VII.

De motu corporum in tubis circa punctum fixum mobilibus.

Problema I. (Fig. 146.)

1. Moveatur tubus rectus AB uniformiter circa punctum fixum O, in quo versetur corpus M a nullis viribus sollicitatum, invenire hujus corporis motum in tubo.

Solutio. Quia tubus AB motu uniformi circa punctum fixum O gyratur, sit ejus celeritas in data a polo O distantia f; debita altitudini c; tum ex O in tubum demittatur perpendiculum OA, quod cum maneat perpetuo ejusdem longitudinis, ponatur $OA = a$. Pervenerit post aliquod tempus tubus in situm AB, tumque versetur corpus, cujus massa $= A$, in puncto M, ubi sit ejus celeritas debita altitudini v, quam habet secundum tubi longitudinem. Ducatur OM, et sit $OM = z$, $AM = x$; ut sit $zz = aa + xx$; erit ergo celeritas angularis tubi in puncto M debita altitudini $\frac{czz}{ff}$, qua punctum M tempusculo dt convertetur per arculum $Mn = \frac{zdt}{f}\sqrt{c}$. Corpus ergo A in M duplicem habet motum, alterum secundum directionem tubi ML cum celeritate $\sqrt{v}$, alterum secundum tangentem MN arculi Mn cum celeritate $= \frac{z\sqrt{c}}{f}$. Si igitur corpus sibi esset relictum, priori motu perveniret tempusculo dt in L, existente $ML = dt\sqrt{v}$; altero motu ex L in J perducetur, existente $LJ = \frac{zdt\sqrt{c}}{f}$, eritque LJ ipsi MN parallela et aequalis; quia est $MN = Mn$. Existet ergo corpus post tempusculum dt in puncto J, unde a vi restituente in tubum reduci debet per spatiolum Jm ad tubum normale. Cum autem sit $Nn = \frac{MN^2}{2OM} = \frac{czdt^2}{2ff}$; concipiatur ex N in directionem tubi ab, quam ob motum proprium post tempusculum dt habebit, ductum perpendiculum No, erit ob triangula similia Nno et Ona seu OMA,

$$No = \frac{a}{z} \cdot \frac{czdt^2}{2ff} = \frac{acdt^2}{2ff} \quad \text{et} \quad no = \frac{x}{z} \cdot \frac{czdt^2}{2ff} = \frac{cxdt^2}{2ff}.$$

Tum vero quia angulus, quem NJ cum directione tubi ab facit, est infinite parvus, erit $mo = NJ$

Quare corpus in tubo tempusculo dt ultra spatium $ML = om = dt\sqrt{v}$, quod ejus celeritati convenit, confecit spatiolum $no = \frac{cx\,dt^2}{2ff}$; ex quo in tubo perinde movetur, ac si acceleraretur a vi acceleratrice $= \frac{2cx}{ff}$. Deinde quia angulus, quem NJ cum ab constituit, est aequalis angulo

$$MOn = \frac{Mn}{OM} = \frac{dt}{f}\sqrt{c},$$

erit

$$Jm + No = NJ \cdot \frac{dt}{f}\sqrt{c} = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f}, \quad \text{ideoque} \quad Jm = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f} - \frac{acdt^2}{2ff};$$

hinc ad spatiolum Jm tempusculo dt absolvendum opus est vi acceleratrice $= \frac{4\sqrt{cv}}{f} - \frac{2ac}{ff}$, a qua pressio, quam tubus a corpore sustinet, proficiscitur; eritque adeo haec pressio $= A\left(\frac{4\sqrt{cv}}{f} - \frac{2ac}{ff}\right)$. Quia ergo corpus in tubo acceleratur vi $= \frac{2cx}{ff}$, dum spatiolum in tubo $ML = ds = dx$ absolvit, erit $dv = \frac{2cx\,dx}{ff}$; hincque integrando $v = \frac{cxx}{ff} + b$, siquidem ponamus corpus in A, ubi $x = 0$, celeritatem in tubo habuisse debitam altitudini b. Q. E. I.

2. **Coroll. 1.** Dum igitur tubus motu aequabili circa polum O rotatur, corpus in eo motu accelerato promovetur, ita ut habeat in puncto A celeritatem minimam $\sqrt{b}$, quae deinde sit eo major, quo magis ab hoc puncto A recedat.

3. **Coroll. 2.** Si valor ipsius v inventus in pressione, quam tubus sustinet a corpore in directione MP ad tubum normali, substituatur, reperietur pressio $= \frac{A}{ff}\left(4\sqrt{(bcff + ccxx)} - 2ac\right)$. Quando ergo corpus in A versatur, erit pressio $= \frac{2A}{ff}(2f\sqrt{bc} - ac)$, quae erit nulla si $2f\sqrt{b} = a\sqrt{c}$, seu $\sqrt{b} = \frac{a\sqrt{c}}{2f}$, et negativa si $\sqrt{b} < \frac{a\sqrt{c}}{2f}$.

4. **Coroll. 3.** Tempus autem, quo corpus spatium $AM = x$ absolvit, erit $= \int \frac{f\,dx}{\sqrt{(bff + cxx)}}$, ideoque per logarithmos exprimitur. Hinc autem patet, si corpus in A celeritatem habuerit nullam, ut sit $b = o$, tum corpus nunquam ex A esse exiturum, sed perpetuo ibidem esse mansurum.

5. **Coroll. 4.** Si tubus in plagam oppositam rotetur, tum solutio praesens ad hunc casum accommodabitur si loco $\sqrt{c}$ scribatur $-\sqrt{c}$, hocque casu pressio tendet in plagam oppositam, eritque $= A\left(\frac{4\sqrt{cv}}{f} + \frac{2ac}{ff}\right)$.

Problema 2. (Fig. 147.)

6. Moveatur tubus curvilineus AMB motu uniformi circa punctum fixum O, in eoque versetur corpus massam habens $= A$, quod a viribus quibuscunque sollicitetur, invenire ejus motum in tubo.

Solutio. Pervenerit post tempus t, tubus in situm AMB motu rotatorio, cujus in distantia a polo $= f$ celeritas debita sit altitudini c, atque hoc tempore corpus versetur in M, ubi habeat celeritatem secundum directionem tubi debitam altitudini v. Ducatur ad M tangens TML, in quam ex polo O demittatur perpendiculum OT, et vocetur $OM = z$, $MT = x$ et $OT = y$, ut sit

$zz = xx + yy$. Sollicitetur corpus in M a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali secundum $ML = T$, et altera normali secundum $MP = N$; sitque radius osculi curvae in M nempe $MR = r = \frac{zdz}{dy}$. Concipiatur nunc corpus intervallo tempusculi dt liberum, atque ob motum, qui ipsi in tubo inerat, una cum vi tangentiali T transferetur in L, ut sit $ML = dt\sqrt{v} + \frac{Tdt^2}{4}$, ob motum vero cum tubo communem, secundum directionem LJ parallelam ipsi MN, quae est ad OM normalis, transferetur per $LJ = \frac{zdt\sqrt{c}}{f}$; est enim celeritas rotatoria puncti $M = \frac{z\sqrt{c}}{f}$. Denique ob vim normalem ex J pertrahetur in r, existente Jr normali MP parallela, ut sit $Jr = \frac{Ndt^2}{4}$; reperietur ergo corpus tempusculo dt elapso in r, si esset liberum. Tubus vero interea circa polum O gyrabitur per angulum MOn, et punctum M absolvet arculum $Mn = \frac{zdt\sqrt{c}}{f} = MN$, sicque tubus habebit situm anm. Producatur rJ donec tubo occurrat in m, erit $mq = \frac{nq^2}{2r} = \frac{ML^2}{2r} = \frac{vdt^2}{2r}$, ob differentiam inter $dt\sqrt{v}$ et nq infinite parvam. Ducatur ad n tangens curvae tnq, in eamque ex O demittatur perpendiculum Ot, erit utique $On = OM = z$; $tn = TM = x$ et $Ot = OT = y$. Deinde erit $Nn = \frac{MN^2}{2OM} = \frac{czdt^2}{2ff}$; et si ex N ad nq demittatur perpendiculum No, ob triangula Nno et Ont similia habebitur $no = \frac{cxdt^2}{2ff}$ et $No = \frac{cydt^2}{2ff}$, verum NJ et ipse arcus om aequalis erit spatio ML. Jam opus erit vi restituente, quae corpus ex r transferat in tubi punctum m, quae erit $= \frac{4A.rm}{dt^2}$. Quia ergo corpus in tubi punctum m pervenit, interea in tubo confecisse censendum est spatium nm, quod spatium $ML = dt\sqrt{v}$ superat particula $no = \frac{cxdt^2}{2ff}$; ideoque praeter vim tangentialem T in tubo acceleratur vi $= \frac{2cx}{ff}$. Postea quia inclinatio rectae NJ ad nq aequalis est angulo $MOn = \frac{dt\sqrt{c}}{f}$, erit

$$qJ + No = NJ \cdot \frac{dt\sqrt{c}}{f} = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f}, \quad \text{ideoque} \quad qJ = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f} - \frac{cydt^2}{2ff}.$$

Quare cum sit $qm = \frac{vdt^2}{2r}$, erit

$$Jm = \frac{vdt^2}{2r} + \frac{cydt^2}{2ff} - \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f}, \quad \text{atque} \quad rm = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{vdt^2}{2r} + \frac{cydt^2}{2ff} - \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f};$$

unde erit pressio corporis in latera tubi secundum directionem normalem

$$MP = A\left(N + \frac{2v}{r} + \frac{2cy}{ff} - \frac{4\sqrt{cv}}{f}\right).$$

Tota autem vis accelerans in tubo erit $= T + \frac{2cx}{ff}$; quare si corpus tempusculo dt in tubo spatiolum ds absolvere ponatur, erit $dv = Tds + \frac{2cxds}{ff}$, eritque $ds = \frac{zdz}{x}$; ita ut habeatur $dv = Tds + \frac{2czdz}{ff}$. Inventa autem celeritate corporis in tubo $\sqrt{v}$, habebitur ejus pressio in latera tubi. Q. E. I.

Problema 3. (Fig. 148.)

7. Circumferatur tubus curvilineus AMB circa polum O motu quocunque inaequabili, sollicitatus scilicet ad motum a vi quacunque acceleratrice, atque in hoc tubo versetur corpus massam habens $= A$, quod pariter a viribus quibuscunque sit sollicitatum, invenire motum hujus corporis in tubo

Solutio. Pervenerit post aliquod tempus tubus in situm AMB, ubi ejus motus rotatorius sit tantus, ut distantiae f a polo O respondeat celeritas debita altitudini u, in hac autem distantia f motus rotatorius capiat accelerationem momentaneam a vi acceleratrice S oriundam. Versetur hoc tempore corpus in tubi loco M, ad quem ducta tangente TL, in eamque ex O perpendiculari OT, itemque radio OM, vocetur $OM = z$, $OT = y$, et $MT = x$, erit utique $zz = xx + yy$, atque si curvae in M ponatur radius osculi $MR = r$, erit $r = \frac{zdz}{dy}$. Sit autem celeritas, quam corpus habet in tubo secundum directionem tangentis ML debita altitudini v, simul vero sollicitetur a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali secundum ML quae sit $= T$, altera normali secundum MP quae sit $= N$; ad hujusmodi enim duas vires cunctas vires reduci posse constat. Concipiatur jam corpus A per punctum temporis dt a tubo sejunctum, ut libere sollicitationes sequi possit, ac primo ob motum cum tubo communem absolvet in normali MN ad OM spatium $MN = \frac{zdt\sqrt{u}}{f}$. Deinde ob motum insitum $\sqrt{v}$ et vim tangentialem T conjunctim ex N secundum NJ parallelam tangenti ML, perducetur per spatium $NJ = dt\sqrt{v} + \frac{Tdt^2}{4}$. Denique ob vim normalem N ex J deducetur per spatium $Jr = \frac{Ndt^2}{4}$, existente Jr normali MP parallela; ideoque si corpus sibi esset relictum, elapso tempusculo dt reperiretur in puncto r. Ipse autem tubus interea ob motum insitum circa polum O ita convertetur, ut ejus punctum M transferatur per arculum radio OM descriptum $Mn = \frac{zdt\sqrt{u}}{f}$, ob vim ejus acceleratricem vero S ultra n in v traducetur, ut sit $nv = \frac{Szdt^2}{4f}$; quare tubus perveniet in situm $a\nu b$, ejusque punctum M in punctum ν, ita ut si ducatur ad ν tangens $t\nu q$, in eamque demittatur ex O perpendiculum Ot, futurum sit ut ante $O\nu = z$, $Ot = y$ et $t\nu = x$. Producatur radius On, ut secet normalem MN in N et tangentem $t\nu q$ in μ, erit ut ante vidimus

$$Nn = \frac{MN^2}{2OM} = \frac{zudt^2}{2ff};$$

tum vero ob triangula $\mu\nu n$ et νOt similia erit

$$\mu\nu = \frac{z}{y} \cdot n\nu = \frac{Szzdt^2}{4fy} \quad \text{et} \quad n\mu = \frac{x}{y} \cdot n\nu = \frac{Sxzdt^2}{4fy},$$

hinc erit

$$N\mu = \frac{Sxzdt^2}{4fy} - \frac{zudt^2}{2ff}.$$

Ex N ad νq demittatur perpendiculum No, erunt triangula μNo et νOt similia, ac propterea

$$No = \frac{y}{z} \cdot N\mu = \frac{Sxdt^2}{4f} - \frac{yudt^2}{2ff}, \quad \text{et} \quad o\mu = \frac{x}{z} \cdot N\mu = \frac{Sxxdt^2}{4fy} - \frac{xudt^2}{2ff},$$

hincque

$$\nu o = \frac{Sydt^2}{4f} + \frac{xudt^2}{2ff},$$

ob $zz - xx = yy$; erit vero $oq = NJ = ML$, inclinantur enim NJ et oq ad se invicem angulo infinite parvo

$$= MO\nu = \frac{M\nu}{MO} = \frac{dt\sqrt{u}}{f} + \frac{Sdt^2}{4f},$$

cujus sinus cum sit ipsi angulo aequalis, erit

$$Jq - No = \frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}$$

omissis ipsius dt potestatibus altioribus, utpote infinities minoribus. Hinc erit

$$Jq = \frac{Sxdt^2}{4f} - \frac{yudt^2}{2ff} + \frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}.$$

Secet perpendicularis Jr curvam in puncto m, erit

$$qm = \frac{vq^2}{2r} = \frac{vdt^2}{2r},$$

ideoque
$$mr = rJ - Jq + qm = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{vdt^2}{2r} - \frac{Sxdt^2}{4f} + \frac{yudt^2}{2ff} - \frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}.$$

Cum igitur corpus ex r in m tempusculo dt reduci debeat, requiritur ad hoc vis motrix

$$= A\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2yu}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right),$$

tantam ergo pressionem corpus in tubum exeret secundum directionem normalis MP. Quoniam vero post tempusculum dt corpus in m pervenit ultra spatium om, quod ejus motui et vi tangentiali convenit, confecisse censendum est spatium $vo = \frac{Sydt^2}{4f} + \frac{xudt^2}{2ff}$, quare praeter vim tangentialem T sollicitari putandum est in tubo vi acceleratrice $\frac{Sy}{f} + \frac{2xu}{ff}$. Hanc ob rem si spatium, quod corpus in tubo tempusculo dt absolvit, ponatur $= ds = \frac{zdz}{x}$, erit

$$dv = Tds + \frac{Syds}{f} + \frac{2xuds}{ff} = Tds + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Syds}{f}.$$

Tum vero ob accelerationem tubi a vi S, si ponatur punctum tubi, quod a polo O intervallo $= f$ distat, tempusculo dt percurrere arculum $= d\sigma$, erit $du = Sd\sigma$, unde primum u seu tubi celeritas in quovis situ determinabitur. Deinde ob $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{u}} = dt$ definietur celeritas tubi $\sqrt{v} = \frac{ds\sqrt{u}}{d\sigma}$, qui valor in superiore aequatione $dv = Tds + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Syds}{f}$ substitutus, dabit relationem inter s et v, sicque ad quodvis tempus situs tubi, locus corporis in eo et utriusque celeritas innotescet. Q. E. I.

8. **Scholion.** Assumsimus in his propositionibus motum tubi a pressione corporis in illo moti omnino non affici, sicque in duabus prioribus tubo motum tribuimus uniformem, in hac posteriori autem motum talem, qualis a vi S tubum sollicitante oriri debet. Scilicet hactenus massam seu vim inertiae tubi tanquam infinitam prae massa corporis A spectavimus, nunc autem rationem finitam statuamus inter massam tubi et massam corporis A, quo fiet, ut non solum motus tubi a pressione corporis perturbetur, sed etiam ipsius corporis motus in tubo alius proveniat, atque hic est determinatus.

Problema 4. (Fig. 148.)

9. Gyretur tubus curvilineus AMB, circa polum fixum O sollicitatus, a viribus quibuscunque, cujus massa seu inertia sit $= M$, in eo autem versetur corpus massam habens $= A$, pariter a viribus quacunque sollicitatum; determinare motum tam tubi, quam corporis in eo inclusi.

Solutio. Sit, ut ante, tubi in situ AMB versantis celeritas rotatoria in distantia f a polo O debita altitudini u, atque in hac eadem distantia acceleretur a vi acceleratrice $=S$. Versetur corpus in hoc tubi situ in M, ubi habeat motum in tubo cum celeritate debita altitudini φ, secundum directionem tangentis ML; praeterea autem sollicitetur a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali secundum ML, quae sit $=T$, altera normali secundum MP, quae sit $=N$. Demittatur ex O in tangentem perpendiculum OT, sitque $OM=z$, $OT=y$ et $MT=x$. Corpus igitur habebit duplicem motum, alterum proprium in tubo in directione ML cum celeritate $=\sqrt{\varphi}$, alterum cum tubo communem in directione MN ad radium OM normali, cum celeritate, quae se habeat ad celeritatem angularem $\sqrt{u}$ in distantia f uti $OM=z$ ad f, erit ergo corporis celeritas secundum directionem $MN=\frac{z}{f}\sqrt{u}$. Concipiatur nunc primum corpus a tubo non contineri, sed perinde ac si tubus abesset moveri posse, atque id tempusculo dt primum ob motum secundum MN deducetur per spatium $MN=\frac{zdt\sqrt{u}}{f}$, tum ex N ob motum secundum ML et vim tangentialem T traducetur in J, ut sit $NJ=dt\sqrt{\varphi}+\frac{Tdt^2}{4}$, et NJ parallela ipsi ML. Denique ob vim normalem N corpus ex J in r deferetur, ut sit $Jr=\frac{Ndt^2}{4}$, eritque adeo tempusculo dt praeterlapso locus corporis in r. Ipse autem tubus interea ob motum insitum gyrabitur per angulum MOn, ut sit arculus $Mn=\frac{zdt\sqrt{u}}{f}$, praeterea vero ob accelerationem a vi S oriundam conficiet particulam $n\nu=\frac{Szdt^2}{4f}$; ita ut nunc tubus teneat situm $a\nu b$, et punctum M in ν pervenerit. Ducatur in ν tangens $t\nu q$, quae rectam $J\nu$ secet in q, curva autem $a\nu b$ hanc rectam secet in m. Ex N in νq demittatur perpendiculum No, erit ut ante ostendimus

$$No=\frac{Sxdt^2}{4f}-\frac{uydt^2}{2ff} \quad \text{et} \quad \nu o=\frac{Sydt^2}{4f}+\frac{uxdt^2}{2ff};$$

ideoque

$$\text{arcus } \nu m=dt\sqrt{\varphi}+\frac{Tdt^2}{4}+\frac{Sydt^2}{4f}+\frac{uxdt^2}{2ff},$$

et si curvae in M ponatur radius osculi $MR=r$, erit recta

$$rm=\frac{Ndt^2}{4}+\frac{\varphi dt^2}{2r}-\frac{Sxdt^2}{4f}+\frac{uydt^2}{2ff}-\frac{dt^2\sqrt{\varphi u}}{f}.$$

Si igitur corpus non esset in tubo inclusum post tempusculum dt, tubus teneret situm $a\nu b$ et corpus foret in r; quamobrem vis erit concipienda in tubum normaliter agens, quae tempusculo dt tubum et corpus ad se mutuo adducat. Ponatur haec vis tantisper $=P$, quae corpus in directione rm urgendo tempusculo dt promoveat in ω, (Fig. 149) tubum vero in directione mr sollicitando perducat in situm $\alpha\pi\beta$, ita ut corpus in punctum tubi ω reducatur. Cum igitur vis acceleratrix corporis A in r sit $=\frac{P}{A}$, erit spatiolum $r\omega=\frac{Pdt^2}{4A}$. Ad motum autem tubi hinc oriundum definiendum multiplicentur singulae tubi partes per quadrata distantiarum ab axe O, circa quem mobiles existunt, sit horum productorum omnium summa $=Mkk$, vis autem P, quae etiam in puncto ν applicata concipi potest, momentum respectu axis O erit $=Px$, unde oritur vis acceleratrix tubi in puncto $\nu=\frac{Pxz}{Mkk}$, a qua punctum ν traducetur in π, ut sit $\nu\pi=\frac{Pxzdt^2}{4Mkk}$; ex ν in tangentem

$\vartheta\pi\varphi$ demittatur perpendiculum $\nu\varrho$, erit $\pi\varrho = \frac{Pxydt^2}{4Mkk}$ et $\nu\varrho = \frac{Pxxdt^2}{4Mkk}$. Ipsi $\nu\varrho$ autem aequalis est $m\omega$, unde cum sit $m\omega + r\omega = rm$, fiet

$$\frac{Pxxdt^2}{4Mkk} + \frac{Pdt^2}{4A} = mr, \quad \text{idéoque} \quad P = \frac{4AMkk}{(Axx + Mkk)\,dt^2} \cdot mr = \frac{AMkk}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right)$$

quae vis praebet pressionem, quam corpus in tubum secundum directionem normalis MP exerit. A hac igitur restitutione tubus magis acceleratur, dum ultra $a\nu b$ in situm $\alpha\pi\beta$ perducitur; atque hae acceleratio tanta est, quanta proficisceretur a vi acceleratrice in distantia f a polo O urgente

$$= \frac{Pfx}{Mkk} = \frac{Afx}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right).$$

Quare si tubi punctum intervallo f a polo O distans tempusculo dt circa O conficiat arculum $= d\sigma$, erit

$$du = Sd\sigma + \frac{Afxd\sigma}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right).$$

Deinde quia corpus post tempusculum dt in puncto tubi ω reperitur, spatium adhuc majus quam νm interea in tubo conficiat necesse est, spatium scilicet $\pi\varrho\omega$, quod illud superat particula

$$\pi\varrho = \frac{Pxydt^2}{4Mkk},$$

quae producitur a vi acceleratrice

$$= \frac{Pxy}{Mkk} = \frac{Axy}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right).$$

Jam ante autem accelerationem est passum, eo quod spatium νm majus erat quam ML particula

$$\frac{Sydt^2}{4f} + \frac{uxdt^2}{2ff}, \quad \text{quae nascitur a vi acceleratrice} \quad \frac{Sy}{f} + \frac{2ux}{ff}.$$

Consequenter si corpus tempusculo dt in tubo percurrat spatiolum ds, erit

$$dv = Tds + \frac{Syds}{f} + \frac{2uxds}{ff} + \frac{Axyds}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right),$$

unde ob $ds = \frac{zdz}{x}$ evenit

$$dv = \frac{Tzdz}{x} + \frac{Syzdz}{fx} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Ayzdz}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right),$$

et quia spatiola ds et $d\sigma$ eodem tempusculo dt percurruntur, erit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{u}}$. Quare cum ex duabus aequationibus inventis definiantur v et u, motus tam tubi quam corporis in eo inclusi cognoscetur. Q. E. I.

10. **Coroll. 1.** Vis viva tubi in hoc situ est $= \frac{Mkk}{ff}u$; altitudo autem celeritati corporis in M verae debita reperitur $= v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff}$, unde vis viva corporis in tubo insiti erit

$$= A\left(v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff}\right);$$

hinc vis viva totalis tubi et corporis est $= \frac{Mkku}{ff} + Av - \frac{2Ay\sqrt{vu}}{f} + \frac{Azzu}{ff}$.

Coroll. 2. Ponatur altitudo debita celeritati corporis verae $= \varpi$, erit

$$\varpi = \rho - \frac{2y\sqrt{\rho u}}{f} + \frac{zzu}{ff};$$

seu ob $zz = xx + yy$ erit

$$\varpi - \frac{xxu}{ff} = \rho - \frac{2y\sqrt{\rho u}}{f} + \frac{yyu}{ff} = \left(\sqrt{\rho} - \frac{y\sqrt{u}}{f}\right)^2;$$

unde fit $\sqrt{\rho} = \frac{y\sqrt{u}}{f} + \sqrt{\left(\varpi - \frac{xxu}{ff}\right)}$.

12. Coroll. 3. Cum sit $\varpi = \rho - \frac{2y\sqrt{\rho u}}{f} + \frac{zzu}{ff}$, erit

$$d\varpi = d\rho - \frac{2dy\sqrt{\rho u}}{f} - \frac{ydu\sqrt{\rho}}{f\sqrt{u}} - \frac{ydu\sqrt{\rho}}{f\sqrt{u}} + \frac{2zudz}{ff} + \frac{zzdu}{ff}.$$

At est $r = \frac{zdz}{dy}$; unde erit $dy = \frac{zdz}{r}$, ex quo habetur

$$d\varpi = d\rho - \frac{2zdz\sqrt{\rho u}}{fr} - \frac{ydu\sqrt{\rho}}{f\sqrt{u}} - \frac{ydu\sqrt{\rho}}{f\sqrt{u}} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{zzdu}{ff}.$$

13. Coroll. 4. Quia est $ds = \frac{zdz}{x}$ et $d\sigma = \frac{ds\sqrt{\rho}}{\sqrt{u}}$, erit $d\sigma = \frac{zdz\sqrt{\rho}}{x\sqrt{u}}$. Ponatur brevitatis gratia

$$Q = \frac{Aff}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2\rho}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{\rho u}}{f}\right);$$ erit

$$d\rho = \frac{Tzdz}{x} + \frac{Syzdz}{fx} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Qyzdz}{ff};$$

et $$du = \frac{Szdz\sqrt{u}}{x\sqrt{\rho}} + \frac{Qzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{\rho}}.$$

Pressio vero, quam tubus sustinet in directione normali MP, erit $= \frac{Mkk}{ff}Q$.

14. Coroll. 5. Si isti valores in expressione differentialis $d\varpi$ substituantur, obtinebitur sequens expressio

$$d\varpi = \frac{Tzdz}{x} + \frac{Syzdz}{fx} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Qyzdz}{ff} - \frac{2zdz\sqrt{\rho u}}{fr} - \frac{Tyzdz\sqrt{u}}{fx\sqrt{\rho}} - \frac{Syyzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{\rho}} - \frac{2uyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}} - \frac{Qyyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}}$$
$$- \frac{Syzdz}{fx} - \frac{Qyzdz}{ff} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Sz^3dz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{\rho}} + \frac{Qz^3dz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}}.$$

Qua reducta obtinebitur

$$d\varpi = \frac{Tzdz}{x}\left(1 - \frac{y\sqrt{u}}{f\sqrt{\rho}}\right) + \frac{4uzdz}{ff} - \frac{2uyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}} + \frac{Sxzdz\sqrt{u}}{ff\sqrt{\rho}} - \frac{2zdz\sqrt{\rho u}}{fr} + \frac{Qxxzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}}.$$

15. Coroll. 6. Quia est vis viva totalis $= \frac{Mkku}{ff} + A\varpi$, erit incrementum vis vivae

$$Ad\varpi + \frac{Mkkdu}{ff} = \frac{ATzdz}{x}\left(1 - \frac{y\sqrt{u}}{f\sqrt{\rho}}\right) + \frac{4Auzdz}{ff} - \frac{2Auyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}} - \frac{2Azdz\sqrt{\rho u}}{fr} + \frac{ASxzdz\sqrt{u}}{ff\sqrt{\rho}} + \frac{AQxxzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}}$$
$$+ \frac{MSkkzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{\rho}} + \frac{MQkkzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{\rho}}.$$

Est vero $\frac{AQ\,xx\,zdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} + \frac{MQ\,kk\,zdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} = (Axx + Mkk)\,Q\frac{zdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} = \frac{ANzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} + \frac{2A\,zdz\sqrt{vu}}{fr} - \frac{ASx\,zdz\sqrt{}}{ff\sqrt{v}}$

$$+ \frac{2Auyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} - \frac{4Au\,zdz}{ff}.$$

Quamobrem erit incrementum vis vivae

$$Ad\varpi + \frac{Mkk\,du}{ff} = \frac{AT\,zdz}{x} - \frac{ATy\,zdz\sqrt{u}}{fx\sqrt{v}} + \frac{AN\,zdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} + \frac{MS\,kk\,zdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}}.$$

16. **Coroll. 7.** Si ex aequationibus elementa dv et du exprimentibus eliminetur Q, erit

$$dv = \frac{Tz\,dz}{x} + \frac{2u\,zdz}{ff} + \frac{ydu\sqrt{v}}{f\sqrt{u}}.$$

17. **Coroll. 8.** Sit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = t$ erit

$$dt = \frac{du}{2\sqrt{uv}} - \frac{dv\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} = \frac{Sz\,dz}{2xv} + \frac{Qz\,dz}{2fv} - \frac{Tzdz\sqrt{u}}{2xv\sqrt{v}} - \frac{Sy\,zdz\sqrt{u}}{2fxv\sqrt{v}} - \frac{u\,zdz\sqrt{u}}{ffv\sqrt{v}} - \frac{Qy\,zdz\sqrt{u}}{2ffv\sqrt{v}}.$$

18. **Exemplum.** Evanescant omnes vires sollicitantes T, N et S, erit

$$Ad\varpi + \frac{Mkk\,du}{ff} = 0; \quad \text{et} \quad A\varpi + \frac{Mkku}{ff} = C = Ac,$$

unde fit

$$\varpi = v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff} = c - \frac{Mkku}{Aff},$$

ergo

$$\sqrt{v} = \frac{y\sqrt{u}}{f} + \sqrt{\left(c - \frac{xxu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\frac{y\sqrt{u}}{f} - \sqrt{\left(c - \frac{xxu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)}}{\frac{zzu}{ff} - c + \frac{Mkku}{Aff}}.$$

Ex his fit

$$\frac{du\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = \frac{ydu}{f} + \frac{du}{\sqrt{u}}\sqrt{\left(c - \frac{xxu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)} = \frac{Qzdz}{f},$$

at est

$$Q = \frac{2v}{r} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f} = \frac{2(yy - xx)\,u}{ffr} + \frac{2c}{r} - \frac{2Mkku}{Affr} + \frac{4y}{fr}\sqrt{\left(cu - \frac{xxuu}{ff} - \frac{Mkkuu}{Aff}\right)} - \frac{2uy}{ff}$$

$$- \frac{4}{f}\sqrt{\left(cu - \frac{xxuu}{ff} - \frac{Mkkuu}{Aff}\right)}.$$

Cum igitur sit $OM = O\mu = z$; $OT = y$; $\mu T = x$; sit $OS = Os = f$; $Cs = q$, erit $Ss = dq$; at $S\sigma = d\sigma$ et $m\mu = ds$; erit $\mu n = \frac{yds}{z}$, et $s\sigma = d\sigma - dq$; unde

$$f : z = d\sigma - dq : \frac{yds}{z} \quad \text{et} \quad \frac{fyds}{zz} = d\sigma - dq,$$

ergo

$$dq = d\sigma - \frac{fyds}{zz} = \frac{zdz\sqrt{u}}{x\sqrt{v}} - \frac{fydz}{xz}, \quad \text{ob} \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}},$$

ergo $\frac{v}{u} = \frac{ds^2}{d\sigma^2}$; hinc $v = \frac{u ds^2}{d\sigma^2}$ et $C = u\left(\frac{A ds^2}{d\sigma^2} - \frac{2Ay\,ds}{f d\sigma} + \frac{Azz}{ff} + \frac{Mkk}{ff}\right)$ at $ds = \frac{zdz}{x}$;

sit $a\sigma = p$, erit $z : y = ds : \frac{z}{f}\,dp$, ergo $y ds = \frac{yz\,dz}{x} = \frac{zz\,dp}{f}$, et $\frac{y}{x} = \frac{zdp}{fdz}$: hinc $d\sigma = dq + dp$.

At ex superiori aequatione est

$$\frac{ydu}{f} + \frac{du}{\sqrt{u}}\sqrt{\left(c - \frac{zzu}{ff} + \frac{yyu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)} =$$

$$\frac{2(2yy - zz)\,u\,dy}{f^3} + \frac{2c\,dy}{f} - \frac{2uyz\,dz}{f^3} - \frac{2Mkk\,u\,dy}{Af^3} + \frac{4(ydy - zdz)}{ff}\sqrt{\left(cu - \frac{zzu}{ff} + \frac{yyu}{ff} - \frac{Mkk\,uu}{Aff}\right)}.$$

Porro erit $\frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v} = Af\sqrt{b}$.

19. **Coroll. 9.** Si quantitas motus rotatorii ubique per distantiam a polo multiplicetur, et summa omnium productorum vocetur momentum motus rotatorii: erit casu generaliter pertractato momentum motus rotatorii

$$= \frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v}.$$

20. **Coroll. 10.** Differentiale autem hujus momenti motus rotatorii erit

$$d\left(\frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v}\right) = \frac{MSkkzdz}{2fx\sqrt{v}} - \frac{ATyzdz}{2x\sqrt{v}} + \frac{ANzdz}{2\sqrt{v}}.$$

21. **Coroll. 11.** Sit $\frac{Mkku}{ff} + Av - \frac{2Ay\sqrt{vu}}{f} + \frac{Azzu}{ff} = V$ et $\frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v} = R$, erit

$$dV = \frac{ATzdz}{x} - \frac{ATyzdz\sqrt{u}}{fx\sqrt{v}} + \frac{ANzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} + \frac{MSkkzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad dR = \frac{ANzdz}{2\sqrt{v}} - \frac{ATyzdz}{2x\sqrt{v}} + \frac{MSkkzdz}{2fx\sqrt{v}}.$$

Ex illis autem aequationibus definiuntur u et v.

22. **Coroll. 12.** (Fig. 150.) Sin autem sit $CS = q$, $Ss = dq$, $OM = z$, quia ob curvam AM cognitam dantur y et x per z; erit

$$dq = \frac{zdz\sqrt{u}}{x\sqrt{v}} - \frac{fydz}{xz},$$

in qua si substituantur loco v et u valores inventi, reperietur aequatio pro curva DM, quam corpus describit.

23. **Coroll. 13.** Erit autem $\frac{V}{RR} = \frac{Mkku + Affv - 2Afy\sqrt{vu} + Azzu}{(Mkk + Azz)^2 u - 2Afy(Mkk + Azz)\sqrt{vu} + A^2 ffyyv}$,

sit $E = Mkk + Azz$, $s = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ et $\frac{V}{RR} = F$, erit

$$FE^2ss - 2AFEfys + AFffyy = Ess - 2Afys + Aff,$$

ergo
$$ss = \frac{2AFEfys - 2Afys - AFffyy + Aff}{FE^2 - E}$$

et
$$s = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{AFEfy - Afy \pm \sqrt{(A^2FEffyy + A^2ffyy + AFE^2ff - AEff)}}{FE^2 - E}$$

24. **Coroll. 14.** Restitutis ergo valoribus loco E et F reperietur

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{Afy + Rf\sqrt{\frac{A(Mkk + Axx)}{V(Mkk + Azz) - RR}}}{Mkk + Azz}.$$

Posito vero $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = s$ erit $(Mkk + Azz)s\sqrt{v} - Afy\sqrt{v} = R$

et
$$\sqrt{v} = \frac{R}{(Mkk + Azz)s - Afy} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{V(Mkk + Azz) - RR}{A(Mkk + Axx)}},$$

ergo
$$\sqrt{u} = \frac{R + Ay\sqrt{\frac{V(Mkk + Azz) - RR}{A(Mkk + Axx)}}}{Mkk + Azz}.$$