IX.

De oscillationibus annulorum elasticorum.

§ 1. (Fig. 154.) Si habeatur annulus $ADBEA$ elasticus, eique alicubi impetus imprimatur, mutabit is formam circularem, sed rursus, ob elasticitatem, se restituet, verum nimis, et ita oscillationes peraget. Hac dissertatione constitui oscillationes hasce persequi, et tempora earum ex legibus mechanicis determinare; quo facto, fundamenta quasi erunt jacta ad oscillationes campanarum pulsarum aliorumque corporum definiendas.

§ 2. Annulo hoc alicubi pulso, curvatura ibi minuetur, in alio loco augebitur, et ita figuram induet quamproxime ovalem. Sit (Fig. 155.) annulus $ADBE$, quem nunc tantum peripheria circuli indigito; is si in A pulsetur, punctum A abibit in a, et B in b; puncta vero D et E in d et e, eritque annuli figura tum $adbea$, quam habebo pro elliptica. Talis autem debet esse haec ellipsis, ut ejus peripheria circuli peripheriae aequetur; id quod fiet, si ejus axis transversus tantum superet diametrum circuli, quantum haec diameter superat axem conjugatum, in excursionibus nimirum quamminimis, ut Aa, Bb pro infinite parvis haberi queant.

§ 3. Annulus hoc in situ constitutus, sicut chorda pulsa, se conabitur restituere, et quemadmodum ibi quaevis particula vi tendit in statum naturalem, quae est ut distantia ab eodem: simili modo in nostro casu res se habebit, ut, quo una particula longius distat a circulo, eo fortius ea tendat ad eundem. Sed prosequor haec accuratius, ut pateat, quanta vi singulae particulae sollicitentur.

§ 4. (Fig. 156.) Sit $AabB$ portio infinite parva annuli; consideretur ea bipartita linea Ee. Dum annulus pulsatur, acquirat haec portio majorem curvaturam, ut $AaebB$, sitque arcus aeb aequalis in sup., fig. arcui aeb; tum ergo arcus AB major erit sup. AB; quapropter particulae $AaeE$ et $BbeE$, quae erunt contiguae, nunc abibunt in $AaeE$ et $Bbe\varepsilon$, dehiscentes angulo $Ee\varepsilon$, qui hoc modo invenietur: Sit radius circuli $Ca = a$, in inferiore figura $ac = b$, sitque $Aa = c$ et $ab = ds$; erit in superiore figura $AEB = \frac{(a+c)ds}{a}$, in inferiore $AE\varepsilon B = \frac{(b+c)ds}{b}$, unde $E\varepsilon = \frac{(a-b)cds}{ab}$, ergo ang. $Ee\varepsilon = \frac{(a-b)ds}{ab}$.

§ 5. Ut conetur se restituere majoremque curvaturam induere, porro particulas $AacE$ et Bbe conjunctas esse filamentis elasticis, quae quo magis dilatentur, eo majorem habeant vim se contrahendi. Angulus ergo $Ee\varepsilon$ plenus est hujusmodi filamentis transversaliter dispositis, quae conantur latera Ee et εe conjungere, et a vi horum filorum dependet cohaesio partium materiae, ex qua annulus est fabricatus. Sit haec cohaesio partium seu filamentorum vis tanta, ut (Fig. 157) series $FG = f$ et extensa ad $FJ = g$ possit pondus P sustentare.

§ 6. (Fig. 157.) Sit ergo angulus $Ee\varepsilon$, in quo $Ee = e$ et $E\varepsilon = \frac{(a-b)\,e\,ds}{ab} = dt$. Accipiatur $eM = x$ et $Mm = dx$, erit spatiolum $MmnN$ plenum filamentorum. Quaeritur ergo quanta vi Mm ad Nn trahatur. Hoc modo infero: Series filorum longitudinis f sustentat pondus P; ergo longitudinis dx sustentat pondus $\frac{P\,dx}{f}$. Dein filamenta haec ad g extensa sustentant pondus $\frac{P\,dx}{f}$; ergo ad Mn $\left(\frac{x\,dt}{e}\right)$ extensa, pondus $\frac{Px\,dx\,dt}{efg}$. Ergo pondus in E et ε applicandum eadem vi coërcens latera Ee et εe, erit $\frac{Pxx\,dx\,dt}{eefg}$. Consequenter pondus in E et ε applicandum, aequali vi coërcens latera Ee et εe ac omnia filamenta simul, est

$$= \text{pond.}\ \frac{Pe\,dt}{3fg} = \frac{Pee\,(a-b)\,ds}{3abfg}.$$

§ 7. Sit (Fig. 158) M punctum ellipseos, in quam abit circulus in quo maxima curvatura; erit CM semiaxis transversus, dicatur is $a+\omega$; erit semiaxis conjugatus $= a-\omega$, ergo radius osculi in $M = \frac{aa-2a\omega+\omega\omega}{a+\omega}$. Descendat M in m, ut sit $Mm = dz$; erit tum $Cm = a+\omega-dz$ et radius osculi in $m = \frac{(a-\omega+dz)^2}{a+\omega-dz}$. Quod ergo ante erat $E\varepsilon = \frac{(a-b)\,e\,ds}{ab}$, nunc habetur, si loco b substituatur $\frac{(a-\omega)^2}{a+\omega}$, pro M; sed pro m, si fiat $b = \frac{(a-\omega+dz)^2}{a+\omega-dz}$. Quaeratur ergo differentia inter $E\varepsilon$ ad M et $E\varepsilon$ ad m pertinens, et ea invenitur $= \frac{(a+3\omega)\,e\,dz\,ds}{(a-\omega)^3}$. Inveniatur jam vis, M directe ad C trahens et aequipollens vi, qua elementa coarctantur; sit illa $= Q$; oportet ut sit $Q\,dz =$ illi ductae in $\frac{(a+3\omega)\,e\,dz\,ds}{(a-\omega)^3}$. Est autem illa vis $= \frac{Pee\,(a-b)\,ds}{3abfg}$, et $b = \frac{(a-\omega)^2}{a+\omega}$, ergo

$$a-b = \frac{3a\omega-\omega\omega}{a+\omega}.$$

Cum autem ω sit infinite parvum respectu a, erit $b = a$ et $a-b = 3\omega$, ut ergo sit

$$Q\,dz = \frac{Pee\omega\,ds}{aafg}\cdot\frac{e\,dz\,ds}{aa}, \quad \text{consequenter} \quad Q = \frac{Pe^3\omega\,ds^2}{a^4fg}.$$

§ 8. Haec autem vis se exerit in elementum annuli $AabB$ (vid. fig. § 4), quod est $e\,ds$, et istud elementum oscillationes efficiet, dum reliqua elementa, a similibus potentiis, quae semper sunt, ut distantia a statu aequilibrii sollicitata, oscillationes eodem tempore peragunt. Requiritur vero pondus elementi $e\,ds$. Cum autem mera superficies nullum pondus habere queat, et crassities nondum in computum sit ducta, pono crassitiem tam annuli, quam (§ 5) fasciculi filorum $FJHG$ esse $= 1$, id quod calculum hucusque institutum non mutabit. Sit ergo materia annuli talis, ut moles e^3 ponderet A, erit pondus elementi $e\,ds = \frac{Ae\,ds}{e^3}$.

§ 9. Incipiat ergo hoc elementum oscillationem (Fig. 159) a puncto C, sitque status aequilibrii in A, pervenerit illud in M, sitque ibi velocitas tanta, quanta ex altitudine v acquiri potest. Sit $MA = \omega$, et $Mm = -d\omega$. Altitudo ea, velocitatem in m producere valens $v + dv$ fiat ut $\frac{Acds}{e^3} : -d\omega = \frac{Pc^3\omega ds^2}{a^4 fg} : dv$, erit ergo

$$dv = \frac{-Pc^2e^3\omega\, d\omega\, ds}{Aa^4 fg}.$$

Quamobrem longitudo penduli isochroni erit $= \frac{Aa^4 fg}{Pc^2e^3 ds}$. Unde sequitur, ob ds in denominatore, has oscillationes fore infinitae durationis. Quod etiam revera ita se haberet, si tenacitas talis esset, ut pondus P posset dictum § 5 fasciculum filamentorum ad distantiam g finitam extendere. Sit ergo haec distantia g infinite parva et $= ds$; erit longitudo penduli isochroni $= \frac{Aa^4 f}{Pcce^3}$. Ne autem fasciculus filorum eandem habeat crassitiem cum annulo, pono illius crassitiem esse $= h$, posseque dein sustentare pondus B; erit $P = \frac{B}{h}$; unde longitudo penduli isochroni $= \frac{Aa^4 fh}{Bcce^3}$.

§ 10. Cum in hac penduli expressione, quia est homogenea, amplius non contineatur unitas exprimens crassitiem annuli, unde conficitur, oscillationes non a crassitie dependere, sed omnes annulos ejusdem materiae et ejusdem diametri a, et in quibus e idem est, quantumvis ii sint crassi, easdem edere oscillationes. Quanquam autem id in tubis longioribus et angustis minus apparet, attribui id oportet ei, quod tum sonos edant, seu oscillationes conficiant non quatenus sunt ex annulis compositi, sed ut omnia fere corpora pulsa sonos edunt, ita et ii sonos edent, non a dictis circumstantiis dependentes, sed quatenus fere sint cylindri, in quibus ad soni productionem longitudo aliquid facit; sonus autem horum plane diversus est a sono eo, quo expositum est modo producto.

§ 11. Tempora ergo oscillationum sunt ut $\sqrt{\frac{Aa^4 fg}{Bcce^3}}$, seu ut $\frac{aa}{c}\sqrt{\frac{Afg}{Be^3}}$, et soni ut $\frac{c}{aa}\sqrt{\frac{Be^3}{Afg}}$. In annulis ergo ejusdem materiae, ubi A, B, f, e et g eaedem manent, soni sunt ut $\frac{c}{aa}$, nempe in ratione simplici distantiae peripheriae exterioris ab interiore, et reciproca duplicata radii peripheriae interioris. Unde in annulis similibus, in quibus c est ut a, soni sunt reciproce ut diametri annulorum, seu in ratione subtriplicata ponderum. Hinc excipio casum, quo a valde est parvum, vel plane evanescit, et proin annulus abit in discum, qui sonum infinite acutum edere deberet; sed tum sonum non edit, quatenus est annulus, sed ut corpus quodlibet aliud. Sonus vero hic, ut facile patet, valde discrepat a sono, ab annulo exposito modo oscillante edito.

Scriptura ad marginem cum fig. 160. Ergo quo campana tota eundem sonum edat, debet esse Mm ut PM^2.