XVII.

Analyse d'un problème du calcul des probabilités.

Il y a, dans une urne, quatre billets a, b, c, d, dont on tire un au hasard, et après l'avoir remis dans l'urne, on en tire un de nouveau, et cela à n reprises: on demande la probabilité que le billet a ne sera jamais tiré, ou qu'il ne sera tiré qu'une seule fois, ou deux fois etc. ou enfin qu'il sorte à chacun des n tirages.

1. Le billet donné ne sortira point au premier tirage: *probabilité* . . . $\frac{3}{4}$

ni au second « « . . . . $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

ni au troisième « « . . . $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

etc.

il ne sortira point du tout . . . . . $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2. Il ne sortira qu'une fois sur les n tirages . . . . $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.n.$

3. deux fois « « . . . . $\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.\frac{n(n-1)}{1.2}$

4. Il sortira à chacun des n tirages . . . . $\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Si des quatre billets a, b, c, d, on en tire *deux* chaque fois, à n reprises différentes,

1. le billet donné a ne s'y trouvera jamais: *probabilité* . . . . $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

2. il s'y trouvera une fois « . . . . . . $n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Le nombre des billets a, b, c, etc. étant $=N$; qu'on en tire m billets à la fois et qu'on répète cette opération n fois:

1. le billet donné a ne se trouvera jamais parmi les billets tirés:

probabilité $\left(1-\frac{m}{N}\right)^n$,

2. il s'y rencontrera une fois « $n.\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-1}$,

3. « deux fois « $\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{m}{N}\right)^2\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-2}$

4. « à chaque tirage « $\left(\frac{m}{N}\right)^n$.

Exemple. Le nombre des billets étant 50000 dont on tire à chaque reprise 8000, et cela cinq fois de suite. Il y aura donc

$$N = 50000, \quad m = 8000, \quad n = 5.$$

1. Le billet donné a ne sortira point du tout.		*Probabilité:*	$\left(\frac{21}{25}\right)^5 = 0{,}4182120$,
2. il se rencontrera dans un seul des cinq tirages		«	$5 \cdot \frac{4}{25} \left(\frac{21}{25}\right)^4 = 0{,}3982950$,
3. «	deux tirages	«	$10 \left(\frac{4}{25}\right)^2 \left(\frac{21}{25}\right)^3 = 0{,}151730$,
4. «	trois tirages	«	$10 \left(\frac{4}{25}\right)^3 \left(\frac{21}{25}\right)^2 = 0{,}028906$,
5. «	quatre tirages	«	$5 \left(\frac{4}{25}\right)^4 \left(\frac{21}{25}\right) = 0{,}002752$,
6. «	dans tous les cinq tirages	«	$\left(\frac{4}{25}\right)^5 = 0{,}000105$,

Le nombre des tirages, n, étant le même, on demande la probabilité que deux billets a et b ne se rencontrent jamais ensemble si, de N billets, on tire chaque fois $N - m$.

1. Au premier tirage, a n'est pas au nombre des $N - m$ billets tirés.		*Probabilité:*	$\frac{m}{N}$,
	b n'y est pas non plus	«	$\frac{m(m-1)}{N(N-1)} = \varrho$,
2. les deux manquent au second tirage		«	ϱ^2,
3. «	au troisième	«	ϱ^3,
4. «	à tous les tirages	«	ϱ^n.

On demande la probabilité que λ billets donnés ne se rencontrent dans aucun des n tirages. On n'a qu'à poser

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\lambda+1)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-\lambda+1)} = \varrho$$

et la probabilité cherchée sera $= \varrho^n$.

Dans l'exemple précédent on aurait $N = 50000$, $N - m = 8000$, $m = 42000$ et $n = 5$.

Si de 10 billets qui se trouvent dans une urne, on en tire 2, il en restera 8. Quand, après les avoir remis, on répète l'opération encore une fois, il est certain que six billets au moins ne seront pas tirés; mais il est possible que le nombre des non-tirés soit même 8. Il s'agit d'énumérer les cas, où 6, 7 et 8 billets seront restés intacts.

Il y en aura six. Supposons qu'au premier tirage soient sortis les numéros 1 et 2. Au second tour, les deux numéros doivent être de 3 à 10, donc la probabilité est $\frac{8.7}{10.9}$.

Il y en aura sept, lorsque 1 ou 2 sort de nouveau au second tirage, c'est à dire qu'on ait au second tirage

1, 3, ou 1, 4, ou 1, 5, etc. huit chances favorables
ou bien 2, 3, ou 2, 4, ou 2, 5, etc. autant de chances.

Or le nombre de tous les cas possibles étant $= \frac{10.9}{1.2}$, la probabilité sera $= 2 \cdot \frac{2.8}{10.9}$.

Il y en aura huit si, au second tour, sortent les mêmes numéros 1 et 2, qu'au premier; seule chance favorable dont la probabilité est $\frac{2.1}{10.9}$.

Donc, pour que le nombre des billets restés intacts soit 6, ou 7, ou 8

la probabilité respective sera $\frac{8.7}{10.9}$, $2\cdot\frac{8.2}{10.9}$, $\frac{1.2}{10.9}$.

Quand on tire trois fois de suite, il y aura ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8 billets de non-tirés.

I. Que le nombre des non-tirés soit 8. Au premier tirage étant sortis les numéros 1 et 2, il faut que ces mêmes numéros sortent au second et au troisième tirage; la probabilité de la première de ces chances étant $\frac{1.2}{10.9}$, et celle des deux chances $\left(\frac{1.2}{10.9}\right)^2$.

II. Pour que le nombre des non-tirés soit 4, il faut qu'au second tirage il sorte deux billets différents des numéros 1 et 2, ce qui donne pour mesure de la probabilité $\frac{8.7}{10.9}$; et pour qu'au troisième tour il en vienne encore deux billets autres, que les quatre déjà tirés, la probabilité soit $=\frac{8.7}{10.9}\cdot\frac{6.5}{10.9}$.

III. Pour que le nombre des non-tirés soit 7, il faut considérer les quatre cas suivants:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*
second «	*ab*	*ac*	*ac*	*ac*
troisième «	*ac*	*ab*	*bc*	*ac*

la probabilité de chaque cas particulier est $2\cdot\frac{8.2.1.2}{10.9.10.9}$,

donc la probabilité totale est . . . . . $8\cdot\frac{8.2.1.2}{10.9.10.9}$.

IV. Pour que le nombre des non-tirés soit 6, il faut considérer les 7 cas suivants:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*
second «	*ab*	*cd*	*cd*	*ac*	*ac*	*cd*	*ac*
troisième «	*cd*	*ab*	*cd*	*ad*	*cd*	*ac*	*bd*

dont les probabilités respectives seront

$\frac{8.7.2.1}{10.9.10.9}$, $\frac{8.7.2.1}{10.9.10.9}$, $\frac{8.7.2.1}{10.9.10.9}$, $2\cdot\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$, $2\cdot\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$, $2\cdot\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$, $2\cdot$ [illegible]

et par conséquent, la probabilité totale sera

$$\frac{8.7.38}{10.9.10.9}.$$

V. Soit le nombre des non-tirés 5, les trois cas à considérer sont:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*
second «	*ac*	*cd*	*cd*
troisième «	*de*	*ae*	*de*

la probabilité de chacun de ces cas est $2\cdot\frac{8.7.6.2}{10.9.10.9}$

et, par conséquent, la probabilité totale $6\cdot\frac{8.7.6.2}{10.9.10.9}$.

En résumant tous ces cas, nous obtenons le tableau suivant:

Nombre des billets non-tirés	probabilité
4	$\frac{8.7.6.5}{(10.9)^2}$
5	$6.\frac{8.7.6.2}{(10.9)^2}$
6	$\frac{8.7.38}{(10.9)^2}$
7	$8.\frac{8.2.1.2}{(10.9)^2}$
8	$\frac{1.2.1.2}{(10.9)^2}$.

Si au lieu de 10 billets, il y en a n, dont on tire deux, à chaque reprise, on aura:

I. En tirant deux fois.

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{1.2}{n(n-1)}$
$n-3$	$2.\frac{(n-2)2}{n(n-1)}$
$n-4$	$\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$.

Considérons maintenant les numérateurs de ces différents cas, et en posant, pour plus de simplicité, $n-2=m$, ils seront 2, $4m$ et $m(m-1)$; leur somme nous donne la valeur m^2+3m+2 et par conséquent, l'équation $A+Bm+m(m-1)=m^2+3m+2$, qui doit subsister pour toutes les valeurs de m, nous fournit les valeurs des coefficients A et B.

II. En tirant trois fois, on aura:

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{1.2.1.2}{n^2(n-1)^2}$
$n-3$	$8.\frac{(n-2).2.1.2}{n^2(n-1)^2}$
$n-4$	$8.\frac{(n-2).2.(n-3).2+3.1.2.(n-2)(n-3)}{n^2(n-1)^2}$
$n-5$	$6.\frac{(n-2)(n-3)(n-4).2}{n^2(n-1)^2}$
$n-6$	$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^2(n-1)^2}$.

En posant de nouveau $n-2=m$, les numérateurs de ces différents cas seront

$$4,\ 32m,\quad 38m(m-1),\quad 12m(m-1)(m-2)\quad \text{et}\quad m(m-1)(m-2)(m-3)$$

dont la somme nous donne la valeur $(m^2+3m+2)^2$ et, par conséquent, l'équation pour déterminer les coefficients 4, 32, 38 et 12 sera

$$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)(m-2)+m(m-1)(m-2)(m-3)=(m^2+3m+2)^2.$$

Conclusion.

Ainsi on peut conclure que, si le nombre des billets est n, dont on tire deux, à chaque reprise, le nombre des tirages étant $p+1$, on aura:

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{A}{n^p(n-1)^p}$
$n-3$	$\frac{B(n-2)}{n^p(n-1)^p}$
$n-4$	$\frac{C(n-2)(n-3)}{n^p(n-1)^p}$
$n-5$	$\frac{D(n-2)(n-3)(n-4)}{n^p(n-1)^p}$
etc.	etc.

et les coefficients A, B, C, D, etc. seront donnés par l'équation

$$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)m-2)+\ldots m(m-1)(m-2)\ldots(m-2p-1)=(m^2+3m+2)$$

qui est indépendante de $m=n-2$.

Ainsi en tirant quatre fois par deux, on trouve

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{8}{n^3(n-1)^3}$
$n-3$	$\frac{208(n-2)}{n^3(n-1)^3}$
$n-4$	$\frac{652(n-2)(n-3)}{n^3(n-1)^3}$
$n-5$	$\frac{576(n-2)(n-3)(n-4)}{n^3(n-1)^3}$
$n-6$	$\frac{188(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^3(n-1)^3}$
$n-7$	$\frac{24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{n^3(n-1)^3}$
$n-8$	$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n^3(n-1)^3}$.

Si on a n billets, dont on tire trois à chaque reprise, en tirant deux fois de suite, on aura

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-3$	$\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}$
$n-4$	$\frac{2.3.3.(n-3)}{n(n-1)(n-2)}$
$n-5$	$9.\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$
$n-6$	$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$

En considérant les numérateurs, leur somme $6+18m+9m(m-1)+m(m-1)(m-2)$ se présentera sous la forme $(m+1)(m+2)(m+3)$, ici $m=n-3$ et par conséquent, l'équation identique, qui sert à déterminer les coefficients 6, 18 et 9 sera:

$$A+Bm+Cm(m-1)+m(m-1)(m-2)=(m+1)(m+2)(m+3).$$

En tirant trois fois de suite, l'équation identique, pour déterminer les coefficients, sera de même

$$A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) + Em(m-1)(m-2)(m-3) +$$
$$Fm(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5) = \{(m+1)(m+2)(m+3)\}^2$$

et ainsi de suite.

Règle générale.

Toutes ces recherches nous conduisent à la règle suivante.

Si on a n billets, dont on tire p à chaque reprise, et cela q fois de suite, on demande les probabilités des différents nombres des billets non-sortants.

A cet effet, on commence par chercher les coefficients A, B, C, etc. de l'équation identique.

$$A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) + \ldots \{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p(q-1)+1)\} =$$
$$\{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+p)\}^{q-1}$$

alors les numérateurs des probabilités respectives seront

$$A, \quad Bm, \quad Cm(m-1), \quad Dm(m-1)(m-2)\ldots\ldots m(m-1)(m-2)\ldots(m-p(q-1)+1)$$

m étant $= n - p$, et le dénominateur étant pour toutes le même

$$n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots\ldots(n-p+1)^{q-1}.$$

Voici le tableau:

Nombre des billets non-sortants	probabilités
$n-p$	$\dfrac{A}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-1$	$\dfrac{B(n-p)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-2$	$\dfrac{C(n-p)(n-p-1)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-3$	$\dfrac{D(n-p)(n-p-1)(n-p-2)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$n-pq$	$\dfrac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-pq+1)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$