VI.

Dissertation sur le mouvement des corps enfermés dans un tube droit, mobile autour d'un axe fixe.

(Praecedentis commentationis redactio altera et omnino posterior.)

---

§ 1. La matière que je me suis proposé d'éclaircir ici, appartient à une partie de la Mécanique qui est encore presque tout-à-fait inconnue; car il n'y a qu'environ dix ou douze ans, que MM. Bernoulli ont commencé à traiter quelques problèmes de cette nature, et je crois qu'après eux, M. Clairaut et moi, nous sommes encore les seuls qui aient travaillé sur cette matière. Mais, pour donner une idée plus nette tant de la nouveauté que des difficultés de cette nouvelle partie de la Mécanique, on n'aura qu'à faire attention au mouvement des corps sur des plans inclinés ou sur d'autres surfaces qui déterminent le chemin que les corps doivent prendre, quoique la direction des forces mouvantes eût demandé une route tout-à-fait différente. Un corps poussé par la seule pesanteur, étant libre, doit tomber dans une ligne perpendiculaire à l'horizon; un tel corps ne manquera pas de suivre la direction d'un plan incliné sur lequel il serait posé, l'impénétrabilité de ce plan empêchant sa chûte perpendiculaire. Mais ce même corps agit à son tour sur le plan, en le poussant perpendiculairement avec d'autant plus de force, que la direction qu'il doit suivre est différente de celle de la pesanteur; de là vient, qu'à mesure que le plan s'élève au dessus de l'horizon, la pression du corps diminue, et qu'elle s'évanouit tout-à-fait, quand le plan est devenu vertical, parce qu'en ce cas, rien ne résiste plus à l'action de la gravité.

§ 2. Cette pression que le corps exerce sur le plan incliné, se détermine sans aucune difficulté, car elle est toujours au poids entier du corps comme le sinus de l'inclinaison est au sinus total; et quand même le corps serait poussé par plusieurs forces quelconques, il est toujours aisé de déterminer la pression que le plan, ou la surface sur laquelle le corps s'appuie, en souffre, la direction de cette pression étant constamment perpendiculaire à la surface. Mais dans cette question, si aisée à résoudre, on a toujours supposé le plan incliné, ou la surface sur laquelle le corps se meut, fixe et tout-à-fait immobile. Or, supposant le plan incliné mobile, la question changera bientôt de face, et deviendra une des plus difficiles questions de Mécanique, qu'on ait traitées jusqu'ici. C'est de là que le célèbre M. Bernoulli a tiré son premier problème sur cette matière, problème où il demande le mouvement d'un corps qui descend sur un plan incliné mobile, ou qui peut glisser sur une surface horizontale. Car, parce que le corps presse continuellement le pl incliné, on comprend d'abord, que le plan étant mobile, il doit obéir à cette pression, et gliss selon l'horizon. Mais aussitôt que le plan incliné commence à se mouvoir, la pression du co diminuera, et par là le mouvement du corps même doit changer. De ce changement résultera u pression diverse sur le plan, laquelle produira tant dans le plan incliné, que dans le corps même con nuellement de nouvelles variations qu'on ne saurait déterminer à moins qu'on ne fasse réflexion a changements qui arrivent à chaque instant et dans la situation et dans la vitesse tant du co que du plan incliné.

§ 3. M. Bernoulli, le père, à donné de ce problème quelques solutions aussi belles q profondes dans les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg et dans le recueil de tous ses ouvrag solutions où il s'est servi principalement de deux méthodes différentes, l'une, tirée des premie principes de la Mécanique, par le moyen desquels on trouve, à chaque instant, le changeme tant de la vitesse que de la direction, causé par les forces sollicitantes. L'autre méthode ét fondée sur des principes *dérivatifs*, comme la conservation des forces vives et le mouvement un forme du centre de gravité selon l'horizon; ces principes étant déjà un résultat des princip primitifs appliqués au cas proposé, ne laissent pas de rendre la solution bien plus courte et mo embarassée. Mais la première méthode, bien qu'elle soit beaucoup plus difficile que l'autre, semb pourtant être plus naturelle, parce qu'elle montre à chaque instant, non seulement l'état du mouv ment, mais encore les véritables causes de tous les changements qui arrivent successivement. D plus, la première méthode est toujours suffisante pour résoudre toutes les questions, et quoiq l'exécution surpasse souvent les forces du calcul, elle fournit pourtant toujours autant d'équatio que la solution exige; au lieu que l'autre méthode, qui se fonde sur les deux principes dérivat mentionnés ci-dessus, comme elle ne donne que deux équations, elle ne peut aussi être employ que lorsque deux équations suffisent pour la résolution. Par ces raisons, la première méthod quoique souvent très embarassante, l'emporte beaucoup sur l'autre.

§ 4. Pour résoudre la question de M. Bernoulli, dans laquelle deux choses se trouvent déterminer, savoir le mouvement du corps et ensuite, le mouvement du plan incliné, la métho fondée sur les deux principes allégués peut être employée avec beaucoup de succès, et le parfa accord qui se trouve entre cette solution et celle que fournit la première, peut servir à démontr la justesse de chacune. Mais la considération de ce problème a bientôt produit d'autres question bien plus difficiles, lorsqu'on change le mouvement horizontal en un mouvement qui se fait auto d'un axe fixe. Dans ce cas, le principe de la conservation des forces vives retient son mérit mais celui du mouvement uniforme du centre de gravité devient tout-à-fait inutile; et quoique j'a découvert un autre principe qu'on peut substituer à celui-là, et que je nomme la conservation d *moment* du mouvement rotatoire, malgré cela, on n'en peut venir à bout que lorsqu'il n'y a qu deux mouvements à déterminer. C'est donc pour faire voir la nécessité de remonter aux premie principes généraux de la Mécanique, que nous nous sommes proposé des questions où il faut déte miner le mouvement de trois ou de plusieurs corps, avant qu'on puisse donner une solution parfait Cette recherche étant par elle-même extrêmement difficile, il était convenable d'en séparer toutes le autres circonstances qui pourraient embrouiller le calcul, afin que, par ce moyen, l'application des principes de la Mécanique devînt plus aisée et plus propre à éclairer une nouvelle partie de cette science.

§ 5. Dans ce nouveau problème, dont j'entreprends ici la solution, on considère un tube droit dans lequel un ou plusieurs corps puissent se mouvoir sans aucune résistance, de sorte que ces corps, demeurant enfermés dans le tube, en suivent partout le mouvement, pendant qu'ils se meuvent le long du tube, selon que les forces sollicitantes l'exigent. Ce tube sera supposé mobile autour d'un axe fixe, perpendiculaire à l'horizon, et passant par l'un de ses bouts; d'où il est clair que le mouvement de ce tube se fera toujours dans un plan horizontal. Nous avons choisi cette situation, pour écarter les effets de la gravité, et partant, tout changement qui arrivera dans le mouvement du tube et des corps y enfermés, viendra uniquement et des pressions que les corps exercent sur le tube, et de celles qu'ils en souffrent réciproquement. Mais avant que de déterminer les mouvements de plusieurs corps enfermés dans un tel tube, je donnerai la solution du problème, qu'il n'y a qu'un seul corps; cela servira à se former une idée plus claire de la méthode que j'emploirai, et à mieux connaître l'état de la question dont il s'agit, et des difficultés qu'il faudra surmonter.

Problème I. *Déterminer le mouvement d'un corps enfermé dans un tube mobile autour d'un axe fixe vertical, après avoir donné un mouvement quelconque tant au tube qu'au corps enfermé.*

§ 6. (Fig. 143.) Que la droite OF représente la position du tube au commencement du mouvement, et que A soit le point où le corps se trouve alors. Dans cet état, le mouvement tant du corps que du tube étant supposé donné, nommons la distance $OA = a$, la longueur du tube $OF = f$, et comme le mouvement du tube est rotatoire autour du point fixe O, les vitesses des parties du tube seront entre elles comme leurs distances au point O; de sorte que, connaissant la vitesse rotatoire du bout F, on connaîtra en même temps la vitesse de tous les autres points. Soit donc la vitesse que le point F a eue au commencement $= \sqrt{g}$, où g signifie la hauteur par laquelle un corps tombant acquiert la même vitesse que nous donnons au point F. De là, on tirera la vitesse du point $A = \frac{a\sqrt{g}}{f}$ qui doit être commune au corps enfermé que nous supposons avoir été alors en A. Mais le corps peut avoir reçu, outre ce mouvement commun avec le tube, un mouvement particulier selon la direction du tube. Soit donc $\sqrt{\alpha}$ la vitesse que le corps a reçue, au commencement, dans la direction AF, outre la vitesse $\frac{a\sqrt{g}}{f}$ qui lui est commune avec le tube. Composant maintenant ces deux mouvements comme à l'ordinaire, on aura le mouvement vrai du corps; donc la vitesse sera $= \sqrt{(\alpha + \frac{aag}{ff})}$, et la direction fera avec AF un angle dont la tangente sera $= \frac{a\sqrt{g}}{f\sqrt{\alpha}}$, supposant, ce que je fais toujours, le sinus total égal à l'unité.

§ 7. Cela posé, on voit aisément que ces deux mouvements doivent être bientôt troublés, car le corps enfermé, s'éloignant du point O, acquerra un plus grand mouvement rotatoire, et cette augmentation ne se pourra faire qu'aux dépens du mouvement du tube, de sorte qu'un changement continuel devra nécessairement arriver. Supposons qu'après quelque temps, le tube soit parvenu dans la situation OS, le point F ayant parcouru, dans ce laps de temps, l'arc FS que je nommerai A présent, pour résoudre la question, il faut déterminer trois choses: d'abord, la vitesse rotat du point S, laquelle soit désignée par $\sqrt{u}$; en second lieu, le point P, dans le tube, où le corps trouvera à présent, soit donc $OP = x$; en troisième lieu, on doit assigner la vitesse propre corps en P, vitesse qui le fait avancer ou reculer par rapport au point O. Soit cette vitesse corps, dans la direction du tube PS, $= \sqrt{p}$. Il est évident, que quand nous aurons déterminé trois inconnues u, x et p, le problème sera parfaitement résolu.

§ 8. Pour résoudre ce problème, il faut principalement avoir égard à la liaison qui subsi entre le tube et le corps, parce que le changement qui s'opère dans l'un, est causé par l'au Mais d'abord il est clair, que si le tube venait à manquer, le corps, selon la première loi du mo vement, continuerait son cours uniformément dans la même direction; ensuite, si l'on ôtait le co le tube devrait conserver pour toujours le même mouvement rotatoire qui lui a été imprimé commencement. De là on conçoit aisément, que si ces deux mouvements n'étaient point contra à la liaison entre les deux corps, chacun serait continué à l'infini, sans se troubler l'un l'autre, partant, qu'il n'arrivera aucun changement, qu'en tant que ces deux mouvements ne sont d'accord avec la liaison qui règne entre eux. Car, dans ce cas, l'un ne pouvant continuer sa troubler l'autre, il en résultera une pression par laquelle chacun tendra à entraîner l'autre avec l et cette pression, agissant sur l'un et l'autre également, causera un changement dans chacun, jusq ce que les deux mouvements puissent subsister avec la liaison, par laquelle le corps doit toujo rester enfermé dans le tube. C'est donc la pression, qui produit les changements tant dans le tu que dans le corps, et si cette pression était connue, on en pourrait déterminer les changeme mêmes par les lois de la Mécanique. Ainsi, tout revient à trouver la grandeur de cette pressi qui sera déterminée par son effet même; or, l'effet doit remettre un parfait accord entre l'union ces deux corps, c'est à dire, que si le corps, en poursuivant son mouvement, venait à s'écarter tube, l'effet de la pression consistera à les réduire ensemble. Tel sera donc le plan de la métho dont je me servirai pour résoudre tant ce problème, que l'autre que j'ai principalement en vue.

§ 9. Ayant fait voir que tous les changements sont produits tant par la pression que le co exerce sur le tube, que par la pression réciproque du tube sur le corps, il faut remarquer, cette pression est toujours perpendiculaire au tube, ceci étant la seule direction qui retienne le cor Ensuite, comme l'action est toujours égale et contraire à la réaction, le corps sera poussé du tu par une force égale, mais selon la direction opposée. Soit donc P la force, par laquelle le co étant en P, presse le tube dans la direction perpendiculaire PM, et le corps sera repoussé dans direction opposée PN par la même force P. Mais pour déterminer les effets de cette pression, faut principalement regarder la masse ou l'inertie des corps, par laquelle se détermine l'effet toutes les forces mouvantes. Ces deux choses étant connues, je nommerai la masse ou la fo d'inertie du corps enfermé dans le tube $= A$, et celle du tube $= M$; mais, parce qu'il s'agit déterminer le mouvement rotatoire du tube, il ne suffit pas d'en savoir la masse, il faut en co naître encore le moment d'inertie que l'on trouve, ainsi que je l'ai expliqué ailleurs, en multipli chaque particule du corps tournoyant par le carré de sa distance à l'axe de rotation, et en rasse tous ces produits dans une somme qui pourra être exprimée par la masse entière, multipliée par le carré d'une certaine ligne. Soit donc le moment d'inertie du tube OF, par rapport à l'axe O, $= Mkk$, où k marque une ligne qui dépend tant de la longueur du tube que de son épaisseur et de sa pesanteur spécifique par toute son étendue.

§ 10. Un corps, dont la masse $= A$, étant poussé par une force P, l'accélération ou la retardation qui en est produite, s'exprime par la fraction $\frac{P}{A}$ dont la valeur est toujours un nombre absolu, si l'on mesure la force P par un poids, et pareillement la masse A par le poids qu'une masse égale aurait, étant mise à la surface de la terre. Or, l'effet de cette accélération se manifeste par l'augmentation de la vitesse du corps; de sorte que, si la vitesse du corps est $= \sqrt{v}$, pendant que le corps parcourt l'espace ds, on aura toujours $\frac{dv}{ds} = \frac{P}{A}$, pourvu que la direction du mouvement et de la force soit la même. Une telle force accélératrice ferait donc que le corps parcourt un plus grand espace qu'il n'aurait parcouru dans le même temps. Pour déterminer ce surcroît de l'espace parcouru, dans un temps donné que je suppose infiniment petit, on n'a qu'à réfléchir au mouvement également accéléré, et l'on verra aisément que, pendant qu'un espace ds est parcouru d'une vitesse uniforme $\sqrt{c}$, l'accélération $\frac{P}{A}$ fera parcourir au corps l'espace infiniment petit $\frac{Pds^2}{4Ac} = \frac{P}{A}\cdot\frac{ds^2}{4c}$, outre l'espace qu'il devrait achever, dans le même temps, en vertu de son mouvement actuel. De là il est clair que, réciproquement aussi, si ce surcroît de l'espace qu'un corps parcourt dans un temps donné, est $= \frac{P}{A}\cdot\frac{ds^2}{4c}$, alors son accélération sera $= \frac{P}{A}$; d'où l'on tirera $\frac{dv}{ds} = \frac{P}{A}$, pour déterminer le mouvement accéléré de ce corps. Dans ces calculs, il faut bien remarquer que j'exprime toujours les vitesses par les racines carrées des hauteurs desquelles un corps tombant acquiert les mêmes vitesses.

§ 11. Considérons maintenant, de combien le mouvement rotatoire du tube OS doit être accéléré par la pression P qui le pousse selon la direction PM. Comme la vitesse du point S est $= \sqrt{u}$, et l'arc FS déjà parcouru $= s$, ce point S décrira, dans un temps infiniment petit dt, l'espace ds, de sorte qu'on aura $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. Mais l'accélération qui résulte de la pression P, fera que le point S parcourra un plus grand espace que ds, soit $= Ss$. Pour déterminer cette accélération, il faut prendre le moment de la pression P qui sera $= Px$, lequel multiplié par la distance $OS = f$ et divisé par le moment d'inertie du tube $= Mkk$, donnera l'accélération du point S, qui sera par conséquent $= \frac{Pfx}{Mkk}$. Voilà pourquoi, dans ce même temps dt dans lequel le point S décrirait d'un mouvement uniforme l'espace ds avec la vitesse $\sqrt{u}$, il en parcourra un plus grand, surpassant celui-là de la quantité $\frac{Pfx}{Mkk}\cdot\frac{ds^2}{4u}$, de sorte que nous aurons $Ss = ds + \frac{Pfxds^2}{4Mkku}$; et comme l'accélération du point S est $= \frac{Pfx}{Mkk}$, nous aurons aussi, pour déterminer le mouvement du tube, cette équation

$$\frac{du}{ds} = \frac{Pfx}{Mkk}; \text{ ou bien } du = \frac{Pfxds}{Mkk};$$

or, ni la valeur de P ni celle de x n'étant connues, cette équation ne nous donne encore aucun résultat.

§ 12. Considérons à présent le corps A qui se trouve en P, et dans lequel nous concevons un double mouvement, l'un, dans la direction PS avec la vitesse $=\sqrt{p}$, et l'autre qui lui est commun avec le tube et dont la vitesse sera, par conséquent, $=\frac{x\sqrt{u}}{f}$, selon la direction PM. Comme ce corps n'est sollicité que par la pression P dans la direction PN, il s'en suit que par là le dernier mouvement seul sera troublé et retardé. Par cette raison, le même temps dt, dans lequel l'espace ds est parcouru avec la vitesse $\sqrt{u}$, est nécessaire pour que le corps, en vertu de son premier mouvement, achève l'espace $P\pi=\frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}}$, lequel étant $=dx$, nous aurons cette équation

$$\frac{ds}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{\sqrt{p}}=dt.$$

Le corps étant donc parvenu en π, l'autre mouvement, s'il n'était pas retardé par la pression P, lui ferait parcourir l'espace $\frac{xds}{f}$, dans la direction πp perpendiculaire à OS; mais la retardation de cette force P étant $=\frac{P}{A}$, l'espace $\frac{xds}{f}$ sera diminué de la particule $\frac{P}{A}\cdot\frac{ds^2}{4u}$, de sorte que l'espace parcouru sera $\pi p=\frac{xds}{f}-\frac{Pds^2}{4Au}$, et par conséquent, dans l'instant dt le corps sera transporté de P en p, et ce point p doit être situé dans le tube Os; d'où nous pourrons tirer une équation qui fera connaître la quantité de la pression P. Car les triangles semblables OSs, $O\pi p$ fournissent cette proportion

$$OS : Ss = O\pi : \pi p$$

c'est à dire:

$$f : ds+\frac{Pfxds^2}{4Mkku} = x+\frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}} : \frac{xds}{f}-\frac{Pds^2}{4Au}$$

d'où résulte, en rejetant les termes qui par rapport aux autres s'évanouissent, l'équation suivante:

$$\frac{Pfxxds^2}{4Mkku}+\frac{ds^2\sqrt{p}}{\sqrt{u}}=-\frac{Pfds^2}{4Au}$$

et celle-ci donnera $P=\frac{-4AMkk\sqrt{pu}}{f(Axx+Mkk)}$; ce qui marque que la pression est négative, ou que le corps presse le tube dans la direction PN, et qu'il en est repoussé dans la direction PM.

§ 13. Le corps étant parvenu en p, sera éloigné du point fixe O de l'intervalle Op, au lieu que, sans le mouvement rotatoire, sa distance serait $=O\pi$. Mais il est clair que Op étant l'hypoténuse du triangle $O\pi p$, rectangle en π, elle sera plus grande que $O\pi$, et il y aura

$$Op=\sqrt{(O\pi^2+\pi p^2)},$$

et parce que πp est infiniment petit par rapport à $O\pi$, nous aurons $Op=O\pi+\frac{\pi p^2}{2O\pi}$, ou bien

$$Op-O\pi=\frac{\pi p^2}{2O\pi}=\frac{xds^2}{2ff},$$

ce qui nous marque l'espace que le corps parcourt dans le tube, outre l'espace $P\pi=\frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}}$ qu'il parcourrait en vertu de son mouvement. Divisons donc cet espace $\frac{xds^2}{2ff}$ par $\frac{ds^2}{4u}$, et nous obtiendrons l'accélération requise pour ce surcroît de l'espace parcouru, laquelle sera $=\frac{2xu}{ff}$. D'où il suit que, pendant que le corps parcourt dans le tube l'espace $P\pi=dx$ avec sa vitesse $\sqrt{p}$, son mouvement sera accéléré en sorte, qu'il y aura $\frac{dp}{dx}=\frac{2xu}{ff}$. Mais ayant déterminé la pression P, nous aurons aussi pour l'accélération du tube, ou plutôt pour sa retardation, cette équation

$$du=\frac{-4Axds\sqrt{pu}}{Axx+Mkk}.$$

§ 14. En rassemblant tout ce que nous venons de trouver, nous obtiendrons les trois équations suivantes:

$$\text{I.}\quad \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}},$$

$$\text{II.}\quad dp = \frac{2uxdx}{ff},$$

$$\text{III.}\quad du = \frac{-4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}.$$

Or, comme nous n'avons que quatre quantités inconnues ou variables: p, u, x et s, ces trois équations trouvées suffiront pour déterminer le rapport entre ces quatre quantités, et par conséquent, on en pourra, pour chaque valeur de l'une, assigner les trois autres, ce que demande la solution du problème proposé. Si nous voulons introduire la cinquième inconnue t, pour marquer le temps écoulé, pendant que le tube est parvenu de sa première place OF en OS, nous aurons aussi une quatrième équation $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, ou $dt = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, et nous pourrons, par la résolution de ces quatre équations, à chaque instant déterminer 1. la situation du tube, ou l'arc $FS = s$; 2. sa vitesse rotatoire $= \sqrt{u}$; 3. le point du tube où se trouvera le corps enfermé, ou l'espace $OP = x$, et 4. enfin, la vitesse du corps le long du tube, qui est $= \sqrt{p}$. Outre cela, ayant trouvé ces quatre choses, nous en pourrons aussi déterminer la pression entre le corps et le tube, qui sera $= \frac{4AMkk\sqrt{pu}}{f(Axx + Mkk)}$, et partant le problème sera parfaitement résolu.

§ 15. Tout revient donc à la résolution des trois équations différentielles que nous venons de trouver. Mais il se trouve dans chacune plusieurs variables; il faut donc tâcher d'en réduire le nombre à deux seulement, ou d'en former une équation qui soit intégrable. Or, dans le cas proposé, l'un et l'autre peut se faire; car la première équation donnant $ds\sqrt{p} = dx\sqrt{u}$, si nous substituons cette valeur dans la troisième équation, nous aurons

$$du = \frac{-4Auxdx}{Axx + Mkk}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{du}{u} + \frac{4Axdx}{Axx + Mkk} = 0,$$

dont l'intégrale est: $lu + 2l(Axx + Mkk) = l\,\text{Const.}$, ou $u(Axx + Mkk)^2 = \text{Const.}$ Mais u devenant dès le commencement $= g$ et $x = a$, cette constante sera $= g(Aaa + Mkk)^2$, et par conséquent, nous aurons cette équation qui exprime le rapport entre u et x:

$$u = \frac{g(Aaa + Mkk)^2}{(Axx + Mkk)^2},$$

qui donne cette proportion $\sqrt{u} : \sqrt{g} = Aaa + Mkk : Axx + Mkk$.

§ 16. L'équation différentielle $du = -\frac{4Auxdx}{Axx + Mkk}$ délivrée des fractions, donnera

$$Axxdu + Mkkdu + 4Auxdx = 0.$$

Mais la seconde équation $dp = \frac{2uxdx}{ff}$ se change en celle-ci $Affdp - 2Auxdx = 0$, laquelle étant ajoutée à la précédente donnera

$$Affdp + Mkkdu + Axxdu + 2Auxdx = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$Affp + Mkku + Axxu = \text{Const.}$$

*

Or cette équation rapportée à l'état que nous avons supposé au commencement, où l'on avait p $x = a$ et $u = g$, donnera la valeur de la constante $= Aff\alpha + Mkkg + Aaag$, de sorte que nous a

$$Affp + (Mkk + Axx)\, u = Aff\alpha + (Mkk + Aaa)\, g.$$

Mais ayant trouvé $u = \frac{g(Aaa + Mkk)^2}{(Axx + Mkk)^2}$, nous obtiendrons

$$p = \alpha + \frac{(Aaa + Mkk)g}{Aff} - \frac{(Aaa + Mkk)^2 g}{Aff(Axx + Mkk)}, \text{ ou bien } p = \alpha + \frac{g(Aaa + Mkk)(xx - aa)}{ff(Axx + Mkk)};$$

de sorte que nous avons déjà exprimé les deux vitesses $\sqrt{u}$ et $\sqrt{p}$ par la seule variable $OP =$

§ 17. Maintenant il sera aisé de déterminer aussi les autres variables s et t par la mê Car, ayant par la première équation $\frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, ou $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}}$, en mettant pour $\sqrt{u}$ et $\sqrt{}$ valeurs trouvées, nous aurons l'équation suivante

$$ds = \frac{(Aaa + Mkk)\, f dx \sqrt{g}}{\sqrt{(Axx + Mkk)\,(aff(Axx + Mkk) + g\,(xx - aa)\,(Aaa + Mkk))}},$$

d'où l'arc $FS = s$ pourra être déterminé par x, moyennant la quadrature d'une courbe, et de construction on pourra réciproquement tirer la valeur de x, celle de s étant connue. Pour concerne le temps t, pendant lequel le tube est parvenu de OF en OS, on le déduira de l'éq $dt = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, ou $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, qui donne

$$dt = \frac{f dx \sqrt{(Axx + Mkk)}}{\sqrt{(aff(Axx + Mkk) + g\,(xx - aa)\,(Aaa + Mkk))}}.$$

Si l'on demande la nature de la courbe AP que le corps décrit par son mouvement vrai, e exprimée par l'équation trouvée entre x et s qui est

$$\frac{ds}{f} = \frac{(Aaa + Mkk)\, dx \sqrt{g}}{\sqrt{(Axx + Mkk)\,(aff(Axx + Mkk) + g\,(xx - aa)\,(Aaa + Mkk))}};$$

car $\frac{ds}{f}$ est l'élément de l'angle AOP, de sorte que nous avons une équation entre la d $OP = x$ et l'angle $AOP = \frac{s}{f}$.

§ 18. Avant que de passer outre, remarquons dans cette solution les deux principes do avons fait mention au commencement, savoir, la conservation des forces vives et celle du n du mouvement rotatoire. Ces deux principes sont contenus dans les deux équations inté trouvées aux §§ 15 et 16; car la première $u\,(Axx + Mkk)^2 =$ Const. montre que cette exp $\frac{Axx\sqrt{u}}{f} + \frac{Mkk\sqrt{u}}{f}$ demeure toujours la même. Mais $\frac{x\sqrt{u}}{f}$ marque la vitesse rotatoire du corps d'où il s'ensuit que $\frac{Ax\sqrt{u}}{f}$ sera son mouvement rotatoire qui, multiplié par x à la manière d prend les moments, donnera le moment du mouvement rotatoire du corps $= \frac{Axx\sqrt{u}}{f}$. Par u blable raisonnement, on verra que $\frac{Mkk\sqrt{u}}{f}$ est le moment du mouvement rotatoire du tube, conséquent, on doit accorder que la somme de ces deux moments demeure toujours la même. lement, l'autre équation intégrale trouvée, étant réduite à cette forme

$$Ap + \frac{Axxu}{ff} + \frac{Mkku}{ff} = \text{Const.}$$

marque la conservation des forces vives. Car le corps A ayant en P un double mouvement dont les directions sont perpendiculaires entre elles, la vitesse de l'un étant $= \sqrt{p}$, et de l'autre $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, la véritable vitesse du corps sera $= \sqrt{(p + \frac{xxu}{ff})}$, et partant le carré de sa vitesse $= p + \frac{xxu}{ff}$ qui, multiplié par la masse du corps A, donnera sa force vive $= Ap + \frac{Axxu}{ff}$. Ensuite, $\frac{Mkku}{ff}$ exprime la force vive du tube, d'où il suit que, pour la somme des forces vives, il revient toujours la même quantité.

§ 19. La vérité de ces deux principes étant démontrée, au moins dans le cas dont il s'agit ici, on verra aisément, que la solution du problème proposé aurait été abrégée de beaucoup, si nous nous étions servis de ces deux principes dès le commencement, car c'est ordinairement le choix et l'emploi de pareils principes *dérivatifs*, qui rend les solutions des problèmes, d'ailleurs les plus difficiles, si courtes et si élégantes. Mais ce même choix demande aussi une très grande adresse et une profonde connaissance de la matière en question, afin qu'on ne se précipite pas en se servant de principes qui ne peuvent pas avoir lieu dans le cas proposé. Mais supposons, qu'on ait eu des raisons assez convaincantes pour s'assurer de la vérité des deux principes mentionnés, il est évident qu'on aurait pu se passer de tous les raisonnements et calculs qui ont précédé les deux intégrations faites aux §§ 15 et 16, car ces deux principes auraient immédiatement fourni les mêmes équations déjà intégrées, savoir:

$$\frac{Axx\sqrt{u}}{f} + \frac{Mkk\sqrt{u}}{f} = \text{Const.} = \frac{Aaa\sqrt{g}}{f} + \frac{Mkk\sqrt{g}}{f}$$

$$Ap + \frac{Axxu}{ff} + \frac{Mkku}{ff} = \text{Const.} = A\alpha + \frac{Aaag}{ff} + \frac{Mkkg}{ff},$$

lesquelles étant combinées avec l'équation $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, qui suit immédiatement de la considération même du mouvement, auraient d'abord donné la solution trouvée avec assez d'embarras.

§ 20. Pour mieux éclaircir la solution que nous avons trouvée, et pour en prouver la justesse, nous l'appliquerons à deux cas particuliers. Dans l'un de ces cas, nous supposerons la masse du corps enfermé nulle, et dans l'autre, celle du tube. Soit donc, pour développer le premier cas, $A = 0$, et l'équation trouvée au § 15 se changera en celle-ci: $u = g$, qui fait voir, que le mouvement rotatoire du tube sera uniforme; ce qu'on aurait pu d'abord prévoir sans aucun calcul; car la masse du corps enfermé s'évanouissant, le tube se mouvra comme s'il n'y avait pas du tout de corps enfermé, et partant, par la première loi du mouvement, il continuera à se tourner autour de l'axe O avec un mouvement uniforme. Mais le mouvement du corps A, quoique évanouissant, n'est pas si aisé à prévoir. L'équation du § 16 donnera pour ce cas $p = \alpha + \frac{g(xx - aa)}{ff}$; ensuite on aura

$$ds = \frac{fdx\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ff + g(xx - aa))}} = \frac{fdx\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ff - gaa + gxx)}}.$$

Soit $\frac{\alpha}{g}ff - aa = \pm hh$, selon que $\frac{\alpha}{g}ff$ surpasse aa, ou qu'il en soit surpassé, et nous aurons cette équation

$$\frac{ds}{f} = \frac{dx}{\sqrt{(xx \pm hh)}}$$

dont l'intégrale prise par le moyen des logarithmes sera

$$\frac{s}{f} = l \cdot \frac{x + \sqrt{(xx \pm hh)}}{a + f\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

en ajoutant une constante qui rende $x = a$, lorsque $s = 0$.

§ 21. On pourra donc, à l'aide des logarithmes, trouver s par x; mais comme l'arc s décrit d'un mouvement uniforme, il conviendra mieux de déterminer x par s. A cet effet, soit le nombre qui ait l'unité pour son logarithme hyperbolique, et l'on aura en passant aux nombres $x + \sqrt{(xx \pm hh)} = (a + f\sqrt{\frac{a}{g}})e^{s:f}$, ce qui donne $x = \frac{1}{2}(a + f\sqrt{\frac{a}{g}})e^{s:f} + \frac{1}{2}(a - f\sqrt{\frac{a}{g}})e^{-s:f}$ après avoir restitué à la place de $\pm hh$ sa valeur $\frac{a}{g}ff - aa$. Cette expression se construit aisém par une spirale logarithmique, décrite autour du pôle O et coupée par les rayons sous l'angle dem droit. Cette construction donnera en même temps le chemin AP que le corps parcourt de son vi mouvement, dont voici la construction: Soit (Fig. 144) VFW une telle spirale semi-rectangulaire passan par le point F, et désignant, comme par le passé, l'arc circulaire $FS = s$, soit $OV = z$, et ayan tiré le rayon infiniment proche Osv, nous aurons $Vu = vu = dz$ et $ds:f = dz:z$, ce qui donne

$$\frac{dz}{z} = \frac{ds}{f}, \quad lz = \frac{s}{f} \quad \text{et enfin} \quad z = fe^{s:f} = OV.$$

Si de l'autre côté du point F, nous prenons $FT = FS$, nous aurons $OW = fe^{-s:f}$; puis, portant O sur OX et coupant VX en deux parties égales au point Y, il y aura

$$VY = XY = \frac{1}{2}f(e^{s:f} - e^{-s:f}) \quad \text{et} \quad OX + XY = OY = \frac{1}{2}f(e^{s:f} + e^{-s:f}).$$

Or nous avons trouvé pour x la valeur suivante

$$x = \frac{1}{2}a(e^{s:f} + e^{-s:f}) + \frac{1}{2}f\sqrt{\frac{a}{g}}(e^{s:f} - e^{-s:f})$$

d'où nous tirons cette expression $\quad x = \frac{a}{f} \cdot OY + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot VY.$

Prenant donc $OP = \frac{a}{f} \cdot OY + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot VY$, le point P sera dans la courbe cherchée AP. Si la vites $\sqrt{\alpha}$ était $= 0$, la courbe serait perpendiculaire à OF au point A, et sa construction deviendrait pl simple, car on n'aurait qu'à tirer par A une droite parallèle à FY, et elle couperait le rayon O au point cherché P.

§ 22. Passons à présent à l'autre cas, et supposons que la masse du tube s'évanouisse, de so que Mkk soit $= 0$. Dans ce cas, il est d'abord clair que, parce que le tube n'a aucune force opposer au mouvement du corps enfermé, il lui obéira sans la moindre résistance, et par conséquen le corps se mouvra, tout comme s'il était libre, c'est à dire, il marchera dans une ligne dro gardant toujours sa première vitesse. Cette conséquence, quoique d'elle-même très claire, ne s déduit point pourtant si aisément des équations que nous avons trouvées. Car, premièrement posa $M = 0$, nous aurons

$u = \frac{a^4 g}{x^4}$, ou $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{g}} = \frac{aa}{xx}$, et $p = \alpha + \frac{aag\,(xx - aa)}{ffxx}$,

et ensuite $ds = \frac{aa\,f\,dx\sqrt{g}}{x\sqrt{(\alpha ffxx + aag\,(xx - aa))}} = Ss$ (Fig. 143.)

de là s'ensuit

$p\pi = \frac{xds}{f} = \frac{aa\,dx\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ffxx + aag\,(xx - aa))}}$ et partant $\frac{p\pi}{P\pi} = \frac{aa\sqrt{g}}{\sqrt{(xx(\alpha ff + aag) - a^4 g)}} = \operatorname{tang} pP\pi$

d'où le sinus de l'angle $pP\pi$ ou OPA sera $= \frac{aa\sqrt{g}}{x\sqrt{(\alpha ff + aag)}}$, et si l'on tire une tangente au point P, la perpendiculaire abaissée du point O sur cette tangente sera $= \frac{aa\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ff + aag)}}$ laquelle ayant une valeur constante, marque que la ligne AP est droite. De plus, la vitesse réelle du corps étant $= \sqrt{(p + \frac{xxu}{ff})}$, elle deviendra, dans ce cas ci, $= \sqrt{(\alpha + \frac{aag}{ff})}$, et par conséquent aussi constante, comme nous venons d'avancer.

§ 23. J'ai développé tout au long la solution de ce problème, pour mettre dans son plein jour les principes dont je me suis servi et que j'emploirai dans la résolution du problème suivant. Ce problème ne différera du premier qu'en ce que je supposerai plusieurs corps enfermés dans le tube. Or comme le problème précédent demandait deux équations à résoudre, sans compter celles que la considération du mouvement fournit immédiatement; ainsi deux corps enfermés dans le tube demanderont trois équations; trois corps, quatre équations, et ainsi de suite. De là il est clair que, quoiqu'on puisse ici également employer les deux principes décrits ci-dessus, pourtant ils ne seront pas suffisants pour résoudre la question, par la raison qu'ils ne fournissent que deux équations. C'est pourquoi nous serons obligés de nous servir d'une méthode tout à fait différente, pour tirer des équations que nous obtiendrons, une solution parfaite, laquelle étant presque en tout nouvelle, pourra apporter un grand avantage dans d'autres questions semblables, et même étendre les forces de l'analyse. Je bornerai le problème à trois corps; mais on verra d'abord que la même méthode réussira pour tout nombre plus grand quelconque.

Problème III. *Déterminer le mouvement de trois corps enfermés dans un tube mobile autour d'un axe fixe vertical, après avoir imprimé des mouvements quelconques tant au tube qu'aux corps enfermés en dedans.*

§ 24. (Fig. 145.) Pour nous représenter l'état du commencement, supposons que le tube fut alors en OF, et les trois corps enfermés en A, B, C, et que ces mêmes lettres A, B, C expriment les masses ou inerties de ces trois corps. Soit la masse du tube, comme auparavant, $= M$, et son moment d'inertie $= Mkk$, pris par rapport à l'axe O autour duquel ce tube est mobile. Ensuite, je nommerai les distances $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$ et la longueur du tube $OF = f$. Soit la vitesse rotatoire du point $F = \sqrt{g}$, et celle du point A sera $= \frac{a\sqrt{g}}{f}$, du point $B = \frac{b\sqrt{g}}{f}$, et du point $C = \frac{c\sqrt{g}}{f}$. Outre ces vitesses qui sont communes aux corps ainsi qu'au tube, chacun a reçu un mouvement particulier dans la direction du tube OF. Soit donc la vitesse du corps $A = \sqrt{\alpha}$, celle du corps $B = \sqrt{\beta}$, et celle du corps $C = \sqrt{\chi}$. Toutes ces quantités sont connues, parce qu'elles déterminent l'état où le tube avec les trois corps s'est trouvé au commencement du mouvement pour résoudre parfaitement la question, il faudra, au moyen de ces données, déterminer, pour cha moment voulu, tant la situation du tube avec les corps, que leurs mouvements.

§ 25. Supposons qu'après un temps écoulé quelconque t, le tube soit parvenu en OS, a décrit par son bout F l'arc $FS = s$, et soit maintenant la vitesse du point $S = \sqrt{u}$, de sorte l'élément du temps dt soit exprimé par $\frac{ds}{\sqrt{u}}$. Que les trois corps enfermés se trouvent à présent points P, Q, R, et désignons les distances OP par x, OQ par y et OR par z; nous en tire d'abord les vitesses rotatoires, car celle du corps en P sera $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, en $Q = \frac{y\sqrt{u}}{f}$, et en $R =$ Enfin, soient les vitesses propres à chaque corps dans le tube

$$\begin{aligned} &\text{celle du premier corps en } P = \sqrt{p} \\ &\text{du second en } Q = \sqrt{q} \\ &\text{du troisième en } R = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

La considération du mouvement nous fournit à présent d'abord les équations suivantes

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{p}}, \quad dt = \frac{dy}{\sqrt{q}}, \quad dt = \frac{dz}{\sqrt{r}}.$$

Or, ci-dessus nous avons trouvé $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, de sorte que nous avons déjà quatre équations. Cepend le nombre des quantités inconnues ou variables: $t, s, u, x, y, z, p, q, r$ se monte à neuf; il no faut, en conséquence, encore quatre équations pour la solution du problème.

§ 26. Comme tout changement qui s'opère dans ces mouvements, vient uniquement des pr sions avec lesquelles les corps poussent le tube, et en sont également repoussés, il faut avant tou choses, déterminer ces pressions. Désignons les par les mêmes lettres qui, dans la figure marqu leurs lieux respectifs, c'est à dire, soit

$$\begin{aligned} &\text{la pression du corps en } P = P \\ &\text{celle du corps en } Q = Q \\ &\text{et celle du corps en } R = R \end{aligned}$$

et concevons que, par l'effet de ces pressions, le tube est repoussé ou retardé, et que partan mouvement rotatoire de chaque corps est accéléré. En tant que ces pressions agissent sur le tu il en faut considérer le moment qui sera $= Px + Qy + Rz$, d'où résulte la retardation du tube point $S = \frac{(Px + Qy + Rz)f}{Mkk}$, et par conséquent, pendant que le point S parcourt l'espace ds, sa r tardation sera exprimée par cette équation

$$du = -\frac{(Px + Qy + Rz)fds}{Mkk}.$$

Or, le point S qui, sans cette retardation, aurait parcouru, de son mouvement uniforme $\sqrt{u}$, l'es pace ds, parcourra à présent un espace moindre

$$Ss = ds - \frac{f(Px + Qy + Rz)}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u},$$

et dans cet instant $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, le tube parviendra de OS en Os. Par cette raison, les trois corps aussi devront se trouver, au même instant, dans la ligne Os, et cette considération nous conduira à la détermination de la quantité des pressions P, Q, R.

§ 27. Les pressions ne changeant point les mouvements des corps dans la direction du tube, le corps A parcourra dans le tube l'espace $P\pi = \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}}$, le corps B l'espace $Q\xi = \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{u}}$, et le corps C l'espace $R\varrho = \frac{ds\sqrt{r}}{\sqrt{u}}$, tous dans le temps infiniment petit $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. C'est donc le mouvement des corps qui se fait dans la direction perpendiculaire à celle du tube OS, qui sera accéléré par les pressions. Ainsi, le corps A en P, qui devrait, selon cette direction, faire l'espace $= \frac{xds}{f}$, en fera un plus grand $\pi p = \frac{xds}{f} + \frac{P}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, ainsi que nous l'avons vu dans la solution précédente. Pareillement, le corps B sera transporté de ξ en q, de sorte que $\xi q = \frac{yds}{f} + \frac{Q}{B} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, et le corps C parcourra l'espace $\varrho r = \frac{zds}{f} + \frac{R}{C} \cdot \frac{ds^2}{4u}$. Maintenant les points p, q, r, où les trois corps sont transportés, devant se trouver dans la droite Os, les triangles semblables OSs, $O\pi p$, $O\xi q$, $O\varrho r$ donneront les proportions suivantes:

$$f : ds - \frac{fds^2(Px + Qy + Rz)}{4Mkku} = x + \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}} : \frac{xds}{f} + \frac{Pds^2}{4Au}$$

$$f : ds - \frac{fds^2(Px + Qy + Rz)}{4Mkku} = y + \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{u}} : \frac{yds}{f} + \frac{Qds^2}{4Bu}$$

$$f : ds - \frac{fds^2(Px + Qy + Rz)}{4Mkku} = z + \frac{ds\sqrt{r}}{\sqrt{u}} : \frac{zds}{f} + \frac{Rds^2}{4Cu}.$$

Supposons, pour abréger, $\frac{f(Px + Qy + Rz)}{Mkk} = V$, et nous obtiendrons les équations suivantes

$$\frac{Pf}{4Au} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{u}} - \frac{Vx}{4u}$$

$$\frac{Qf}{4Bu} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{u}} - \frac{Vy}{4u}$$

$$\frac{Rf}{4Cu} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{u}} - \frac{Vz}{4u}.$$

§ 28. Par le moyen de ces équations, nous aurons les expressions suivantes pour les valeurs de P, Q, R:

$$P = \frac{4A\sqrt{pu}}{f} - \frac{AVx}{f}, \quad Q = \frac{4B\sqrt{qu}}{f} - \frac{BVy}{f}, \quad R = \frac{4C\sqrt{ru}}{f} - \frac{CVz}{f}.$$

Mais ayant supposé $V = f\frac{(Px + Qy + Rz)}{Mkk}$, nous aurons $Px + Qy + Rz = \frac{MkkV}{f}$, équation qui, si nous y substituons pour P, Q, R, les valeurs trouvées, nous donne

$$\frac{4Ax\sqrt{pu}}{f} + \frac{4By\sqrt{qu}}{f} + \frac{4Cz\sqrt{ru}}{f} - \frac{V}{f}(Axx + Byy + Czz) = \frac{V}{f} \cdot Mkk$$

d'où l'on tire
$$V = \frac{4(Ax\sqrt{p} + By\sqrt{q} + Cz\sqrt{r})\sqrt{u}}{Axx + Byy + Czz + Mkk}.$$

Cette valeur substituée dans les équations trouvées ci-dessus, nous fournira les valeurs des vérita pressions P, Q et R. Reprenons donc l'équation trouvée là-haut

$$du = -\frac{f(Px+Qy+Rz)\,ds}{Mkk}, \text{ ou bien celle-ci } du = -V ds;$$

en remettant pour V sa valeur trouvée, nous aurons cette équation

$$du = -\frac{4(Ax\sqrt{p}+By\sqrt{q}+Cz\sqrt{r})\,ds\sqrt{u}}{Axx+Byy+Czz+Mkk}.$$

Or les équations trouvées au § 25 donnent

$$ds\sqrt{p} = dx\sqrt{u},\quad ds\sqrt{q} = dy\sqrt{u},\quad ds\sqrt{r} = dz\sqrt{u},$$

par le moyen desquelles la valeur de du s'exprimera ainsi qu'il suit

$$du = -\frac{4u(Axdx+Bydy+Czdz)}{Axx+Byy+Czz+Mkk}$$

dont l'intégrale sera: $\quad u(Axx+Byy+Czz+Mkk)^2 = \text{Const.}$

Or cette constante doit être déterminée par l'état du commencement où u se change en g, x en y en b, et z en c, de sorte que nous aurons cette équation

$$u(Axx+Byy+Czz+Mkk)^2 = g(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)^2$$

qui renferme la conservation du moment du mouvement rotatoire, ainsi que nous l'avons fait v ci-dessus (§ 18).

§ 29. S'il n'y avait pas de mouvement rotatoire, les corps A, B, C parviendraient, dans l'in stant dt, aux points π, ξ et ϱ; mais à présent, à cause du mouvement rotatoire, ils se trouve aux points p, q et r qui sont plus éloignés d' O que les autres, et par cette raison, le mouveme des corps dans le tube recevra quelque accroissement. Ainsi, le surcroît de l'espace que le co A parcourt dans le tube, sera $= Op - O\pi = \frac{p\pi^2}{2\,O\pi}$, ce qui donne $\frac{x\,ds^2}{2ff}$. Mais ce surcroît di par $\frac{ds^2}{4u}$ donnera l'accélération du corps A dans la direction du tube, qui sera $= \frac{2ux}{ff}$. La vit $\sqrt{p}$ sera donc augmentée, de sorte qu'on aura $dp = \frac{2uxdx}{ff}$. De la même manière on trouvera, p les deux autres corps, les accélérations suivantes $dq = \frac{2uydy}{ff}$ et $dr = \frac{2uzdz}{ff}$. Rassemblons mainte toutes les équations que nous venons de trouver, et nous aurons les sept équations suivantes:

$$\text{I. } \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}},\quad \text{II. } \frac{dy}{\sqrt{q}} = \frac{ds}{\sqrt{u}},\quad \text{III. } \frac{dz}{\sqrt{r}} = \frac{ds}{\sqrt{u}},\quad \text{IV. } dp = \frac{2uxdx}{ff},\quad \text{V. } dq = \frac{2uydy}{ff},\quad \text{VI. } dr = \frac{2u\ldots}{ff}$$

$$\text{VII. } (Axx+Byy+Czz+Mkk)\sqrt{u} = (Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)\sqrt{g},$$

qui seront suffisantes pour déterminer le rapport entre les huit quantités variables s, u, x, p, y z, r qui y entrent.

§ 30. Comme toutes ces équations, excepté la dernière, sont différentielles, on compre aisément, qu'il doit être extrêmement difficile de parvenir à une équation qui ne contienne que d variables. Et quand même on pourrait surmonter toutes les difficultés, qu'on rencontre dans ce cas de trois corps, en suivant les règles ordinaires de l'élimination, on sera pourtant obligé d'avouer qu'une pareille opération doit devenir tout à fait impossible, si le nombre des corps était plus grand. Il est vrai cependant, qu'on peut trouver encore une équation intégrale qui comprenne la conservation des forces vives et qu'on obtiendra de la manière suivante. L'équation différentielle, d'où nous avons tiré la valeur de u, se réduit à cette forme

$$Axxdu + Byydu + Czzdu + Mkkdu + 4Auxdx + 4Buydy + 4Cuzdz = 0;$$

mais les équations IV, V et VI donnent

$$Affdp - 2Auxdx = 0, \quad Bffdq - 2Buydy = 0, \quad Cffdr - 2Cuzdz = 0,$$

équations qui, étant ajoutées à celle là, produiront cette somme

$$Affdp + Bffdq + Cffdr + Axxdu + Byydu + Czzdu + Mkkdu + 2Auxdx + 2Buydy + 2Cuzdz = 0$$

dont l'intégrale appliquée au cas proposé sera

$$Affp + Bffq + Cffr + Axxu + Byyu + Czzu + Mkku = Aff\alpha + Bff\beta + Cff\gamma + Aaag + Bbbg + Cccg + Mkkg$$

laquelle, étant divisée par ff, montre évidemment la conservation des forces vives. Mais de cette équation, quoique intégrale, nous ne tirerons presque aucun avantage; car quand même nous voudrions, par le moyen de ces deux équations intégrales, éliminer deux variables, le calcul deviendrait si embrouillé et si pénible que personne ne pourrait le développer ni le subir.

§ 31. Il nous faudra donc chercher un chemin qui ne soit troublé ni par d'inextricables calculs, ni même par un plus grand nombre de corps contenus dans le tube. A cet effet, des six équations premières je joindrai ensemble deux à deux, savoir la I et IV, la II et V, la III et VI, et par cette combinaison, je pourrai éliminer les quantités p, q, r. La première équation donne $p = \frac{udx^2}{ds^2}$, d'où, en supposant l'élément ds constant, nous tirerons

$$dp = \frac{dx^2 du}{ds^2} + \frac{2udxddx}{ds^2};$$

or la quatrième équation donne $dp = \frac{2uxdx}{ff}$; par conséquent, nous en obtiendrons l'équation suivante

$$\frac{2ux}{ff} = \frac{dudx}{ds^2} + \frac{2uddx}{ds^2}, \quad \text{ou bien celle-ci} \quad \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2}.$$

Par la même méthode, nous réduirons les équations II et V, en éliminant la lettre q, à celle-ci

$$\frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2},$$

et les deux équations III et VI donneront

$$\frac{z}{ff} = \frac{ddz}{ds^2} + \frac{dudz}{2uds^2}.$$

Voilà donc les six équations réduites à trois qui, conjointement avec la septième, renferment la solution du problème proposé: car à présent nous n'avons plus que cinq quantités inconnues: x, y, z, u, s à déterminer.

§ 32. Quoique ces trois équations que nous venons de trouver, soient différentielles du second degré, pourtant chacune ne contient que trois variables, et ce qui est principalement à remarquer, elles sont tout-à-fait semblables entre elles, et cette même ressemblance nous ouvrira un chemin pour parvenir à la solution que nous cherchons. En considérant les trois équations différentielles du second degré qui sont:

$$\text{I. } \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{du\,dx}{2u\,ds^2}, \quad \text{II. } \frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{du\,dy}{2u\,ds^2}, \quad \text{III. } \frac{z}{ff} = \frac{ddz}{ds^2} + \frac{du\,dz}{2u\,ds^2},$$

il est d'abord clair, que si nous avions la résolution de l'une, nous ne manquerions pas de connaître les deux autres. Car supposons que la valeur de x nous soit connue, et l'on verra sans aucune difficulté, qu'on satisfera aux deux autres équations en prenant y et z ou égales à x, ou en une raison constante à la même x. Car posant $y = mx$ et $z = nx$, la seconde et la troisième équation se réduiront à la première.

§ 33. Supposons donc $y = mx$ et $z = nx$, et nous aurons

$$p = \frac{u\,dx^2}{ds^2}, \quad q = \frac{mmu\,dx^2}{ds^2} = mmp \quad \text{et} \quad r = \frac{nnu\,dx^2}{ds^2} = nnp;$$

ce qui nous donne la solution d'un cas particulier du problème proposé. Car ces relations devant subsister toujours, nous aurons, pour le commencement du mouvement,

$$b = ma, \quad c = na, \quad \beta = mm\alpha \quad \text{et} \quad \gamma = nn\alpha.$$

Or, parce que $\sqrt{\beta} = m\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\gamma} = n\sqrt{\alpha}$, cette solution se rapportera au cas où les vitesses propres des corps enfermés dans le tube, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ et $\sqrt{\gamma}$, sont proportionelles aux distances $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$, c'est à dire, où les chemins AP, BQ, CR que les corps décrivent, sont également inclinés à la direction du tube OF. Si donc dès le commencement, de pareils mouvements ont été imprimés aux corps, le même rapport subsistera toujours, et par conséquent, les lignes AP, BQ, CR seront semblables entr'elles. Mais dans ce cas, l'équation VII se changera en celle-ci

$$(Axx + mmBxx + nnCxx + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + mmBaa + nnCaa + Mkk)\sqrt{g},$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{u} = \frac{Mkk\sqrt{g} + aa(A + mmB + nnC)\sqrt{g}}{Mkk + xx(A + mmB + nnC)},$$

et différentiant les logarithmes

$$\frac{du}{2u} = \frac{-2x\,dx(A + mmB + nnC)}{Mkk + xx(A + mmB + nnC)}.$$

Soit, pour abréger, $A + mmB + nnC = D$, et la valeur

$$\frac{du}{2u} = \frac{-2Dx\,dx}{Mkk + Dxx} \quad \text{substituée dans l'équation} \quad \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{du\,dx}{2u\,ds^2},$$

donnera

$$\frac{x\,ds^2}{ff} = ddx - \frac{2Dx\,dx^2}{Mkk + Dxx}.$$

§ 34. Pour résoudre cette équation, dans laquelle l'élément ds est supposé constant, mettons $ds = v dx$, et nous aurons $dds = v ddx + dv dx = 0$, et partant $ddx = \frac{-dv\,dx}{v}$. Ces valeurs pour ds et ddx substituées, fourniront cette équation différentielle du premier degré

$$\frac{xv^2dx}{ff} + \frac{dv}{v} + \frac{2Dx\,dx}{Mkk+Dxx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v^3} + \frac{2Dxdx}{(Mkk+Dxx)v^2} - \frac{x\,dx}{ff} = 0,$$

qui étant divisée par $(Mkk+Dxx)^2$, deviendra intégrable

$$\frac{dv}{v^3(Mkk+Dxx)^2} + \frac{2Dxdx}{(Mkk+Dxx)^3v^2} = \frac{-xdx}{ff(Mkk+Dxx)^2};$$

car l'intégrale sera

$$\text{Const.} - \frac{1}{2v^2(Mkk+Dxx)^2} = \frac{1}{2Dff(Mkk+Dxx)}.$$

Or v étant $= \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{p}}$, sa valeur au commencement sera $= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}$; nous aurons donc pour la

$$\text{Const.} = \frac{a}{2g(Mkk+Daa)^2} + \frac{1}{2Dff(Mkk+Daa)},$$

et substituant pour v sa valeur $\frac{ds}{dx}$, nous obtenons

$$\frac{a}{g(Mkk+Daa)^2} + \frac{1}{Dff(Mkk+Daa)} = \frac{dx^2}{ds^2(Mkk+Dxx)^2} + \frac{1}{Dff(Mkk+Dxx)};$$

d'où nous pourrons aisément déterminer ds par la seule variable x, et par conséquent, pour chaque valeur de s assigner celle de x, laquelle étant connue, nous aurons d'abord

$$y = mx, \quad z = nx, \quad p = \frac{udx^2}{ds^2} = \frac{u}{v^2},$$

c'est à dire

$$p = \frac{au(Mkk+Dxx)^2}{g(Mkk+Daa)^2} + \frac{u(Mkk+Dxx)^2}{Dff(Mkk+Daa)} - \frac{u(Mkk+Dxx)}{Dff}.$$

Mais $u = \frac{g(Mkk+Daa)^2}{(Mkk+Dxx)^2}$, et puis, nous avons $q = mmp$ et $r = nnp$; de sorte que ce cas du problème est parfaitement résolu.

§ 35. Un cas du problème que nous traitons étant ainsi résolu, nous pourrons déterminer le mouvement d'autant de corps enfermés dans le tube que l'on voudra, pourvu qu'au commencement les vitesses imprimées aux corps eussent été proportionelles à leurs distances au point O. La solution de ce cas ne diffère guère du problème premier où il n'y avait qu'un seul corps dans le tube; car ayant trouvé

$$u = \frac{g(Mkk+Daa)^2}{(Mkk+Dxx)^2},$$

la valeur de p sera exprimée ainsi qu'il suit

$$p = a + \frac{g(xx-aa)(Mkk+Daa)}{ff(Mkk+Dxx)}, \quad \text{et partant} \quad ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}}.$$

Il est donc évident que le mouvement du tube renfermant trois ou plusieurs corps, auxquels on a imprimé, au commencement, des vitesses proportionelles à leurs distances du point O, que ce mouvement, dis-je, sera le même que s'il n'y avait d'enfermé dans le tube qu'un seul corps à la distance $OA = a$, et dont la masse fût

$$D = A + mmB + nnC, \quad \text{c'est à dire} \quad D = A + \frac{Bbb}{aa} + \frac{Ccc}{aa}.$$

Mais il s'ensuit encore de ce que nous venons de dire, que la solution sera bien différente et plus difficile, lorsque les vitesses $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, imprimées aux corps dès le commencement, ne suivent pas la proportion des distances a, b, c; car alors, remontant aux trois équations différentio-différentielles du § 32, nous ne pourrons plus supposer que les valeurs de y et z soient proportionelles à celle de x. Car, quoique cette supposition satisfasse à ces équations, elle ne renferme pourtant qu'un cas particulier de la solution, et il est aisé de comprendre, de la nature des équations différentielles du second degré, qu'il y a encore d'autres rapports entre les variables x, y et z, qui peuvent convenir aux équations trouvées.

§ 36. Pour trouver une solution générale, je suppose, comme auparavant, que la valeur de x qu'il tient de l'équation

$$\frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2},$$

nous soit déjà connue, et je dis qu'on pourra déduire de là les valeurs de y et z, dans toute leur étendue sans aucune restriction. A cet effet, je pose $y = Tx$, et l'on aura

$$dy = Tdx + xdT \qquad \text{et}$$

$$ddy = Tddx + 2dTdx + xddT;$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$\frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2}$$

produiront celle-ci

$$\frac{Tx}{ff} = \frac{Tddx}{ds^2} + \frac{2dTdx}{ds^2} + \frac{xddT}{ds^2} + \frac{Tdxdu}{2uds^2} + \frac{xdTdu}{2uds^2}.$$

Mais la première équation étant multipliée par T donne

$$\frac{Tx}{ff} = \frac{Tddx}{ds^2} + \frac{Tdudx}{2uds^2},$$

laquelle retranchée de celle-là laissera

$$0 = \frac{2dTdx}{ds^2} + \frac{xddT}{ds^2} + \frac{xdTdu}{2uds^2}, \quad \text{ou bien} \quad 0 = 4udTdx + 2uxddT + xdTdu;$$

de sorte que nous aurons

$$0 = \frac{ddT}{dT} + \frac{2dx}{x} + \frac{du}{2u}$$

dont l'intégrale est $\qquad \Delta ds = xxdT\sqrt{u},$

où Δ marque une quantité constante que les conditions du problème détermineront. Ainsi nous aurons

$$dT = \frac{\Delta\, ds}{xx\sqrt{u}},$$

et par conséquent

$$T = m + \Delta \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}},$$

où je suppose que l'intégrale $\int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}$ est prise en sorte, qu'elle s'évanouisse en posant $s = 0$, c'est à dire au commencement du mouvement.

§ 37. Ayant ainsi trouvé T, nous aurons $y = mx + \Delta x \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}$; mais au commencement du mouvement, où $x = a$, $y = b$ et $\int \frac{ds}{xx\sqrt{u}} = 0$, il doit y avoir $m = \frac{b}{a}$, et partant en mettant μ pour Δ, nous aurons

$$y = \frac{bx}{a} + \mu x \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}.$$

De la même manière nous trouvons

$$z = \frac{cx}{a} + \nu x \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}.$$

Mais pour déterminer les constantes μ et ν, considérons les vitesses

$$\sqrt{p} = \frac{dx\sqrt{u}}{ds}, \quad \sqrt{q} = \frac{dy\sqrt{u}}{ds} \quad \text{et} \quad \sqrt{r} = \frac{dz\sqrt{u}}{ds},$$

et nous aurons

$$\sqrt{q} = \frac{b\,dx\sqrt{u}}{a\,ds} + \frac{\mu}{x} + \frac{\mu\, dx\sqrt{u}}{ds} \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{r} = \frac{c\,dx\sqrt{u}}{a\,ds} + \frac{\nu}{x} + \frac{\nu\, dx\sqrt{u}}{ds} \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}.$$

Or, au commencement du mouvement nous avons

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}}, \quad \sqrt{u} = \sqrt{g}, \quad \sqrt{p} = \sqrt{\alpha}, \quad \sqrt{q} = \sqrt{\beta}, \quad \sqrt{r} = \sqrt{\gamma} \quad \text{et} \quad \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}} = 0,$$

d'où nous tirons les déterminations suivantes

$$\sqrt{\beta} = \frac{b\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\mu}{a} \quad \text{et} \quad \mu = a\sqrt{\beta} - b\sqrt{\alpha},$$

$$\sqrt{\gamma} = \frac{c\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\nu}{a} \quad \text{et} \quad \nu = a\sqrt{\gamma} - c\sqrt{\alpha},$$

et par conséquent les constantes μ et ν nous sont connues.

§ 38. Supposons, pour nous débarasser du signe intégral, $\int \frac{ds}{xx\sqrt{u}} = S$, et nous aurons

$$\frac{ds}{xx\sqrt{u}} = dS, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \sqrt{u} = \frac{ds}{xx\, dS},$$

et par conséquent

$$\frac{du}{2u} = \frac{-2\,dx}{x} - \frac{ddS}{dS},$$

parce que nous avons supposé l'élément ds constant. Mettons cette valeur à la place de $\frac{du}{2u}$ dans l'équation $\frac{x}{ff}=\frac{ddx}{ds^2}+\frac{dudx}{2uds^2}$, et nous aurons

$$\frac{x}{ff}=\frac{ddx}{ds^2}-\frac{2dx^2}{xds^2}-\frac{dxddS}{dSds^2}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{xds}{ff}=d.\frac{dx}{ds}-\frac{2dx^2}{xds}-\frac{dx}{dS}d.\frac{dS}{ds},$$

équation où il n'est plus question de savoir s'il y a, ou non, quelque différentielle supposée constante. Par cette raison, changeant d'hypothèse, mettons à présent la différentielle dS constante, ce qui nous donnera

$$\frac{xds}{ff}=\frac{ddx}{ds}-\frac{dxdds}{ds^2}-\frac{2dx^2}{xds}+\frac{dxdds}{ds^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{xds}{ff}=\frac{ddx}{ds}-\frac{2dx^2}{xds},$$

équation qui, bien qu'il ne s'y trouve que deux variables x et ds, en renferme pourtant trois, parce que la différentielle d'une troisième dS est supposée constante, ce qu'il faut bien remarquer, car sans cela, la dernière équation serait déjà propre à nous fournir une solution parfaite, et nous n'aurions qu'à nous y arrêter et à en chercher l'intégrale.

§ 39. Mais n'ayant pas encore pris en considération la septième équation

$$(Axx+Byy+Czz+Mkk)\sqrt{u}=(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)\sqrt{g},$$

nous ne devons point nous étonner de ce que nous ne soyons pas encore arrivés à notre but. Substituons donc dans cette équation les valeurs trouvées de y et z et $\sqrt{u}=\frac{ds}{xxdS}$, et nous aurons

$$\frac{Ads}{dS}+\frac{Bds}{dS}\left(\frac{b}{a}+\mu S\right)^2+\frac{Cds}{dS}\left(\frac{c}{a}+\nu S\right)^2+\frac{Mkkds}{xxdS}=(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)\sqrt{g},$$

d'où nous tirerons la valeur de ds

$$\frac{ds}{dS}=\frac{(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)\sqrt{g}}{\frac{Mkk}{xx}+A+\frac{Bbb}{aa}+\frac{Ccc}{aa}+2\left(\frac{Bb\mu}{a}+\frac{Cc\nu}{a}\right)S+(B\mu^2+C\nu^2)SS}.$$

Soit pour abréger

$$Aa\sqrt{\alpha}+Bb\sqrt{\beta}+Cc\sqrt{\gamma}=Ef\sqrt{g},$$
$$Aaa+Bbb+Ccc=Dff,$$
$$A\alpha+B\beta+C\gamma=Fg,$$

nous aurons

$$A+\frac{Bbb}{aa}+\frac{Ccc}{aa}=\frac{Dff}{aa}, \quad \text{et puis}$$

$$\frac{Bb\mu+Cc\nu}{a}=Bb\sqrt{\beta}+Cc\sqrt{\gamma}-\frac{Bbb\sqrt{\alpha}-Ccc\sqrt{\alpha}}{a}=Ef\sqrt{g}-\frac{Dff\sqrt{\alpha}}{a} \quad \text{et}$$

$$B\mu^2+C\nu^2=Faag-2Eaf\sqrt{\alpha g}+Dff\alpha.$$

Substituant ces valeurs, nous obtiendrons

$$\frac{ds}{dS}=\frac{Dff\sqrt{g}}{\frac{Mkk}{xx}+\frac{Dff}{aa}+\frac{2f}{a}(Ea\sqrt{g}-Df\sqrt{\alpha})S+(Dff\alpha-2Eaf\sqrt{\alpha g}+Faag)SS}.$$

Ayant ainsi exprimé la valeur de ds en x et S, substituons la dans l'équation

$$ddx - \frac{2dx^2}{x} = \frac{xds^2}{ff},$$

et il en résultera l'équation suivante

$$\frac{ddx}{x} - \frac{2dx^2}{xx} = \frac{DDffgdS^2}{\left(\frac{Mkk}{xx} + \frac{Dff}{aa} + \frac{2f}{a}(Ea\sqrt{g} - Df\sqrt{a})\,S + (Dffa - 2Eaf\sqrt{ag} + Faag)\,SS\right)^2},$$

laquelle, ne renfermant que deux variables x et S (dS étant supposé constant), exprime le rapport entre x et S. Ceci étant trouvé, on aura ds, et par conséquent s. De là on déduira la vitesse $\sqrt{u}$, et enfin les valeurs de y, z, p, q et r, ainsi que la solution du problème l'exige.

§ 40. La même solution se trouvera plus aisément de la manière suivante. Recommençons par les trois équations différentielles du troisième degré

$$\text{I.}\quad \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2},\qquad \text{II.}\quad \frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2},\qquad \text{III.}\quad \frac{z}{ff} = \frac{ddz}{ds^2} + \frac{dudz}{2uds^2},$$

et supposons que la résolution de cette quatrième équation nous soit déjà connue

$$\frac{v}{ff} = \frac{ddv}{ds^2} + \frac{dudv}{2uds^2}.$$

Mettons maintenant $x = Tv$, et nous parviendrons à cette équation

$$0 = \frac{ddT}{dT} + \frac{2dv}{v} + \frac{du}{2u}$$

dont l'intégrale est $\varDelta ds = vvdT\sqrt{u}$, et partant

$$dT = \frac{\varDelta ds}{vv\sqrt{u}} \quad\text{et}\quad T = \text{Const.} + \varDelta\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}},\quad \text{d'où nous tirons}\quad x = iv + \lambda v\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}};$$

et en suivant pour y et z la même méthode, nous aurons

$$y = mv + \mu v\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}} \quad\text{et}\quad z = nv + \nu v\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}},$$

où l'intégrale $\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}$ doit être prise de la sorte qu'elle s'évanouisse dans le cas $s = 0$, et supposons que, dans ce même cas $s = 0$, c'est à dire au commencement, il soit $v = f$, nous aurons $a = if$, $b = mf$, $c = nf$, d'où nous tirerons les valeurs des constantes i, m, n, savoir

$$i = \frac{a}{f},\quad m = \frac{b}{f},\quad n = \frac{c}{f}.$$

§ 41. Pour déterminer les autres constantes λ, μ et ν, considérons les vitesses

$$\sqrt{p} = \frac{dx\sqrt{u}}{ds},\quad \sqrt{q} = \frac{dy\sqrt{u}}{ds},\quad \sqrt{r} = \frac{dz\sqrt{u}}{ds},\quad \text{et parce que}\quad dx = idv + \lambda dv\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}} + \frac{\lambda ds}{v\sqrt{u}},$$

nous aurons

$$\sqrt{p} = \frac{idv\sqrt{u}}{ds} + \frac{\lambda}{v} + \frac{\lambda dv\sqrt{u}}{ds}\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}};$$

Supposons maintenant, que dans le cas de $s=0$, il soit $\frac{dv}{ds}=0$, comme nous avons supposé antérieurement que, dans le même cas v soit $=f$, car l'équation différentio-différentielle

$$\frac{v}{ff}=\frac{ddv}{ds^2}+\frac{du\,dv}{2u\,ds^2}$$

requiert une double détermination pour être déterminée. Appliquons cette détermination au commencement où $s=0$, et nous aurons

$$\sqrt{\alpha}=\frac{\lambda}{f}, \quad \text{et partant} \quad \lambda=f\sqrt{\alpha};$$

et pareillement on trouvera $\mu=f\sqrt{\beta}$ et $\nu=f\sqrt{\gamma}$, et par conséquent, les trois quantités x, y, z seront exprimées ainsi qu'il suit

$$x=\frac{av}{f}+fv\sqrt{\alpha}\cdot\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}, \quad y=\frac{bv}{f}+fv\sqrt{\beta}\cdot\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}, \quad z=\frac{cv}{f}+fv\sqrt{\gamma}\cdot\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}},$$

où v doit être déterminé à l'aide de cette équation

$$\frac{v}{ff}=\frac{ddv}{ds^2}+\frac{du\,dv}{2u\,ds^2}$$

en sorte que supposant $s=0$, il devienne $\frac{dv}{ds}=0$ et $v=f$.

§ 42. Supposons à présent $\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}=\frac{t}{ff\sqrt{g}}$, et nous aurons

$$\frac{ds}{vv\sqrt{u}}=\frac{dt}{ff\sqrt{g}} \quad \text{et} \quad \sqrt{u}=\frac{ff\,ds\sqrt{g}}{vv\,dt};$$

or, ds étant constant, il s'en suit

$$\frac{du}{2u}=-\frac{2dv}{v}-\frac{ddt}{dt};$$

cette valeur substituée ci-dessus donnera

$$\frac{v}{ff}=\frac{ddv}{ds^2}-\frac{2dv^2}{v\,ds^2}-\frac{dv\,ddt}{dt\,ds^2}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{v\,ds}{ff}=d\cdot\frac{dv}{ds}-\frac{2dv^2}{v\,ds}-\frac{dv}{dt}\,d\cdot\frac{dt}{ds}.$$

Changeons à présent de constante, et supposons que l'élément dt soit constant, et nous aurons

$$\frac{v\,ds}{ff}=\frac{ddv}{ds}-\frac{2dv^2}{v\,ds},$$

équation qui contient trois variables: v, s et t. Les distances x, y, z seront exprimées ainsi qu'il suit

$$x=\frac{av}{f}+\frac{tv\sqrt{\alpha}}{f\sqrt{g}}, \quad y=\frac{bv}{f}+\frac{tv\sqrt{\beta}}{f\sqrt{g}}, \quad z=\frac{cv}{f}+\frac{tv\sqrt{\gamma}}{f\sqrt{g}};$$

les vitesses $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ et $\sqrt{r}$ obtiendront à leur tour les valeurs suivantes

$$\sqrt{p}=\frac{f\sqrt{\alpha}}{v}+\frac{f\,dv\,(a\sqrt{g}+t\sqrt{\alpha})}{vv\,dt}, \quad \sqrt{q}=\frac{f\sqrt{\beta}}{v}+\frac{f\,dv\,(b\sqrt{g}+t\sqrt{\beta})}{vv\,dt}, \quad \sqrt{r}=\frac{f\sqrt{\gamma}}{v}+\frac{f\,dv\,(c\sqrt{g}+t\sqrt{\gamma})}{vv\,dt}$$

§ 43. Considérons enfin la septième équation du § 29 qui est

$$(Axx + Byy + Czz + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g}$$

et qui, à cause de $\sqrt{u} = \frac{ffds\sqrt{g}}{vv\,dt}$, se change en celle-ci

$$Axx + Byy + Czz + Mkk = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\frac{vv\,dt}{ffds}$$

ou, en substituant pour x, y, z leurs valeurs respectives,

$$Mkk + \frac{vv}{ff}\left(Aaa + \frac{2Aat\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}} + \frac{A\alpha tt}{g}\right)$$

$$+ \frac{vv}{ff}\left(Bbb + \frac{2Bbt\sqrt{\beta}}{\sqrt{g}} + \frac{B\beta tt}{g}\right)$$

$$+ \frac{vv}{ff}\left(Ccc + \frac{2Cct\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}} + \frac{C\gamma tt}{g}\right) = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\frac{vv\,dt}{ffds}.$$

Soit, pour abréger comme auparavant

$$Aaa + Bbb + Ccc = Dff$$

$$Aa\sqrt{\alpha} + Bb\sqrt{\beta} + Cc\sqrt{\gamma} = Ef\sqrt{g}$$

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = Fg$$

et la dernière équation prendra la forme suivante

$$Mkk + Dvv + \frac{2Etvv}{f} + \frac{Fttvv}{ff} = \frac{Dvv\,dt}{ds} + \frac{Mkkvv\,dt}{ffds}$$

d'où il suit
$$ds = \frac{(Dff + Mkk)\,vv\,dt}{Mkkff + vv\,(Dff + 2Eft + Ftt)}.$$

Soit, pour rendre cette équation plus commode, $v = \frac{f}{\varphi}$, et nous aurons

$$ds = \frac{(Dff + Mkk)\,dt}{Mkk\varphi\varphi + Dff + 2Eft + Ftt}.$$

Mais on aura
$$dv = \frac{-f\,d\varphi}{\varphi^2} \quad \text{et} \quad ddv = \frac{-f\,dd\varphi}{\varphi^2} + \frac{2f\,d\varphi^2}{\varphi^3},$$

et partant
$$\frac{ddv}{v} = \frac{-dd\varphi}{\varphi} + \frac{2d\varphi^2}{\varphi^2} \quad \text{et} \quad \frac{2dv^2}{v^2} = \frac{2d\varphi^2}{\varphi^2}.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\frac{ds^2}{ff} = \frac{ddv}{v} - \frac{2dv^2}{v^2} = \frac{-dd\varphi}{\varphi},$$

d'où résultera cette équation finale

$$\frac{ffdd\varphi}{\varphi} + \frac{(Dff + Mkk)^2\,dt^2}{(Mkk\varphi\varphi + Dff + 2Eft + Ftt)^2} = 0$$

laquelle, ne contenant que deux variables φ et t, et l'un des éléments, dt, étant supposé constant,

*

exprime le rapport entre φ et t. Mais ayant déterminé φ, et par conséquent $v = \frac{f}{\varphi}$ par [...] sera aussi donné par t, et finalement, on aura les valeurs de x, y, z, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ ainsi $\sqrt{u} = \frac{ffds\sqrt{g}}{vvdt}$, toutes déterminées par la seule variable t. Le problème proposé sera, par conséqu[ent] résolu.

§ 44. Ne voyant pas encore, comment l'équation dernièrement trouvée puisse être résolue, j'a[p]pliquerai la solution à un cas digne de considération, en supposant l'inertie du tube évanouissan[te]. Soit donc $M = 0$, et nous aurons

$$\frac{dd\varphi}{\varphi} + \frac{DDffdt^2}{(Dff + 2Eft + Ftt)^2} = 0.$$

Pour trouver l'intégrale de cette équation, supposons $\varphi = e^{\int \psi dt}$, et nous aurons

$$\frac{dd\varphi}{\varphi dt} = d\psi + \psi\psi dt,$$

et partant nous obtiendrons cette équation différentielle

$$d\psi + \psi\psi dt + \frac{DDffdt}{(Dff + 2Eft + Ftt)^2} = 0,$$

d'où il est clair que, si cette équation admet l'intégration, la valeur de ψ aura la forme suivan[te]

$$\psi = \frac{\zeta + \eta t}{Dff + 2Eft + Ftt}.$$

Supposant donc cette forme, nous aurons

$$d\psi = \frac{Dff\eta dt - 2Ef\zeta dt - 2F\zeta tdt - F\eta ttdt}{(Dff + 2Eft + Ftt)^2}, \quad \psi\psi dt = \frac{\zeta\zeta dt + 2\zeta\eta tdt + \eta\eta ttdt}{(Dff + 2Eft + Ftt)^2},$$

et partant il doit y avoir

$$\zeta\zeta + Dff\eta - 2Ef\zeta + DDff = 0, \quad \zeta\eta - F\zeta = 0, \quad \eta\eta - F\eta = 0;$$

d'où nous tirons, pour satisfaire aux deux dernières égalités, $\eta = F$, et de la première

$$\zeta = Ef \pm f\sqrt{(EE - DF - DD)}$$

ce qui nous donne pour ψdt cette expression

$$\psi dt = \frac{\pm fdt\sqrt{(EE - DF - DD)} + Efdt + Ftdt}{Dff + 2Eft + Ftt}$$

donc

$$\int \psi dt = l.\sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)} \pm \int \frac{fdt\sqrt{(EE - DF - DD)}}{Dff + 2Eft + Ftt}.$$

§ 45. Mais l'équation qui exprime la valeur de ds nous donne

$$ds = \frac{Dffdt}{Dff + 2Eft + Ftt}$$

où DF étant $> EE$, comme il est bien facile de se convaincre, l'intégrale sera

$$s = \frac{Df}{\sqrt{(DF - EE)}} \text{ Arc tang } \frac{t\sqrt{(DF - EE)}}{Df + Et}.$$

Soit $\sqrt{(DF - EE)} = G$, et nous aurons

$$\frac{Gt}{Df + Et} = \operatorname{tang}\frac{Gs}{Df}; \quad \frac{Gt}{\sqrt{D(Dff + 2Eft + Ftt)}} = \sin\frac{Gs}{Df} \quad \text{et} \quad \frac{Df + Et}{\sqrt{D(Dff + 2Eft + Ftt)}} = \cos\frac{Gs}{Df}$$

et enfin

$$t = \frac{Df \operatorname{tang}\frac{Gs}{Df}}{G - E\operatorname{tang}\frac{Gs}{Df}} = \frac{Df \sin\frac{Gs}{Df}}{G\cos\frac{Gs}{Df} - E\sin\frac{Gs}{Df}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)} = \frac{Gf\sqrt{D}}{G\cos\frac{Gs}{Df} - E\sin\frac{Gs}{Df}}.$$

§ 46. Parce que $DF > EE$, il est clair que $\sqrt{(EE - DF - DD)}$ est une quantité imaginaire, c'est pourquoi il faut chercher l'intégrale de $\frac{fdt\sqrt{(EE - DF - DD)}}{Dff + 2Eft + Ftt}$ par les logarithmes imaginaires, laquelle sera

$$\frac{\sqrt{(DD + GG)}}{2G}\, l.\, \frac{Ft + Ef - Gf\sqrt{-1}}{Ft + Ef + Gf\sqrt{-1}}.$$

Ayant trouvé la valeur de $\int \psi dt$ par des logarithmes, nous aurons en nombres

$$\varphi = e^{\int \psi dt} = J\left(\frac{Ft + Ef - Gf\sqrt{-1}}{Ft + Ef + Gf\sqrt{-1}}\right)^{\frac{\sqrt{(DD + GG)}}{2G}} \sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)}.$$

Mais cette valeur étant encore imaginaire, parce que

$$\frac{fdt\sqrt{(EE - DF - DD)}}{Dff + 2Eft + Ftt} = \frac{ds\sqrt{(EE - DF - DD)}}{Df}$$

supposant $\sqrt{(DF - EE + DD)} = \sqrt{(GG + DD)} = H$, nous aurons

$$\int \psi dt = l.\sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)} + \frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}, \quad \text{et partant} \quad \varphi = e^{\int \psi dt} = Je^{\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}}\sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)};$$

toutes ces valeurs étant imaginaires, elles nous prouvent que le cas particulier de l'intégrale de l'équation

$$\frac{dd\varphi}{\varphi} + \frac{DDffdt^2}{(Dff + 2Eft + Ftt)^2} = 0$$

ne convient pas à notre dessein: Nous sommes donc obligés d'en chercher une intégrale plus générale.

§ 47. L'exposant $\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}$ pouvant aussi être pris négativement, nous avons encore une autre intégrale particulière, savoir

$$\varphi = Ke^{\frac{-Hs\sqrt{-1}}{Df}}\sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)}$$

et de ces deux intégrales particulières, en les ajoutant ensemble, nous obtiendrons l'intégrale complète

$$\varphi = \left(Je^{\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}} + Ke^{\frac{-Hs\sqrt{-1}}{Df}}\right)\sqrt{(Dff + 2Eft + Ftt)}$$

laquelle, quoique les exposants soient imaginaires, ne manque pas de renfermer des quantités réelles, pourvu que l'on donne aux constantes J et K des valeurs propres pour cela. Soit $J=\zeta+\eta\sqrt{-1}$ et $K=\zeta-\eta\sqrt{-1}$, et l'expression

$$Je^{\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}}+Ke^{\frac{-Hs\sqrt{-1}}{Df}} \text{ se changera en celle-ci } 2\zeta\cos\frac{Hs}{Df}+2\eta\sin\frac{Hs}{Df}.$$

Substituons maintenant aussi à la place de $\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}$ sa valeur trouvée en s, et nous aurons, en changeant la forme des constantes encore arbitraires

$$\varphi=\frac{\mu\cos\frac{Hs}{Df}+\nu\sin\frac{Hs}{Df}}{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}, \text{ et par conséquent } v=\frac{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}{\mu\cos\frac{Hs}{Df}+\nu\sin\frac{Hs}{Df}}f.$$

Les constantes μ et ν se détermineront par les conditions requises au § 41, en vertu desquelles posant $s=0$, il doit être $v=f$ et $\frac{dv}{ds}=0$. Supposant donc $s=0$, nous aurons $f=\frac{Gf}{\mu}$, et par- $\mu=G$. Ensuite, en prenant les différentielles et omettant les sinus qui, pour $s=0$ s'évanouissent, on aura

$$\frac{dv}{ds}=\frac{-(\mu EG+\nu GH)\cos\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df}}{D\left(\mu\cos\frac{Hs}{Df}+\nu\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2}$$

dont la valeur devant être $=0$, pour $s=0$, nous aurons $\mu EG+\nu GH=0$, ou $\nu=\frac{-\mu E}{H}=$ et par conséquent il y aura

$$v=\frac{GH\cos\frac{Gs}{Df}-EH\sin\frac{Gs}{Df}}{GH\cos\frac{Hs}{Df}-EG\sin\frac{Hs}{Df}}f.$$

§ 48. Ayant ainsi trouvé la valeur de v, nous aurons

$$\frac{v}{f}=\frac{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}}\cdot\frac{H}{G}, \qquad \frac{tv}{f}=\frac{Df\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}}\cdot\frac{H}{G},$$

et ces expressions serviront à déterminer x, y et z. Pour trouver d'abord la valeur de $\sqrt{u}$, nous aurons

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\left(G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}\right)^2}{GG} \quad \text{et} \quad \frac{ffds}{vvdt}=\frac{\left(H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2}{HH},$$

et de là nous trouvons

$$\sqrt{u}=\frac{ffds\sqrt{g}}{vvdt}=\frac{\left(H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2\sqrt{g}}{HH}$$

$$x = \frac{H}{G} \cdot \frac{Ga\cos\frac{Gs}{Df} - Ea\sin\frac{Gs}{Df} + \frac{Df\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}}\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}},$$

et ensuite

$$y = \frac{H}{G} \cdot \frac{Gb\cos\frac{Gs}{Df} - Eb\sin\frac{Gs}{Df} + \frac{Df\sqrt{\beta}}{\sqrt{g}}\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}},$$

$$z = \frac{H}{G} \cdot \frac{Gc\cos\frac{Gs}{Df} - Ec\sin\frac{Gs}{Df} + \frac{Df\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}}\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}}.$$

Enfin, puisque $\sqrt{p} = \frac{dx\sqrt{u}}{ds}$, nous aurons

$$\sqrt{p} = \sqrt{\alpha}\cos\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df} + \left(\frac{H\sqrt{\alpha}}{G} - \frac{DEa\sqrt{g}}{GHf}\right)\sin\frac{Gs}{Df}\sin\frac{Hs}{Df} +$$
$$\left(\frac{E\sqrt{\alpha}}{G} - \frac{(GG+EE)\,a\sqrt{g}}{DGf}\right)\sin\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df} - \left(\frac{E\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{(EE+HH)\,a\sqrt{g}}{DHf}\right)\cos\frac{Gs}{Df}\sin\frac{Hs}{Df}$$

et pareillement

$$\sqrt{q} = \sqrt{\beta}\cos\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df} + \left(\frac{H\sqrt{\beta}}{G} - \frac{DEb\sqrt{g}}{GHf}\right)\sin\frac{Gs}{Df}\sin\frac{Hs}{Df} +$$
$$\left(\frac{E\sqrt{\beta}}{G} - \frac{(GG+EE)\,b\sqrt{g}}{DGf}\right)\sin\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df} - \left(\frac{E\sqrt{\beta}}{H} - \frac{(EE+HH)\,b\sqrt{g}}{DHf}\right)\cos\frac{Gs}{Df}\sin\frac{Hs}{Df}$$

et enfin

$$\sqrt{r} = \sqrt{\gamma}\cos\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df} + \left(\frac{H\sqrt{\gamma}}{G} - \frac{DEc\sqrt{g}}{GHf}\right)\sin\frac{Gs}{Df}\sin\frac{Hs}{Df} +$$
$$\left(\frac{E\sqrt{\gamma}}{G} - \frac{(GG+EE)\,c\sqrt{g}}{DGf}\right)\sin\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df} - \left(\frac{E\sqrt{\gamma}}{H} - \frac{(EE+HH)\,c\sqrt{g}}{DHf}\right)\cos\frac{Gs}{Df}\sin\frac{Hs}{Df}.$$

§ 49. Voici donc la solution entière du problème proposé pour le cas où l'inertie du tube s'évanouit; car pour chaque situation du tube, où l'angle $FOS = \frac{s}{f}$, j'ai déterminé les places des corps renfermés dans le tube, x, y, z, de même que leurs vitesses $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, avec celle du tube $\sqrt{u}$. Outre cela, il sera aisé de déterminer le temps dans lequel le tube parcourt l'angle FOS, car l'élément de ce temps étant

$$= \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{HH\,ds}{\left(H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2\sqrt{g}},$$

son intégrale, qui est

$$\frac{\frac{Df}{\sqrt{g}}\sin\frac{Hs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}}$$

exprimera le temps dans lequel le tube, depuis le commencement, est parvenu en OS, et par conséquent, rien ne manque à la solution complète que je viens de donner.

Supplément.

La solution du second problème peut s'opérer encore plus aisément de la manière suiva[nte]. Ayant trouvé dans le § 29 les équations que voici

$$\text{I.}\quad \frac{dx}{\sqrt{p}}=\frac{ds}{\sqrt{u}},\qquad \text{II.}\quad \frac{dy}{\sqrt{q}}=\frac{ds}{\sqrt{u}},\qquad \text{III.}\quad \frac{dz}{\sqrt{r}}=\frac{ds}{\sqrt{u}},$$

$$\text{IV.}\quad ffdp=2uxdx,\qquad \text{V.}\quad ffdq=2uydy,\qquad \text{VI.}\quad ffdr=2uzdz,$$

$$\text{VII.}\quad (Axx+Byy+Czz+Mkk)\sqrt{u}=(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)\sqrt{g}$$

supposons l'élément du temps $=dt$, nous aurons

$$\frac{ds}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{\sqrt{p}}=\frac{dy}{\sqrt{q}}=\frac{dz}{\sqrt{r}}=dt \qquad \text{et partant}$$

$$u=\frac{ds^2}{dt^2},\quad p=\frac{dx^2}{dt^2},\quad q=\frac{dy^2}{dt^2}\quad \text{et}\quad r=\frac{dz^2}{dt^2}.$$

Supposons maintenant dt constant, et nous obtiendrons

$$ffddx=xds^2,\quad ffddy=yds^2,\quad ffddz=zds^2$$

et pour la septième équation nous aurons celle-ci

$$(Axx+Byy+Czz+Mkk)ds=(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)dt\sqrt{g}.$$

Mais la conservation des forces vives a donné au § 30

$$ff(Adx^2+Bdy^2+Cdz^2)+ds^2(Axx+Byy+Czz+Mkk)=$$
$$ffdt^2(A\alpha+B\beta+C\gamma)+gdt^2(Aaa+Bbb+Ccc+Mkk)$$

laquelle, en y substituant pour ds^2 ses valeurs données ci-dessus, se change en celle-ci

$$ff(Adx^2+Axddx+Bdy^2+Byddy+Cdz^2+Czddz)+Mkkds^2=Fgffdt^2+Dgffdt^2+Mgk[k\ldots]$$

mais $Adx^2+Axddx+Bdy^2+Byddy+Cdz^2+Czddz$ étant la moitié de la différentio-diffé[ren]tielle de $Axx+Byy+Czz+Mkk=\frac{Dffdt\sqrt{g}}{ds}$, nous aurons

$$\frac{Dff\sqrt{g}}{2}dd\cdot\frac{dt}{ds}+\frac{Mkkds^2}{ff}=\left(Dg+Fg+\frac{Mkkg}{ff}\right)dt^2.$$

Soit $ds=\frac{dt}{v}$, pour avoir

$$Dffddv+\frac{2Mkkdt^2}{ffvv\sqrt{g}}=2\left(D+F+\frac{Mkk}{ff}\right)dt^2\sqrt{g}.$$

Soit $dt = \varphi dv$, et l'on aura $ddv = -\frac{d\varphi dv}{\varphi}$, et par conséquent nous obtiendrons cette équation:

$$\frac{-Dffd\varphi}{\varphi} + \frac{2Mkk\varphi\varphi dv}{ffvv\sqrt{g}} = 2\left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right)\varphi\varphi dv\sqrt{g}, \quad \text{ou bien}$$

$$\frac{-Dffd\varphi}{2\varphi^3} + \frac{Mkkdv}{ffvv\sqrt{g}} = \left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right) dv\sqrt{g},$$

laquelle étant intégrable, donnera

$$\frac{Dff}{\varphi\varphi} - \frac{Mkk}{ffv\sqrt{g}} = \left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right) v\sqrt{g} + \Delta$$

$$\text{ou} \quad \frac{Dff}{\varphi\varphi} = \frac{Mkk + (Dff + Fff + Mkk)gvv + \Delta ffv\sqrt{g}}{ffv\sqrt{g}}$$

par conséquent

$$\varphi = \frac{ff\sqrt{(Dv\sqrt{g})}}{\sqrt{(Mkk + \Delta ffv\sqrt{g} + (Mkk + Dff + Fff)gvv)}}$$

et

$$t = \int \frac{ffdv\sqrt{(Dv\sqrt{g})}}{\sqrt{(Mkk + \Delta ffv\sqrt{g} + (Mkk + Dff + Fff)gvv)}}$$

et

$$s = \int \frac{ffdv\sqrt{(Dv\sqrt{g})}}{v\sqrt{(Mkk + \Delta ffv\sqrt{g} + (Mkk + Dff + Fff)gvv)}}.$$

Or, nous avions au commencement du mouvement $dt = \frac{ds}{\sqrt{g}}$ et $t = 0$, partant $v = \frac{1}{\sqrt{g}}$, mais

$$v = \frac{Axx + Byy + Czz + Mkk}{Dff\sqrt{g}}, \quad \text{donc} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{2Axdx + 2Bydy + 2Czdz}{Dffdt\sqrt{g}}.$$

Mais au commencement il y a $x = a$, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\alpha}$ etc. donc $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2E}{Df}$, et par conséquent

$$\Delta = \frac{4EE}{D} + \frac{2Mkk}{ff} - D - F.$$

Mais lorsque $v = \frac{1}{\sqrt{g}}$, il doit y avoir $t = 0$ et $s = 0$, par quoi les intégrations étant définies, on pourra, pour chaque moment t, déterminer la situation du tube s. Ensuite, les places des corps se trouveront par ces équations:

$$ffd \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{xds^2}{dt} = \frac{xdt}{vv}.$$