XX.

Considérations sur quelques formules intégrales, dont les valeurs peuvent être exprimées, en certains cas, par la quadrature du cercle.

1. Toute formule différentielle rationelle peut être intégrée par le moyen des logarithmes et de la quadrature du cercle. Or ces intégrales sont, pour la plupart, renfermées dans des formules d'autant plus compliquées, que la variable contient de dimensions; cependant quand on donne à la variable, après l'intégration, une certaine valeur déterminée, il peut arriver que les intégrales, quelque compliquées qu'elles soient, se réduisent à des formules assez simples, qui semblent mériter une attention particulière. Il y a aussi des formules intégrales qui, en général, surpassent toutes les quadratures connues, et qui, cependant, en certains cas, sont réductibles à la quadrature du cercle. Je me propose ici de considérer quelques-unes de ces formules, et d'examiner les conséquences qu'on en peut tirer pour l'avancement de l'analyse.

2. Je commencerai par considérer cette formule intégrale $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$, en cherchant son intégrale dans le cas, où l'on pose après l'intégration $x=\infty$, ayant pris l'intégrale en sorte, qu'elle s'évanouisse en posant $x=0$. Dans ce cas, on trouvera que la partie de l'intégrale qui dépend des logarithmes s'évanouit, et que l'autre, qui dépend de la quadrature du cercle, se réduit à une expression fort simple. Car posant π pour la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est $=1$, de sorte que π marque en même temps la mesure de deux angles droits, on trouve, en posant après l'intégration $x=\infty$:

$$\int \frac{dx}{1+xx}=\frac{\pi}{2};\quad \int \frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}};\quad \int \frac{x\,dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

$$\int \frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};\quad \int \frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{4};\quad \int \frac{xx\,dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

$$\int \frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3};\quad \int \frac{x\,dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};\quad \int \frac{xx\,dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{6};\quad \int \frac{x^3\,dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};\quad \int \frac{x^4\,dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3}.$$

3. Ces cas particuliers semblent déjà suffisants pour pouvoir en tirer, par la voie d'induction, une conclusion plus générale. Car, dans les cas du dénominateur $1+x^3$, le radical $\sqrt{3}$ fait voir que le sinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$ y entre; et dans ceux des dénominateurs $1+x^4$, le radical $\sqrt{2}$ y est

sans doute, parce que $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ce même soupçon se confirme par les cas où le dénominateur est $1 + x^6$. De là nous pouvons conclure qu'il y aura

$$\int \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

et encore plus généralement

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}};$$

pourvu que le nombre m ne surpasse pas n. Car dans les cas où $m > n$, on sait d'ailleurs que ces formules demandent un développement particulier, puisque leur intégrale renferme alors une partie algébrique.

4. Cette conclusion se trouve tout à fait confirmée, quand on se donne la peine de développer l'intégrale des formules

$$\int \frac{dx}{1 + x^5}, \quad \int \frac{x\,dx}{1 + x^5}, \quad \int \frac{xx\,dx}{1 + x^5}, \quad \text{etc.},$$

de sorte qu'il ne saurait rester aucun doute là-dessus. On remarque encore un parfait accord dans les cas où $m = n$: car, puisque alors $\sin\frac{m\pi}{n} = \sin \pi = 0$, l'intégrale dans le cas $x = \infty$ devient effectivement infinie; ce qui est évident, car

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1 + x^n} = \frac{1}{n}\, l\,(1 + x^n),$$

et posant $x = \infty$, la valeur de l'intégrale devient infinie. Le même accord s'observe lorsque $n = 2m$, et partant $\sin\frac{m\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, car il est clair que

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1 + x^{2m}} = \frac{\pi}{2m},$$

en posant $x = \infty$. On n'a qu'à mettre $x^m = y$, pour avoir

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1 + x^{2m}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{1 + yy} = \frac{1}{m}\,\text{arc. tang}\, y;$$

maintenant posant $x = \infty$ et partant aussi $y = \infty$, à cause de arc. tang $\infty = \frac{\pi}{2}$, l'intégrale sera $= \frac{\pi}{2m}$. Ce sera donc une vérité suffisamment constatée, que

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

en posant après l'intégration $x = \infty$, pourvu que m ne soit pas plus grand que n.

5. Cependant cette vérité se peut aussi déduire de l'intégration indéfinie de la formule $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1 + x^n}$ dont l'intégrale se trouve exprimée en sorte:

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\, l\left(1 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + xx\right) + \frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\,\text{arc. tang}\,\frac{x \sin\frac{\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\,l\left(1-2x\cos\frac{3\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\,l\left(1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{7m\pi}{n}\,l\left(1-2x\cos\frac{7\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{7m\pi}{n}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{7\pi}{n}}{1-x\cos\frac{7\pi}{n}}\quad\text{etc.}$$

et il faut continuer ces formules, jusqu'à ce que l'angle $\frac{i\pi}{n}$, où i marque un nombre impair quelconque, commence à surpasser π. Or quand n est un nombre impair et que, dans le dernier membre, on a $i=n$, et partant $\cos\frac{i\pi}{n}=-1$, il ne faut prendre que la moitié du dernier membre, ou mettre $l(1+x)$ au lieu de $l(1+2x+xx)$.

6. Tirons de là les intégrales pour les cas particuliers, et d'abord si $n=1$ et $m=1$, nous aurons:

$$\int\frac{dx}{1+x}=l(1+x).$$

II. Soit $n=2$ et nous aurons:

$$\text{si } m=1:\int\frac{dx}{1+xx}=\frac{2}{2}\sin\frac{\pi}{2}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{2}}{1-x\cos\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{si } m=2:\int\frac{xdx}{1+xx}=\frac{1}{2}\,l(1+xx).$$

III. Soit $n=3$ et nous aurons:

$$\text{si } m=1:\int\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,l(1+x),$$

$$\text{si } m=2:\int\frac{xdx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$-\frac{1}{3}\cos\frac{6\pi}{3}\,l(1+x),$$

$$\text{si } m=3:\int\frac{xxdx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{3}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$-\frac{1}{3}\cos\frac{9\pi}{3}\,l(1+x),$$

ou bien à cause de:

$$\cos\frac{3\pi}{3}=-1;\quad\cos\frac{2\pi}{3}=-1\quad\text{et}\quad\sin\frac{3\pi}{3}=0\quad\text{et}\quad\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\int\frac{xxdx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\,l(1-x+xx)+\frac{1}{3}\,l(1+x)=\frac{1}{3}\,l(1+x^3).$$

7. Dans tous ces cas particuliers, il est aisé de voir que posant $x=\infty$, les intégrales deviennent parfaitement d'accord avec la formule générale donneé ci-dessus; mais pour démontrer son accord en général, il faut faire voir que toutes les parties logarithmiques se détruisent nécessairement, et que les autres, qui renferment des arcs de cercle, se réduisent à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. Pour cet effet, il faut ici distinguer deux cas, selon que n est un nombre pair ou impair. Soit donc premièrement $n=2k$, et posant $x=\infty$, puisque tous les logarithmes deviennent égaux, il faut montrer que la somme de cette progression est égale à 0:

$$\cos\frac{m\pi}{2k}+\cos\frac{3m\pi}{2k}+\cos\frac{5m\pi}{2k}\ldots\ldots+\cos\frac{(2k-5)m\pi}{2k}+\cos\frac{(2k-3)m\pi}{2k}+\cos\frac{(2k-1)m\pi}{2k},$$

m étant un nombre entier. Posons pour abréger $\frac{m\pi}{2k}=\varphi$, et il s'agit de démontrer que

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi=0.$$

8. Posons, pour chercher la somme de cette progression,

$$S=\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi,$$

et multipliant par $\sin\varphi$, à cause de $\sin\varphi\cos\alpha\varphi=-\frac{1}{2}\sin(\alpha-1)\varphi+\frac{1}{2}\sin(\alpha+1)\varphi$, nous aurons:

$$S\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 4\varphi+\frac{1}{2}\sin 6\varphi\ldots\ldots+\frac{1}{2}\sin(2k-2)\varphi+\frac{1}{2}\sin 2k\varphi,$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\sin 4\varphi-\frac{1}{2}\sin 6\varphi\ldots\ldots-\frac{1}{2}\sin(2k-2)\varphi,$$

et puisque tous les termes à l'exception du dernier se détruisent

$$S\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2k\varphi \quad \text{donc} \quad S=\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Or, ayant $\varphi=\frac{m\pi}{2k}$, nous aurons $2k\varphi=m\pi$, et puisque m est un nombre entier

$$\sin 2k\varphi=\sin m\pi=0,$$

de sorte que la somme de la progression proposée est effectivement $=0$. Si le nombre n est impair, $=2k+1$, posant $\frac{m\pi}{2k+1}=\varphi$, il faut démontrer que:

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi+\frac{1}{2}\cos m\pi=0.$$

Or, par la sommation précédente, cette somme est

$$\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}+\frac{1}{2}\cos m\pi=\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}+\frac{1}{2}\cos(2k+1)\varphi,$$

et à cause de $\quad \sin 2k\varphi=\sin(2k+1)\varphi\cos\varphi-\cos(2k+1)\varphi\sin\varphi$

cette somme sera $\quad =\frac{\sin(2k+1)\varphi\cos\varphi}{2\sin\varphi}.$

Mais puisque $(2k+1)\varphi=m\pi$, il est évident que cette somme est égale à zéro.

9. Ayant donc démontré, que posant $x=\infty$, les parties logarithmiques de notre intégrale $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ se détruisent, il faut chercher la valeur totale des parties qui renferment les arcs de

*

cercle. Or, chacun de ces arcs étant compris dans cette somme arc. tang $\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$, on voit que posant $x=0$ ces arcs s'évanouissent, comme la condition de l'intégration l'exige; ensuite, en augmentant x jusqu'à la valeur $x=\frac{1}{\cos\varphi}$, cet angle devient droit, et si l'on augmente x au delà, il faut qu'il devienne obtus. Donc, posant $x=\infty$, on aura arc. tang $\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}=$ arc. tang $\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}=\pi-\varphi$ et partant, toutes les parties qui renferment des arcs de cercle, prises ensemble, seront:

$$\frac{2}{n}\pi\left(\sin\frac{m\pi}{n}+\sin\frac{3m\pi}{n}+\sin\frac{5m\pi}{n}+\sin\frac{7m\pi}{n}\ \text{etc.}\right),$$

$$-\frac{2\pi}{nn}\left(\sin\frac{m\pi}{n}+3\sin\frac{3m\pi}{n}+5\sin\frac{5m\pi}{n}+7\sin\frac{7m\pi}{n}\ \text{etc.}\right).$$

Il s'agit donc de trouver la somme de ces deux progressions.

10. Soit premièrement n un nombre pair ou $n=2k$ et posant $\frac{m\pi}{2k}=\varphi$, la première progression sera:

$$\sin\varphi+\sin 3\varphi+\sin 5\varphi\ldots\ldots+\sin(2k-1)\varphi=s,$$

laquelle, étant multiplieé par $\sin\varphi$, donne:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}\cos 4\varphi-\frac{1}{2}\cos 6\varphi\ldots-\frac{1}{2}\cos 2k\varphi\\ \quad+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi+\frac{1}{2}\cos 6\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=s\sin\varphi$$

d'où l'on tire

$$s=\frac{1-\cos 2k\varphi}{2\sin\varphi}=\frac{1-\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2k}}.$$

Or, ayant trouvé ci-dessus:

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi=\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi},$$

la différentiation donne:

$$\sin\varphi+3\sin 3\varphi+5\sin 5\varphi\ldots\ldots+(2k-1)\sin(2k-1)\varphi=\frac{-2k\cos 2k\varphi}{2\sin\varphi}+\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin^2\varphi}.$$

Posons maintenant $\varphi=\frac{m\pi}{n}$, et à cause de $2k=n$, nos deux progressions seront:

$$\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{1-\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{2\pi}{nn}\left(\frac{-n\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}+\frac{\sin m\pi}{2\sin^2\frac{m\pi}{n}}\right)$$

dont la réduction donne:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\left(1-\frac{\sin m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},\ \text{à cause de}\ \sin m\pi=0.$$

La même valeur se trouve, quand n est un nombre impair.

11. Voilà donc incontestablement démontré que l'intégrale de notre formule différentielle $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ en posant $x=\infty$ est $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, ainsi que nous l'avons déjà conclu par induction. La même valeur aura donc aussi lieu de quelque manière qu'on transforme la formule différentielle

sons donc $x = \frac{z}{\sqrt[n]{(1-z^n)}}$ où l'on remarque que posant $z = 0$, on a aussi $x = 0$; mais x croît l'infini en posant $z = 1$, et nous aurons

$$dx = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^{n+1}}}, \quad 1 + x^n = \frac{1}{1-z^n}; \text{ donc}$$

$$\frac{dx}{1+x^n} = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)}} \quad \text{et} \quad \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}.$$

· conséquent, posant après l'intégration $z = 1$, après avoir pris l'intégrale en sorte qu'elle s'éva- ıisse au cas $z = 0$, on aura, pourvu que m ne surpasse pas n,

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

12. De là nous tirons, pour des cas particuliers, les suivantes valeurs intégrales, posant jours, après l'intégration $z = 1$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}}; \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{2\pi}{3}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}}; \quad \int \frac{zz\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^3)^3}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{3\pi}{4}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}}; \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^2}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{zz\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^3}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{3\pi}{5}}; \quad \int \frac{z^3\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{4\pi}{5}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{6}}; \quad \int \frac{z^4\,dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)^5}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{5\pi}{6}}.$$

intégrales sont d'autant plus remarquables, qu'il nous manque encore des méthodes pour les ıver assez promptement; car la sommation des progressions dont je me suis servi, paraît un peu étrangère à ce sujet.

13. Puisque donc $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ est égal à cette intégrale $\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}$ posant $z = 1$, cherchons la ıur de cette intégrale par une série, qui, à cause de

$$(1 - z^n)^{\frac{-m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} z^n + \frac{m(m+n)}{n \cdot 2n} z^{2n} + \text{etc.},$$

'nira pour $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$, cette série:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{m}{n(m+n)}+\frac{m(m+n)}{n.2n(m+2n)}+\frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n(m+3n)}\text{ etc.}$$

Ensuite la même formule intégrale pouvant être exprimée par le produit d'une infinité de facteurs, nous aurons aussi

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{4nn}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)}\text{ etc.,}$$

l'une et l'autre expression étant continuée à l'infini. De là, prenant $m=1$ et $n=2$, à cause de $\sin\frac{\pi}{2}=1$, nous tirons d'abord l'expression de Wallis pour la quadrature du cercle

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdot\frac{8.8}{7.9}\cdot\frac{10.10}{9.11}\text{ etc.}$$

Or, mettant $m=1$ et $n=6$, à cause de $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{6.\ 6}{1.11}\cdot\frac{12.12}{7.17}\cdot\frac{18.18}{13.23}\cdot\frac{24.24}{19.29}\text{ etc., ou bien}$$

$$\pi=\frac{18}{5}\cdot\frac{6.12}{7.11}\cdot\frac{12.18}{13.17}\cdot\frac{18.24}{19.23}\cdot\frac{24.30}{25.29}\text{ etc.}$$

14. Ces produits étant les mêmes que ceux que j'ai trouvés dans mon Introduction, nous voyons déjà une autre route qui nous pouvait conduire à la découverte de ces intégrales. Or j'avais trouvé:

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{mm}{16nn}\right)\text{ etc.,}$$

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\left(1-\frac{4mm}{nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{25nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{49nn}\right)\text{ etc.,}$$

formules dont la 1re donne

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{nn}{(n-m)(n+m)}\cdot\frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)}\cdot\frac{9nn}{(3n-m)(3n+m)}\text{ etc.,}$$

ou, si nous mettons $n-m$ au lieu de m, puisque $\sin\frac{(n-m)\pi}{n}=\sin\frac{m\pi}{n}$, nous aurons:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{4nn}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)}\text{ etc.,}$$

qui est la même que celle que nous venons de trouver. Nous serions donc parvenus aux mêmes intégrations, si nous avions d'abord cherché une formule intégrale dont la valeur, dans un certain cas, serait égale à ce produit infini de facteurs. Or, j'avais autrefois donné une méthode pour exprimer la valeur de quelques formules intégrales, en certains cas, par de tels produits, et il ne s'agit à cette heure, que de renverser cette méthode et de passer de tels produits à des formules intégrales.

15. Or, j'avais démontré que posant après l'intégration $x=1$, il y aura:

$$\int x^{\alpha-1}dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}=\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)}\cdot\frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)}\cdot\frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)}\text{ etc.,}$$

ensuite, j'avais aussi exprimé le rapport de deux formules intégrales par un tel produit, et posant après l'intégration $x=1$, on aura

$$\frac{\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}=\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)}\cdot\frac{(\beta+\mu)(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(\beta+\nu+\mu)}\cdot\frac{(\beta+2\mu)(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(\beta+\nu+2\mu)}\ \text{etc.}$$

et encore plus généralement:

$$\frac{\int x^{\alpha-1}\,dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}\,dx(1-x^{\mu})^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}}=\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{\beta(\alpha+\nu)(\lambda+\mu)}{\alpha(\beta+\lambda)(\nu+\mu)}\cdot\frac{(\beta+\mu)(\alpha+\nu+\mu)(\lambda+2\mu)}{(\alpha+\mu)(\beta+\lambda+\mu)(\nu+2\;\,)}\cdot\frac{(\beta+2\mu)(\alpha+\nu+2\mu)(\lambda+3\mu)}{(\alpha+2\mu)(\beta+\lambda+2\mu)(\nu+3\mu)}\ \text{etc.}$$

Donc un tel produit étant proposé, on pourra réciproquement trouver une formule intégrale, ou le rapport de deux, dont la valeur au cas $x=1$ lui soit égale.

16. Soit donc proposé ce produit infini

$$\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{2n\,.\,2n}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{3n\,.\,3n}{(m+2n)(4n-m)}\ \text{etc.},$$

dont nous savons la valeur $=\frac{(n-m)\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, et que nous composerons avec celui-ci:

$$\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)}\cdot\frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)}\cdot\frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)}\ \text{etc.},$$

dont la valeur est $=\nu\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}$ au cas $x=1$; et puisque l'accroissement des facteurs est là $=n$, et ici $=\mu$, nous aurons d'abord $\mu=n$, donc $\alpha+\nu=n$; et pour le dénominateur ou $\alpha=m$ et $\mu+\nu=2n-m$, ou $\mu+\nu=m$ et $\alpha=2n-m$. Dans le premier cas, nous avons $\alpha=m$; $\mu=n$; $\nu=n-m$, et dans l'autre $\alpha=2n-m$, $\mu=n$, $\nu=m-n$; de sorte que nous ayons

$$\text{ou}\quad\frac{(n-m)\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=(n-m)\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^{n})^{\frac{m}{n}}},$$

$$\text{ou}\quad\frac{(n-m)\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=(m-n)\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{(1-x^{n})^{\frac{2n-m}{n}}},$$

formules dont la dernière ne saurait avoir lieu, tant que $\frac{2n-m}{n}>1$ ou $n>m$, puisqu'alors l'intégrale renferme encore une partie infinie.

17. Voilà donc une autre route pour montrer que la valeur de cette intégrale $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^{n})^{\frac{m}{n}}}$, au cas $x=1$, est $=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, d'abord, par la réduction des intégrales à des produits infinis: on aura à cause de $\alpha=m$, $\mu=n$, $\nu-\mu=-m$ ou $\nu=n-m$,

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^{n})^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{n\,.\,n}{m(2n-m)}\cdot\frac{2n\,.\,2n}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{3n\,.\,3n}{(m+2n)(4n-m)}\ \text{etc.}$$

Ensuite, par la résolution générale en facteurs, que j'ai enseignée dans l'Introduction à l'analyse, on voit que ce même produit exprime la valeur de $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. Si nous mettons $n-m$ au lieu de m, nous aurons:

$$\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\ \text{etc.},$$

et par conséquent, à cause de $\sin\frac{(n-m)\pi}{n}=\sin\frac{m\pi}{n}$,

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}=\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Posons $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}=z$, ou $x^n=\frac{z^n}{1+z^n}$, de sorte que $x=1$ si $z=\infty$, et nous aurons en posant après l'intégration $z=\infty$:

$$\int\frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}=\int\frac{z^{n-m-1}\,dz}{1+z^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

18. Mais voyons aussi comment ce même produit infini:

$$\frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\ \text{etc.}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

peut être exprimé par le rapport de deux formules intégrales. Pour cet effet, il faut poser $\mu=n$ et $\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)}=\frac{nn}{nn-mm}$, donc $\beta=n$; $\alpha+\nu=n$; $\alpha=n-m$ et $\beta+\nu=n+m$; d'où l'on tire $\alpha=n-m$; $\beta=n$; $\nu=m$ et $\mu=n$ et partant:

$$\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{\int x^{n-m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}},$$

mais le dénominateur étant ici intégrable, son intégrale donne $\frac{1}{m}$ pour le cas $x=1$; de sorte que cette intégration se réduit à la précédente. La formule plus générale ne mène pas à d'autres intégrations; cependant il y a d'autres moyens de rendre ces intégrations plus générales.

19. Multiplions deux formules intégrales en général et dans le cas $x=1$, la valeur de ce produit

$$\nu\mathfrak{n}\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\nu-n}{n}},\quad \int x^{\mathfrak{a}-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mathfrak{n}-n}{n}}\ \text{sera:}$$

$$\frac{nn(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{n}(\nu+n)(\mathfrak{n}+n)}\cdot\frac{4nn(\alpha+\nu+n)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}+n)}{(\alpha+n)(\mathfrak{a}+n)(\nu+2n)(\mathfrak{n}+2n)}\ \text{etc.},$$

lequel soit posé égal à celui-ci:

$$\frac{nn}{(n-m)(n+m)}\cdot\frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)}\ \text{etc.}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Soit pour cet effet $\alpha = n - m$; $\mathfrak{a} = n + m$; et posons outre cela:

$$\alpha + \nu = \nu + n - m = \mathfrak{n} + n; \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + n + m = \nu + n;$$

d'où nous tirons $\nu - \mathfrak{n} = m$. Soit donc $\nu = k + \frac{1}{2} m$ et $\mathfrak{n} = k - \frac{1}{2} m$; et nous aurons, en prenant pour k un nombre quelconque:

$$(kk - \tfrac{1}{4} mm) \int x^{n-m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}} \cdot \int x^{n+m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

20. Voilà donc un produit de deux formules intégrales, qui, dans le cas où l'on met $x = 1$ après l'intégration, devient $= \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$: et partant on pourra prendre k en sorte que l'une de ces deux formules devienne intégrable, et alors l'intégration de l'autre se réduira à l'expression $\frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$. Ainsi, posant $2k = m + 2n$, à cause de $\int x^{n+m-1} dx = \frac{1}{n+m}$, et $kk - \frac{1}{4} mm = n(n+m)$, on aura:

$$n \int x^{n-m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Or si l'on prend $2k = m + 4n$, puisque

$$\int x^{n+m-1} dx (1 - x^n) = \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n+m} = \frac{n}{(n+m)(2n+m)}$$

et $kk - \frac{1}{4} mm = 2n(m + 2n)$, on aura:

$$\frac{2nn}{n+m} \int x^{n-m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Donc, posant aussi $n - m$ à la place de m, on aura:

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{n}{m} \int x^{n-m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m} \int x^{m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{n-m}{n}} \quad \text{et}$$

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{2nn}{m(n+m)} \int x^{n-m-1} dx (1 - x^n)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{2nn}{(n-m)(2n-m)} \int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{\frac{2n-m}{n}}.$$

21. Or, puisque

$$\int x^{n+m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{2m}{2k+m} \int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}},$$

si nous substituons cette valeur, nous aurons:

$$(k - \tfrac{1}{2} m) \int x^{n-m-1} dx\, (1 - x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}} \cdot \int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

et cette valeur demeure la même, quoiqu'on écrive $n - m$ au lieu de m. Soit $m = 1$ et $n = 2$, et l'on aura:

$$(k-\tfrac{1}{2})\int dx\,(1-x^2)^{\frac{2k-3}{4}}\cdot\int dx\,(1-x^2)^{\frac{2k-5}{4}}=\frac{\pi}{2},$$

où il est remarquable que cette égalité a lieu, quelque nombre qu'on mette pour k. Soit par exemple $k=1$, ou $k=2$, et l'on aura:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}=\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{3}{2}\int dx\sqrt[4]{(1-x^2)}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}=\frac{\pi}{2},$$

et posant $k=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

$$\int dx(1-x^2)^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cdot\int dx(1-x^2)^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Cette égalité est remarquable, à cause des exposants irrationnels.

22. On peut encore transformer de plusieurs manières les formules que nous venons de trouver: car, posons $1-x^n=y^{2n}$, de sorte que $x=\sqrt[n]{(1-y^{2n})}$ et $dx=2y^{2n-1}dy\,(1-y^{2n})$ les termes de l'intégrale, qui étaient auparavant $x=0$ et $x=1$, sont à présent renversés, savoir $y=1$ et $y=0$ ce qui revient au même. De là nous concluons:

$$(4k-2m)\int y^{2k+m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{2k-m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m-n}{n}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

quand on aura mis $y=1$ après l'intégration; ou bien

$$(4kk-mm)\int y^{2k-m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{2k-m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m}{n}}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}};$$

par la réduction de ces intégrales. Donc si $m=1$ et $n=2$, nous aurons:

$$(4k-2)\int\frac{y^{2k}dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\cdot\int\frac{y^{2k-2}dy}{\sqrt{(1-y^4)}}=\frac{\pi}{2}\quad\text{et partant, si } k=1,$$

$$\int\frac{yydy}{\sqrt{(1-y^4)}}\cdot\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}=\frac{\pi}{4}.$$

23. Or, puisque l'angle $\frac{m\pi}{n}$ dépend du seul rapport des nombres m et n, nous aurons $\sin\frac{m\pi}{n}=1$, si $m=\frac{1}{2}n$, sans qu'on ait besoin de déterminer n. Soit donc $m=\frac{1}{2}n$, et pour éviter les fractions, $2k=m+\lambda$; d'où nous tirons ce théorème:

$$\int\frac{y^{\lambda+n-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}=\frac{\pi}{2\lambda n},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+n-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})=\frac{\pi}{2\lambda(\lambda+n)}.$$

De même, posant plus généralement $2k=\lambda+m$, on aura:

$$\int y^{\lambda+2m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m-n}{n}}=\frac{\pi}{2\lambda n\sin\frac{m\pi}{n}},\quad\text{ou}$$

$$\int y^{\lambda+2m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m}{n}}=\frac{m\pi}{\lambda n(\lambda+2m)\sin\frac{m\pi}{n}},$$

où le nombre λ est arbitraire, de sorte qu'on puisse même lui donner une valeur irrationelle. Soit $m=\mu k$ et $n=\nu k$, et l'on aura:

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\pi}{2\lambda\nu k\sin\frac{\mu\pi}{\nu}},\quad\text{ou}$$

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\mu\pi}{\lambda\nu(\lambda+2\mu k)\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}.$$

24. Posons de plus: $2k=\alpha$ pour avoir cette égalité

$$\int y^{\lambda+\mu\alpha-1}dy\,(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\pi}{\lambda\nu\alpha\sin\frac{\mu\pi}{\nu}},$$

dont on aura ces cas principaux:

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}=\frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+2\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}=\frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+3\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}}.$$

25. Comme l'expression infinie du sinus nous à conduit à ces intégrations, traitons de la même manière l'expression trouvée pour le cosinus, qui se réduit à cette forme:

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\frac{(n-2m)(n+2m)}{n\,.\,n}\cdot\frac{(3n-2m)(3n+2m)}{3n\,.\,3n}\cdot\frac{(5n-2m)(5n+2m)}{5n\,.\,5n}\ \text{etc.},$$

où puisque ni les numérateurs ni les dénominateurs ne contiennent des facteurs selon la progression 1, 2, 3, 4, 5 etc., nous n'en saurions exprimer la valeur par une seule formule intégrale. Cherchons donc deux formules dont le rapport exprime cette valeur, et l'on voit d'abord qu'il faut mettre $\mu=2n$. Soit donc $\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)}=\frac{(n-2m)(n+2m)}{n\,.\,n}$, et nous aurons $\alpha=n$; $\beta=n-\nu$ et $\nu=2m$; de sorte que $\beta=n-2m$. Par conséquent, en posant après l'intégration $x=1$, nous aurons:

$$\frac{\int x^{n-1}dx\,(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-2m-1}dx\,(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}=\cos\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{(n-2m)\pi}{2n}.$$

Donc posant $m=\lambda\mu$ et $n=\lambda\nu$, nous aurons

$$\frac{\int x^{\lambda\nu-1}dx\,(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}{\int x^{\lambda\nu-2\lambda\mu-1}dx\,(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}=\cos\frac{\mu\pi}{\nu}=\sin\frac{(\nu-2\mu)\pi}{2\nu}.$$

*

26. Considérons en les cas les plus simples:

$$\text{I. Si } m=1,\ n=2:\quad \frac{\int x\,dx\,(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{\int \frac{dx}{x}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

$$\text{II. Si } m=1,\ n=3:\quad \frac{\int xx\,dx\,(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}}{\int dx(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$\text{III. Si } m=\frac{1}{2},\ n=2:\quad \frac{\int x\,dx\,(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}}{\int dx\,(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{IV. Si } m=\frac{1}{2},\ n=3:\quad \frac{\int x^2\,dx\,(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}}{\int dx\,(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

De la seconde nous tirons cette égalité:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}},$$

la troisième se réduit à

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}}=\sqrt{2}\,.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

et la quatrième à

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}.$$

27. Ces formules peuvent être changées, de sorte que la condition de l'intégration demeure la même. Ainsi l'on trouve:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}\ \text{ en posant } x^3 \text{ au lieu de } 1-xx,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}},\ \text{ en posant } x^3 \text{ au lieu de } 1-x^6,$$

et partant nous aurons ces égalités:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\sqrt{2}\,.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}.$$

28. Par la même transformation nous trouvons en général:

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{2}}} = \cos\frac{m\pi}{n}\cdot\int \frac{x^{n-2m-1}\,dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{n}\cdot\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n+2m}{2n}}};$$

et partant:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos\frac{m\pi}{n}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^n)^{n+2m}}}.$$

Donc puisque la formule $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$ est la plus simple, comme ne renfermant que le signe radical carré, nous aurons ces réductions pour le cas $x = 1$:

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

$$\int \frac{x^{n-2m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}} = \frac{1}{2\cos\frac{m\pi}{n}}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^n)^{n+2m}}} = \frac{1}{\cos\frac{m\pi}{n}}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

dont la première est évidente d'elle même, mais les deux autres renferment la nature des cosinus.

29. J'ai aussi trouvé dans mon Introduction ce produit infini:

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m(2n-m)}{k(2n-k)}\cdot\frac{(2n+m)(4n-m)}{(2n+k)(4n-k)}\cdot\frac{(4n+m)(6n-m)}{(4n+k)(6n-k)}\ \text{etc.},$$

qu'on peut réduire à un rapport de deux formules intégrales. Pour cet effet, il faut poser $\mu = 2n$ et

$$\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)} = \frac{m(2n-m)}{k(2n-k)},$$

ce qui se peut faire de quatre manières:

I. $\alpha = k$; $\beta = m$; $\nu = 2n - m - k$; $\frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{-m-k}{2n}$,

II. $\alpha = k$; $\beta = 2n - m$; $\nu = m - k$; $\frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{m-k-2n}{2n}$,

III. $\alpha = 2n - k$; $\beta = m$; $\nu = k - m$; $\frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{k-m-2n}{2n}$,

IV. $\alpha = 2n - k$; $\beta = 2n - m$; $\nu = m + k - 2n$; $\frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{m+k-4n}{2n}$,

d'où nous aurons:

$$\frac{\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^\mu)^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}\,dx\,(1-x^\mu)^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}} = \frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}},$$

et par la transformation:

$$\frac{\int x^{\nu-1}\,dx\,(1-x^\mu)^{\frac{\alpha-\mu}{\mu}}}{\int x^{\nu-1}\,dx\,(1-x^\mu)^{\frac{\beta-\mu}{\mu}}} = \frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}.$$

30. Cette dernière formule fournit les réductions suivantes:

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}.$$

Or, je ne m'arrête pas à donner des exemples; il est aisé de voir qu'on en peut tirer des réductions assez remarquables; comme si $k=n-m$, on aura:

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n+m}}}=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}.$$

31. Considérons encore un produit infini, que j'avais trouvé pour la tangente d'un angle:

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2(n-m)}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\quad\text{etc.}$$

et que nous répresentons en sorte

$$\frac{m\pi}{2(n-m)\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}}=\frac{2n\,.\,2n(n+m)(3n-m)}{n\,.\,3n(2n-m)(2n+m)}\cdot\frac{4n\,.\,4n(3n+m)(5n-m)}{3n\,.\,5n(4n-m)(4n+m)}\quad\text{etc.},$$

qu'on peut réduire à un produit de deux formules intégrales, qui étant en général

$$\nu\mathfrak{n}\int x^{\alpha-1}dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}\cdot\int x^{\mathfrak{a}-1}dx\,(1-x^{\mathfrak{m}})^{\frac{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}}=$$

$$\frac{\mu\mathfrak{m}(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{a}(\mu+\nu)(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}\cdot\frac{2\mu\,.\,2\mathfrak{m}(\alpha+\nu+\mu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}+\mathfrak{m})}{(\alpha+\mu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{m})(2\mu+\nu)(2\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}\quad\text{etc.},$$

où l'on voit d'abord qu'il faut prendre $\mu=\mathfrak{m}=2n$, et ensuite il reste à rendre:

$$\frac{(n+m)(3n-m)}{n\,.\,3n(2n-m)(2n+m)}=\frac{(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{a}(\mu+\nu)(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}.$$

Qu'on prenne donc $\alpha+\nu=n+m$ et $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}=3n-m$, on trouvera les quatre solutions suivantes:

I. $\nu=m;\ \mathfrak{n}=-m;\ \alpha=n;\ \mathfrak{a}=3n;\ \mu=2n;\ \mathfrak{m}=2n,$

II. $\nu=m;\ \mathfrak{n}=n;\ \alpha=n;\ \mathfrak{a}=2n-m,\ \mu=2n;\ \mathfrak{m}=2n,$

III. $\nu=-n;\ \mathfrak{n}=-m;\ \alpha=2n+m;\ \mathfrak{a}=3n;\ \mu=2n;\ \mathfrak{m}=2n,$

IV. $\nu=-n;\ \mathfrak{n}=n;\ \alpha=2n+m;\ \mathfrak{a}=2n-m;\ \mu=2n;\ \mathfrak{m}=2n.$

32. Voilà donc les quatre réductions qui s'en suivent:

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}}=\frac{\pi}{2m(m-n)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} \cdot \int \frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}} = \frac{m\pi}{2nn(m-n)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

où il faut remarquer que:

$$\int \frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}} = \frac{-n}{m} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} \quad \text{et}$$

$$\int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} = \frac{-m}{n} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}.$$

33. Ces substitutions nous fournissent les formules suivantes:

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

qui se réduisent à ces formules plus simples:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = \frac{n\pi}{2(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = \frac{\pi}{2(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot \frac{m\pi}{2n}.$$

34. Or par des substitutions ultérieures, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} = n \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = n \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}.$$

De sorte que toutes nos formules se réduisent à la dernière qui est la plus simple, puisqu'elle ne renferme que le signe radical carré, laquelle, si nous posons $m = n - k$, se change en cette forme assez remarquable

$$\int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk} \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

d'où, si $k = 0$, à cause de $\operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n} = \frac{k\pi}{2n}$, on obtient:

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi\pi}{4nn}.$$

35. Considérons quelques cas particuliers:

I. si $n=1$, $k=0: \int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{\pi\pi}{4}$,

II. si $n=\frac{3}{2}$, $k=\frac{1}{2}: \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{2\pi}{3}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$,

III. si $n=2$, $k=1: \int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,

IV. si $n=\frac{5}{2}$, $k=\frac{1}{2}: \int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{5}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{10}$,

V. si $n=\frac{5}{2}$, $k=\frac{3}{2}: \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{15}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{10}$,

VI. si $n=3$, $k=1: \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{6}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6}$,

VII. si $n=3$, $k=2: \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{12}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{3}$,

VIII. si $n=\frac{7}{2}$, $k=\frac{1}{2}: \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{7}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{14}$,

IX. si $n=\frac{7}{2}$, $k=\frac{3}{2}: \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{21}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{14}$,

X. si $n=\frac{7}{2}$, $k=\frac{5}{2}: \int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{35}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{14}$,

XI. si $n=4$, $k=1: \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{8}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{8}$,

XII. si $n=4$, $k=3: \int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{24}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{8}$,

XIII. si $n=\frac{9}{2}$, $k=\frac{1}{2}: \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{9}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{18}$,

XIV. si $n=\frac{9}{2}$, $k=\frac{5}{2}: \int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{45}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{18}$,

XV. si $n=\frac{9}{2}$, $k=\frac{7}{2}: \int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{63}\,\text{tang}\,\frac{7\pi}{18}$,

XVI. si $n=5$, $k=2: \int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{20}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{5}$,

XVII. si $n=5$, $k=4: \int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{40}\,\text{tang}\,\frac{2\pi}{5}$,

XVIII. si $n=6$, $k=1: \int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\frac{\pi}{12}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{12}$,

XIX. si $n=6$, $k=5: \int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\frac{\pi}{60}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{12}$,

36. La formule $\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha}$ que nous avons trouvée ci-dessus (§ 24) a avec celles-ci un grand rapport, pour le développement duquel écrivons x à la place de y, et posons $\alpha=n$ pour avoir:

$$\int\frac{x^{\lambda+n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2\lambda n}.$$

Or la formule que nous venons de trouver étant

$$\int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk} \cdot \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

si nous posons $\lambda = k$, nous aurons:

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} : \int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

et si nous posons $\lambda = n - k$,

$$\int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} : \int \frac{x^{2n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{n-k}{k} \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n}.$$

37. Or pour rendre ces équations plus générales, posons $y = x^{\frac{n}{a}}$ pour avoir suivant le § 24:

$$\int \frac{x^{\frac{\lambda n}{a}+n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{\frac{\lambda n}{a}-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{a\pi}{2\lambda nn}.$$

Soit $\frac{\lambda n}{a} = k$, et nous trouverons la même formule que ci-dessus, et la position $\frac{\lambda n}{a} = n - k$ ne produit rien de nouveau non plus. Voyons donc quelques cas particuliers:

1. Soit $n = 1$ et $k = 0$: $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} : \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}$,

2. si $n = \frac{3}{2}$, $k = \frac{1}{2}$: $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

   et l'autre: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}} : \int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

3. si $n = 2$, $k = 1$: $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = 1$,

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^4)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{8},$$

   et l'autre: $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = 1$,

$$\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{xx\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}} = 3 \operatorname{tang} \frac{\pi}{8}.$$

Et en voilà encore quelques autres:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^5)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} : \int \frac{x^3\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}} = 4 \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{xx\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}} : \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{3}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=2\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}:\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=3\operatorname{tang}\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=4\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{3}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{12},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}:\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=5\operatorname{tang}\frac{\pi}{12},$$

38. Ces formules sont semblables, par rapport à la forme, à celles qui ont été trouvées ci-dessus § 34: toutes ces formules étant comprises dans cette expression générale: $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$. Mais ci-dessus, c'était le produit de deux telles formules dont j'avais assigné la valeur, tandis qu'ici nous avons des quotients qui résultent de la division de l'une par l'autre. Mais dans l'un et l'autre cas, il est évident que l'intégration de l'une se réduit à celle de l'autre. Puisque la plupart de ces réductions sont tout à fait nouvelles, il vaudra bien la peine de les considérer plus soigneusement. Pour cet effet, je les distribuerai en classes selon l'exposant de la variable x derrière le signe radical, m et n étant des nombres entiers.

I. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{2\pi}{3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

II. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$:

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

III. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$:

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{5}\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{15}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{10}.$$

IV. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{6}\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{12}\operatorname{tang}\frac{\pi}{3},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=2\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}.$$

V. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}$:

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{7}\operatorname{tang}\frac{\pi}{14},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{21}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{14},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{35}\operatorname{tang}\frac{5x}{14}.$$

VI. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{16}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{24}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{8},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=3\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}.$$

VII. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}$:

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{9}\operatorname{tang}\frac{\pi}{18},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{27}\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{45}\operatorname{tang}\frac{5\pi}{18},$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{63}\operatorname{tang}\frac{7\pi}{18}.$$

VIII. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{10}\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{20}\operatorname{tang}\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{30}\,\mathrm{tang}\,\frac{3\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{40}\,\mathrm{tang}\,\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=4\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{3}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{5},$$

39. En combinant les quotients avec les produits de chaque classe, on en peut former de nouveaux produits, ce que je ferai voir en général; car ayant ce produit:

$$\int\frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\,\mathrm{tang}\,\frac{k\pi}{2n},$$

et outre cela, ces deux quotients:

$$\text{I.}\quad\int\frac{x^{n-\alpha-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\mathrm{tang}\,\frac{\alpha\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad\int\frac{x^{n+\beta-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{2n-\beta-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{n-\beta}{\beta}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta\pi}{2n}.$$

Combinons le produit avec le premier quotient, en posant $\alpha=n-k$, et nous aurons en les multipliant

$$\int\frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}.$$

Ensuite, pour le second quotient, posons $\beta=n-k$, et en multipliant, nous aurons:

$$\int\frac{x^{2n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2n(n-k)},$$

qui ne diffère pas du précédent. Ainsi, pour chaque classe nous aurons deux prodruits généraux:

$$\text{I.}\quad\int\frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\,\mathrm{tang}\,\frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad\int\frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk},$$

dont le dernier convient avec ceux que j'avais déjà démontrés autrefois.

40. Développons ces produits pour quelques cas, où n et k sont des nombres entiers, et nous aurons les réductions suivantes pour le cas $x=1$:

I. Produits de la forme $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$:

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

II. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tang} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12}.$$

III. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8} \operatorname{tang} \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24}.$$

IV. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10} \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40} \operatorname{tang} \frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40}.$$

41. Après ces intégrations des formules, qui sont toutes comprises dans cette formule générale $\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^k$ et qu'on peut nommer algébriques, puisque dx y est multiplié par une fonction algébrique de x, je passe, comme je me suis proposé, à considérer encore quelques formules intégrales où le différentiel dx est multiplié par une fonction transcendante de x, et dont l'intégrale, dans un certain cas, se peut exprimer algébriquement, ou par la quadrature du cercle. Ces cas sont d'autant plus remarquables, qu'il nous manque encore des méthodes pour les traiter, et partant les observations suivantes serviront peut être à découvrir de telles méthodes.

42. Je ne m'arrêterai pas ici à cette formule intégrale assez connue $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$, dont on sait que la valeur, au cas qu'on met après l'intégration $x=1$, devient $=1.2.3..n$; de sorte que cette valeur peut être assignée, toutes les fois que l'exposant n est un nombre entier. Mais quand n est une fraction, la valeur est beaucoup plus difficile à assigner. Ainsi, si $n=\frac{1}{2}$, j'ai démontré que la valeur de l'intégrale $\int dx\sqrt{l\frac{1}{x}}$, au cas $x=1$, est $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. De là, on tire aisément ces intégrations qui en dépendent:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}=\frac{1.2}{2.2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{5}{2}}=\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{7}{2}}=\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\sqrt{\pi},$$

puisqu'il y a en général

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^m=x\,(l\frac{1}{x})^m+m\int dx\,(l\frac{1}{x})^{m-1};$$

donc posant après l'intégration $x=1$, à cause de $l\frac{1}{x}=0$, on aura:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^m=m\int dx\,(l\frac{1}{x})^{m-1}.$$

43. Cette intégration du cas $n=\frac{1}{2}$ se peut exprimer de cette manière:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}}\quad\text{posant } x=1,$$

et pour les autres fractions mises pour n, j'ai trouvé les réductions suivantes:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}=2\sqrt[3]{\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}}\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\tfrac{1}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\tfrac{1}{5}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\tfrac{2}{5}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\tfrac{6}{5}}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^{15}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

44. Puisque parmi ces formules, il s'en trouve où l'exposant de x est plus grand dans le numérateur, que dans le dénominateur, si nous déprimons ces exposants par le secours de cette réduction:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^k = \frac{m-n}{m+nk}\int x^{m-n-1}\,dx\,(1-x^n)^k,$$

nous trouverons les formules suivantes:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\tfrac{1}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{\tfrac{1}{3^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\tfrac{1}{4^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\tfrac{2}{4^3}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\tfrac{1}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\tfrac{1}{5^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\tfrac{2}{5^3}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\tfrac{6}{5^4}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

45. Voilà donc les valeurs de la formule intégrale transcendante $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$, lorsque n est une fraction réduite à des valeurs des formules intégrales, où dx est multiplié par une fonction algébrique de x. Or, parmi ces dernières formules, il y en a toujours une qui renferme la quadrature du cercle, puisque

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ensuite, pour pouvoir mieux composer les autres ensemble, posons dans les formules du § 21: $2k=2n+m-2\lambda$ pour avoir:

$$\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda-m}}}\cdot\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda}}}=\frac{\pi}{n(n-\lambda)\sin\frac{m\pi}{n}},$$

de là nous aurons:

I. si $n=3$: $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}},$$

II. si $n=4$: $$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}=\frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}},$$

III. si $n=5$: $$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\frac{\pi}{15\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{\pi}{10\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{\pi}{10\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{3\pi}{5}}.$$

46. De là nous voyons que multipliant toutes les formules du même ordre ensemble, le produit se réduit à la quadrature du cercle; ainsi nous aurons:

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{9\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\pi=\frac{2}{3^2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{3}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{4}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{6\pi\sqrt{\pi}}{4^3\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{6}{4^3}\sqrt{\frac{8\pi^3}{4}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}=\frac{24\pi^2}{5^4\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{24}{5^4}\sqrt{\frac{16\pi^4}{5}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{6}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{6}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{6}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{6}}=\frac{120\pi^2\sqrt{\pi}}{6^5\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2\pi}{6}}=\frac{120}{6^5}\sqrt{\frac{32\pi^5}{6}}.$$

De là nous concluons qu'il y aura en général:

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}}\cdots\cdots\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}},$$

lequel théorème est tout à fait digne d'attention.

47. La comparaison de ces formules peut être poussée plus loin, en considérant ce théorème général:

$$\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\beta}}}=\int\frac{x^{n-\beta-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-\alpha}}},$$

d'où le théorème précédent tiré du § 21 se change aussi en d'autres formes. Ensuite, les formules du § 29 fournissent les comparaisons suivantes:

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}:\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}=\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}}:\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}}=\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}}:\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}}=\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m-k}}}:\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}}=\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n}.$$

dont les dernières se déduisent de la première, puisqu'au lieu de m et k on peut mettre $n-m$ et $n-k$.

48. Maintenant, puisque

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}=\frac{n-k}{m}\int\frac{x^{m+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}},$$

on aura encore cette comparaison:

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}:\int\frac{x^{m+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}=\frac{n-k}{m}\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n}$$

et prenant pour m un nombre négatif:

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}}:\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}}=\frac{n-k}{m}\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n},$$

d'où nous tirons les comparaisons particulières suivantes:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}:\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\sin\frac{\pi}{4}:\sin\frac{\pi}{2}=1:\sqrt{2},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}:\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}:\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}:\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=2\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}=3\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5}.$$

49. Pour faire voir l'usage de ces réductions, considérons les formules particulières qui entrent dans les expressions des formules

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}};\quad \int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{2}{5}};\quad \int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{3}{5}};\quad \int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{4}{5}}$$

et d'abord le nombre de toutes les dites formules étant 16, il y a 4 qui dépendent de la quadrature du cercle.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}};\qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{3\pi}{5}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}};\qquad \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Pour les autres 12 la réduction générale fournit:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

Ensuite nous venons de trouver:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{2\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} = \frac{2\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

auxquelles on peut ajouter les produits de deux telles formules rapportées au § 45 pour le cas $n=5$.

50. Si nous examinons toutes ces égalités, nous trouvons que ces 12 formules se réduisent à deux: posons pour abréger

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}; \quad \alpha = \sin\frac{\pi}{5}; \quad \beta = \sin\frac{2\pi}{5}$$

et toutes nos formules peuvent être réduites à la quadrature du cercle et à ces deux $\int yy\,dx$ et $\int y^3\,dx$, de cette manière

$$\int y^4\,dx = \frac{\beta}{\alpha}\int yy\,dx; \quad \int xy^4\,dx = \int y^3\,dx; \quad \int x^2y^4\,dx = \int yy\,dx; \quad \int x^3y^4\,dx = \frac{\pi}{5\alpha},$$

$$\int y^3\,dx = \frac{\alpha}{\beta}\int y^3\,dx; \quad \int x^2y^3\,dx = \frac{\pi}{5\beta}; \quad \int x^3y^3\,dx = \frac{\pi}{5\beta\int yy\,dx},$$

$$\int xy^2\,dx = \frac{\pi}{5\beta}; \quad \int x^2y^2\,dx = \frac{\pi}{5\beta\int y^3\,dx}; \quad \int x^3y^2\,dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3\,dx},$$

$$\int y\,dx = \frac{\pi}{5\alpha}; \quad \int xy\,dx = \frac{\pi}{5\beta\int yy\,dx}; \quad \int x^2y\,dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3\,dx}; \quad \int x^3y\,dx = \frac{\pi}{15\alpha\int yy\,dx},$$

soit donc $\int yy\,dx = A$ et $\int y^3\,dx = B$, et les valeurs de nos formules transcendantes seront:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{\beta\pi AAB}{5^2\alpha\alpha}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{\alpha\pi^2BB}{5^4\beta^3A}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{\pi^3A}{5^6\alpha\beta^2BB}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{\pi^4}{5^8\alpha^3\beta AAB}}.$$

51. De là nous voyons que non seulement le produit de toutes ces quatre formules dépend uniquement de la quadrature du cercle, mais aussi le produit de deux, dont les exposants font ensemble l'unité, savoir:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} \cdot \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = \frac{4\pi}{5^2\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}}=\frac{6\pi}{5^2\sin\frac{2\pi}{5}},$$

Outre cela, nous en pourrons déduire ces égalités:

$$\left(\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}}\right)^2:\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\beta A}{2\alpha},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{4\pi B}{5^2\sin\frac{2\pi}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}.$$

52. Si nous joignons ces déterminations aux précédentes, nous en pourrons tirer les conclusions générales suivantes:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2^2\sin\frac{\pi}{2}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}}=\frac{2\pi}{3^2\sin\frac{\pi}{3}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{4}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}}=\frac{3\pi}{4^2\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}}=\frac{4\pi}{5^2\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}}=\frac{6\pi}{5^2\sin\frac{2\pi}{5}}$$

et en général:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{m}{n}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{n-m}{n}}=\frac{m(n-m)\pi}{nn\sin\frac{m\pi}{n}},$$

donc puisque

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{n-m}{n}}=\frac{n-m}{n}\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{-m}{n}},$$

nous aurons:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{m}{n}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{-m}{n}}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=m\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}.$$

53. Cette dernière égalité se peut aisément démontrer immédiatement en développant le cas le plus simple, où l'exposant est un nombre entier:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\lambda}=1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\lambda.$$

Or, cette expression finie se peut exprimer par un produit infini, comme:

$$\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\lambda} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\lambda}\cdot\frac{1}{1+\lambda}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\lambda}\cdot\frac{2}{2+\lambda}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\lambda}\cdot\frac{3}{3+\lambda}\ \text{etc.}$$

Posons maintenant $\lambda = \frac{m}{n}$ pour avoir:

$$\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{3n}{3n+m}\ \text{etc.}$$

et faisons aussi m négatif:

$$\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{-m}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{-m}{n}}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{-m}{n}}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{-m}{n}}\cdot\frac{3n}{3n-m}\ \text{etc.}$$

Le produit de ces deux formules donne évidemment:

$$\frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\ \text{etc.} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

54. Nous pourrons pousser plus loin ces recherches, car puisque

$$\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\frac{n}{n+p}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+p}\ \text{etc.},$$

$$\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{q}{n}}\cdot\frac{n}{n+q}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{q}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+q}\ \text{etc.},$$

$$\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{p+q}{n}}\cdot\frac{n}{n+p+q}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p+q}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+p+q}\ \text{etc.}$$

Le produit des deux premières divisé par la dernière, donne:

$$\frac{\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}}{\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q}{n}}} = \frac{n(n+p+q)}{(n+p)(n+q)}\cdot\frac{2n(2n+p+q)}{(2n+p)(2n+q)}\ \text{etc.},$$

dont la valeur est

$$q\int\frac{x^{n+p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ou bien aussi:

$$= q\int x^{q-1}\,dx\,\sqrt[n]{(1-x^n)^p} = p\int x^{p-1}\,dx\,\sqrt[n]{(1-x^n)^q},$$

formule qui conduit à la précédente, quand on pose $p = m$ et $q = -m$. De même, on trouvera la valeur de

$$\frac{\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}\cdot\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{r}{n}}}{\int dx\,\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q+r}{n}}} = \frac{pqr}{p+q+r}\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int\frac{x^{p+q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}.$$

55. Enfin, pour finir cette matière, la sommation des séries réciproques des puissances nous fournit encore la valeur des formules transcendantes suivantes, quand on met après l'intégration $x=1$:

$$\int\frac{dx}{x}\,l\,\frac{1}{1-x}=\frac{\pi^2}{6};\quad \int\frac{dx}{x}\,l\,(1+x)=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{et}\quad \int\frac{dx}{x}\,l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi^2}{8}$$

et ces autres, plus composées:

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\,\frac{1}{1-x}=\frac{\pi^4}{90};\quad \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\,(1+x)=\frac{7\pi^4}{720};$$

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,\text{arc. tang}\,x=\frac{\pi^3}{32};\quad \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Or, il ne paraît aucune route directe qui nous pourrait mener à ces déterminations, ce qui mérite, par cela même, d'autant plus d'attention.