x^7 + \&c$$

contineri præcise et necessario omnes arcus possibiles eidem sinui respondentes, nullosque alios nec imaginarios nec peregrinos; quamvis revera res ita se habeat adeoque nullam in ea æquatione esse radicem, quæ non aliquem arcum quæsitum designet, hoc ergo si necessario ex istiusmodi seriebus concludi posset, simili utique modo in altera serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \&c = 0$$

quælibet radix t daret unam et ab aliis diversam tangentem eidem arcui a respondentem, quod certe absurdissimum foret, quia una tantum tangens uni arcui respondere potest, quando infiniti arcus communem sinum habere possunt.

Quæ memoras ex nova, quam te detexisse dicis analyseos infinitorum parte [23]), sapiunt sane profundissimam meditationem, dignam utique ut excolatur; gaudeo te agnoscere me primum ejus dedisse specimen, alludis haud dubie ad schediasma meum exhibitum in Act. Lips. 1724 m. Aug. ubi ad has tuas speculationes fundamentum posui. Tuo autem opus erat ingenio, tua sagacitate ut inde tam recondita mysteria eruerentur. Vale vir celeb. mihique favere perge.

Notes.

1) Ces lettres sont en date du 10 Déc. 1728 et du 18 Fevr. 1729.

2) JEAN BERNOULLI n'a pas expliqué le sens du symbole $l-(x)$. EULER dit aussi dans sa réponse en date du 16 Mai 1729: »Discrimen, quod ponis inter $l-(x)$ et $l(-x)$ nondum percipere possum, neque quo calculo ductum ad unum potius horum logarithmorum quam ad alterum pervenire oporteat». JEAN BERNOULLI n'est pas revenu sur cette matière dans les lettres suivantes; néanmoins, il est évident que $l-(x)$ doit signifier la partie réelle du $\log(-x)$.

3) Pour comprendre le passage précédent, il faut nous souvenir de l'observation faite à la fin de la note précédente, d'où il suit que

$$l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

signifie la partie réelle de l'expression

$$\log\left(\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}\right).$$

Mais si $x=\cos\Theta$, $y=\sin\Theta$, nous aurons

$$\log\left(\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}\right)=\log\frac{\cos\Theta+i\sin\Theta}{\cos\Theta-i\sin\Theta}=\log\frac{e^{\Theta i}}{e^{-\Theta i}}=\log e^{2\Theta i}=$$
$$=(2\Theta+2k\pi)i,$$

donc, la partie réelle étant dans ce cas $=0$,

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}=0.$$

Mais pour avoir la valeur complète il faut maintenant ajouter à cette valeur l'expression

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}(2\Theta+2k\pi)\sqrt{-1}=\frac{a^2}{2}(\Theta+k\pi).$$

Pour $x=0$, $y=1$, Θ prend la valeur $\frac{\pi}{2}$, donc si $Q=\frac{a^2\pi}{4}$, on obtiendra

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}+(2k+1)Q.$$

Il faut donc suppléer la formule de JEAN BERNOULLI par la détermination que n doit être un nombre impair.

[4]) Il s'ensuit de la note précédente qu'il faut mettre ici

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}l\sqrt{-1} + \frac{aa}{2}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \left(2k + \frac{1}{2}\right)Q.$$

[5]) Dans la réponse citée, EULER mentionne qu'une erreur s'était glissée dans la transcription de l'équation, et qu'elle devait être

$$ddx = Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m} + Yx^n dx^{1-n} dy^{1+n} \text{ etc.}$$

Cf. aussi le mémoire d'EULER: Nova methodus innumerabiles æquationes differentiales secundi gradus reducendi ad æquationes differentiales primi gradus dans les Comment. Petrop. T. III p. 124—137.

[6]) Cf. le mémoire d'EULER: De linea brevissima in superficie quacumque duo quælibet puncta jungente dans les Comment. Petrop. T. III p. 110—124.

[7]) Cf. JOH. BERNOULLII Opera T. IV p. 108—128 où est rapportée une solution plus détaillée, communiquée par J. BERNOULLI à notre célèbre compatriote S. KLINGENSTIERNA et rédigée par celui-ci.

[8]) Dans la lettre en date du 16 Mai 1729 EULER déduit la valeur de du et fait voir la construction qui en résulte.

[9]) EULER répondit: Æquatio cum ea, quam alio methodo faciliori investigavi congruit, neque usquam paralogismum deprehendere potui.

[10]) Les dates de ces lettres sont du 16 Mai 1729 et du 21 21 Oct. 1729.

[11]) Cf. sur le passage suivant JOH. BERNOULLII Opera T. IV p. 79—80, et le mémoire d'EULER: Nova methodus etc. dans les Comment. Petrop. T. III.

[12]) Il faut remarquer que dans ce cas $n = -2, p = 2, m = -1$, donc

$$\frac{n+p}{m+p-1} = \frac{0}{0},$$

d'où il suit que la méthode précédente ne peut pas être immédiatement appliquée ici.

[13]) EULER répondit le 11 Juillet 1730: »Quando dico in æquatione

$$ddx = Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m} + Yx^n dx^{1-n} dy^{1+n} + \text{etc.}$$

indeterminatam x unicam dimensionem habere in singulis terminis, non tantum x sed etiam dx et ddx unam dimensionem ipsius x efficere intelligi volo. Sic in termino $Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m}$ numerus dimensionum ipsius x non est m sed $m + 1 - m$ seu 1 ut in primo termino ddx. Nescio quomodo factum est, ut æquatio tertii generis, quam perscripseram, sit absurda, puto me ita scripsisse

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} + \text{etc.} = ddy\,*$$

in qua nullam heterogeneitatem deprendere possum. Atque in ea x, y, dx, dy, ddy in singulis terminis eundem dimensionum numerum tenent nempe 1».

[14]) Cf. les mémoires d'EULER: de innumerabilibus tautochronis in vacuo dans les Comment. Petrop. T. IV p. 49—67, et: Solutio singularis casus circa tautochronismum, ibid. T. VI p. 28—36.

[15]) EULER avait trouvé par des recherches sur les tautochrones que le terme dont l'indice est $\frac{1}{2}$ devait être exprimé par $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Cf. aussi le mémoire d'EULER: de progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt dans les Comment. Petrop. T. V p. 36—57.

[16]) Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment se fait la propagation de la lumière, mémoire de JEAN II BERNOULLI, couronné par l'académie des sciences de Paris en 1736.

[17]) Dans la réponse du 10 Déc. 1737 EULER admet »dynamicæ nomen esse convenientius», et il ajoute: »optarem eo usum esse, sed tum temporis in mentem id mihi non venit».

[18]) EULER répondit dans sa lettre du 10 Déc. 1737: Cum istam propositionem attentius inspexissem, inveni casum, quem ego tracto, prorsus diversum esse ab eo, quem tibi, vir celeb., tractasse videbar. Non enim quæro vim centripetam, quæ faciat, ut corpus in orbita mobili eodem modo moveatur quo in immobili ad idem centrum attractum moveretur, quo casu solutio mea utique erronea esset. — — — In propositione vero 89 motum in orbita immobili tanquam incognitum specto, neque eum leges vis centripetæ sequi pono.

* L'équation donnée par EULER dans la lettre en date du 16 Mai 1729 est

$$ax^m y^n dx^p dy^q ddy + bx^r y^{m+n-r} dx^s dy^{p+q-s} ddy + \text{etc.} =$$
$$= cx^t y^{m+n-1-t} dx^v dy^{p+q+1-v} + \text{etc.}$$

19) DANIEL I et JEAN II BERNOULLI avaient remporté en 1737 le prix de l'académie des sciences de Paris, la question proposée étant celle-ci: *Quelle est la figure la plus aventageuse qu'on puisse donner aux ancres?*

20) EULER avait communiqué cette méthode dans sa lettre du 27 Août 1737.

21) Cf. sur le passage précédent JOH. BERNOULLII Opera T. IV p. 20—25 et le mémoire d'EULER: de summis serierum reciprocarum dans les Comment. Petrop. T. VII p. 123—134.

22) La série en question était

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots\ldots = \frac{c^6}{945}.$$

23) Dans la lettre citée du 27 Août 1737, EULER donne quelques renseignements sur cette analyse: Hac nova analysi, dit-il, tales requiruntur formularum differentialium indeterminatarum determinationes, ut earum integratio vel algebraice succedat vel a data quadratura pendeat; ita in problemate a te soluto posita abscissa x et applicata $\int pdx$ requiruntur valores pro p et x ut $\int pdx$ fiat quantitas algebraica, at $\int dx\sqrt{1+pp}$ a data quadratura pendeat. Cf. aussi le mémoire d'EULER: de curvis rectificabilibus algebraicis dans les Comment. Petrop. T. V p. 169—174.

BIHANG TILL K. SVENSKA VET. AKAD. HANDLINGAR. Band. 5. N:o 22.

EVERTEBRATFAUNAN I SIBIRIENS ISHAF.

FÖRELÖPANDE STUDIER GRUNDADE PÅ DE ZOOLOGISKA UNDERSÖKNINGARNA UNDER PROF. A. E. NORDENSKIÖLDS ISHAFS-EXPEDITION 1878—79.

AF

ANTON STUXBERG.

(MED EN KARTA.)

MEDDELADT DEN 12 NOVEMBER 1879.

STOCKHOLM, 1880.
KONGL. BOKTRYCKERIET
P. A. NORSTEDT & SÖNER.