XVI.

Réflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée Loterie génoise.

(Lu à l'Académie de Berlin le 10 Mars 1763.)

Un Italien proposa autrefois un projet d'une espèce de loterie qui paraissait fort au goût de la plupart des hommes, à cause des gains très considérables qu'on y pouvait faire sans presque rien risquer. Le plan était entièrement différent des loteries ordinaires, parce que chacun pouvait déterminer non seulement sa mise, mais aussi la grandeur du gain auquel il voulait aspirer. Il y avait plutôt quelque ressemblance avec le jeu de Pharaon, à l'égard des mises arbitraires qu'on peut mettre sur telle carte qu'on veut; mais il est pourtant différent par rapport aux prix que chacun peut choisir à volonté. L'arrangement de cette loterie dépend uniquement du calcul de probabilité, et l'entrepreneur, au lieu d'en tirer un profit fixe, risque de perdre très considérablement, quoique selon le plan dont je viens de parler, il soit probable qu'il gagne une bonne partie de tout l'argent qui y aura été mis. C'est à peu près comme si je m'engageais à payer à un autre 100 écus pour un qu'il m'aurait donné, dans le cas qu'il jetterai avec trois dés, la première fois, trois *six*; il serait très possible que je perdisse à ce jeu 99 écus. Or la probabilité de gagner un écu étant 215 fois plus grande que celle de perdre 99 écus, l'avantage est de mon côté et est estimé valoir $\frac{29}{54}$ écus, ou un peu plus qu'un demi-écu. C'est à dire, si je m'engageais de cette manière envers 1000 personnes dont chacune m'aurait donné un écu, je pourrais estimer mon avantage à $537\frac{1}{27}$ écus, quoiqu'il soit possible que je perdisse 99000 écus. C'est sur ce pied qu'on pourra évaluer l'avantage de celui qui entreprendrait la loterie mentionnée, en comparant la mise de chacun avec la probabilité qu'il aura de gagner.

Description de cette loterie.

Cette loterie consiste en 90 billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à 90, desquels on se propose de tirer au hasard 5 à un temps fixé; et alors ces cinq numéros feront gagner ceux qui en auront auparavant choisi un, ou deux, ou trois, pour y attacher leurs mises. Car on peut participer à cette loterie de plusieurs manières différentes.

I. Ou on choisit à volonté un nombre qui ne surpasse point 90, et on paie aussi une somme d'argent qu'on jugera à propos. Alors quand ce nombre se rencontre parmi les cinq qui seront tirés, on retirera un prix qui sera un certain multiple de la mise.

II. Ou on choisit deux nombres à la fois, auxquels on attache une certaine mise, et en cas que tous les deux se trouvent ensuite parmi les cinq tirés, on recevra un prix assez considérable à proportion de la mise. Or si l'un d'eux seulement se trouve parmi les cinq, on reçoit aussi un prix moindre.

III. Ou on choisit trois nombres à la fois auxquels on attache à volonté une certaine mise, et l'on peut s'attendre à un prix quelques mille fois plus grand que la mise, en cas que tous les trois nombres se trouvent parmi les cinq tirés; mais les prix seront moindres, lorsque deux des nombres choisis, ou un seul s'y trouve.

Je ne me souviens plus de la grandeur des prix en détail qu'on paie en chaque cas, ce qui n'importe rien aux recherches que je me propose de faire; mais on comprend aisément qu'ils peuvent être très considérables pour le cas où trois nombres qu'on aura choisis, se rencontrent parmi les cinq tirés. Et si l'on voulait admettre des quaternaires, le prix fixé pour le cas où tous les quatre nombres se trouveraient dans les cinq billets sortis, pourrait au delà de 100000 fois surpasser la quantité de la mise.

Il est évident que ni le nombre 90 des billets, ni celui des 5 qu'on tire, n'est essentiel à la nature de cette loterie, et qu'il est absolument libre d'établir un nombre de billets quelconque, et d'en tirer enfin plus ou moins que cinq, ce qui me mène à des recherches plus générales qui peuvent servir ou à former d'autres plans de telles loteries, ou à examiner ceux qui pourront être proposés par d'autres.

Posons donc n pour le nombre de tous les billets marqués des nombres $1, 2, 3 \ldots . n$, et qu'on en tire au hasard t, et tout revient à déterminer la probabilité que d'un certain nombre de numéros qu'on aura choisis, il se trouve ou un seul, ou deux, ou trois, ou enfin tous dans les t billets qu'on va tirer. Or, selon le nombre des numéros, la détermination de la probabilité qu'on cherche, se réduit aux problèmes suivants:

1. **Problème 1.** Le nombre de tous les billets étant $= n$, dont on doit tirer au hasard t billets, trouver la probabilité qu'un nombre choisi à volonté s'y trouvera.

Solution. Il est évident, par les premières règles de la probabilité, que pour que le nombre choisi se trouve parmi les t billets qu'on va tirer, le nombre de tous les billets étant $= n$, la probabilité est $= \frac{t}{n}$, et pour qu'il ne s'y trouve pas, la probabilité est $= \frac{n-t}{n}$. Donc la solution fournit: que le nombre choisi

se trouve parmi les billets tirés, la probabilité est $\frac{t}{n}$

qu'il ne s'y trouve pas « « $\frac{n-t}{n}$.

2. **Corollaire 1.** Donc, si le nombre de tous les billets est 90, et qu'on en tire 5, comme dans le cas proposé au commencement,

qu'un nombre choisi	la probabilité est
se trouve parmi les 5 billets	$\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$;
et qu'il ne s'y trouve point	$\frac{85}{90} = \frac{17}{18}$.

3. **Corollaire 2.** Si l'on établissait 100 billets, et qu'on en voulût tirer 10, ayant choisi un nombre à volonté, alors

que ce nombre se trouve	la probabilité est
parmi les 10 billets tirés	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
qu'il ne s'y trouve pas	$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$.

4. **Problème 2.** Le nombre de tous les billets étant $= n$ dont on va tirer t billets, si l'on a choisi deux nombres, trouver la probabilité ou que tous les deux à la fois, ou qu'un seul, ou qu'aucun ne se trouve parmi les billets tirés.

Solution. Distinguons les deux nombres choisis, l'un par A, l'autre par B, et que A se trouve parmi les t billets tirés, la probabilité est $= \frac{t}{n}$, et qu'il ne s'y trouve point, $= \frac{n-t}{n}$. Supposons que A s'y trouve déjà, et pour voir si B s'y trouve aussi, ou non, il faut considérer que de $n-1$ billets on tire seulement $t-1$, et que B s'y trouve, la probabilité est $\frac{t-1}{n-1}$, et qu'il ne s'y trouve point, $= \frac{n-t}{n-1}$. Donc que tous les deux nombres A et B s'y trouvent à la fois, la probabilité est $= \frac{t(t-1)}{n(n-1)}$, et que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est $= \frac{t(n-t)}{n(n-1)}$. La même probabilité est pour que le seul nombre B s'y trouve; donc que l'un ou l'autre s'y trouve sans distinction, la probabilité est $= \frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$. Or, qu'aucun des deux ne s'y trouve, ou que tous les deux restent parmi les $n-t$ nombres non tirés, la probabilité sera $= \frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$, d'où nous tirons les conclusions suivantes:

que de deux nombres choisis	la probabilité est
tous les deux s'y trouvent	$\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$
qu'un seul s'y trouve	$\frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$.

5. **Problème 3.** Le nombre de tous les billets étant $= n$, dont on va tirer au hasard t billets; si l'on a choisi trois nombres, déterminer la probabilité ou que tous les trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun ne se trouve parmi les billets tirés.

Solution. Distinguons les trois nombres choisis par les lettres A, B, C, et que les deux, A et B, se trouvent parmi les billets tirés, la probabilité est $\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$, et qu'aucun ne s'y trouve, $= \frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$. Supposons que les deux nombres A et B s'y trouvent, et nous aurons encore à considérer $n-2$ billets, et à chercher la probabilité que le nombre C se trouve parmi les $t-2$ billets qui en sortiront; or, cette probabilité est évidemment $= \frac{t-2}{n-2}$, et que C n'y soit point, la probabilité est

$=\frac{n-t}{n-2}$. Donc, pour que tous les trois nombres A, B, C se trouvent parmi les billets tirés, la probabilité est $=\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$; or, que seulement A et B s'y trouvent, sans C, la probabilité est $=\frac{t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$. Mais il sera également probable qu'on y trouve seulement les deux A et C, ou les deux B et C; donc, pour que deux seulement, sans distinction, se trouvent dans les t billets tirés, la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$. Ensuite, que le nombre A s'y trouve, la probabilité est $=\frac{t}{n}$; mais que les deux autres B et C se trouvent parmi les billets restants $n-t$, le nombre de tous devant maintenant être regardé comme $n-1$, la probabilité est $=\frac{(n-t)(n-t-1)}{(n-1)(n-2)}$; donc, pour que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est $=\frac{t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$, et puisque chacun des deux autres, B et C, peut s'y trouver aussi problablement, la probabilité qu'un seul, quel qu'il soit, s'y trouve, est $=\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$. D'où nous concluons

que de trois nombres choisis	la probabilité est
tous les trois s'y trouvent . . .	$\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$
que deux seulement s'y trouvent	$\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$
qu'un seul s'y trouve . . .	$\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

6. **Problème 4.** Le nombre de tous les billets étant $=n$, dont on va tirer t billets, si l'on a choisi quatre nombres, déterminer la probabilité, ou que tous les quatre, ou que trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun d'entre eux ne se trouve dans les billets tirés.

Solution. Désignons les quatre nombres choisis par les lettres A, B, C, D, et ayant déjà déterminé la probabilité que des trois nombres A, B, C, ou tous les trois, ou deux, ou un seul ou aucun ne se trouve dans les billets tirés, nous n'avons qu'à combiner avec chacun de ces cas la probabilité que le quatrième nombre D s'y trouve aussi, ou non; ce qui nous fraiera le chemin de pousser aisément nos recherches à autant de nombres choisis qu'on voudra. Reprenons donc les formules trouvées pour trois nombres A, B, C, et joignons y la probabilité que le quatrième D s'y trouve, ou non:

que des nombres A, B, C il se trouve dans les billets tirés	la probabilité est	que le quatrième D s'y trouve	que le quatrième D ne s'y trouve pas
tous les trois	$\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t-3}{n-3}$	$\frac{n-t}{n-3}$
deux seulement . . .	$\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t-2}{n-3}$	$\frac{n-t-1}{n-3}$
un seul	$\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t-1}{n-3}$	$\frac{n-t-2}{n-3}$
aucun	$\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t}{n-3}$	$\frac{n-t-3}{n-3}$

De là nous déduisons la probabilité:

I. que les trois A, B, C avec le quatrième D s'y trouvent

$$\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

II. que les trois A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouvent, et que deux des A, B, C avec le nombre D s'y trouvent

$$\frac{t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{3t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

donc que trois quelconques des quatre A, B, C, D s'y trouvent, la probabilité est

$$\frac{4t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

III. que deux seulement des trois A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouvent

la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

et qu'un seul des trois A, B, C avec le quatrième D s'y trouve

la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$,

donc que deux quelconques seulement des quatre nombres A, B, C, D se trouvent dans les billets tirés

la probabilité sera $=\frac{6t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$;

IV. qu'un seul des trois nombres A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouve

la probabilité est $=\frac{3t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

et que nul des trois A, B, C, mais le quatrième D seul s'y trouve

la probabilité est $=\frac{t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$,

donc qu'un seul quelconque de tous les quatre A, B, C, D, se trouve dans les billets tirés

la probabilité sera $=\frac{4t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$;

V. enfin, qu'aucun des trois A, B, C, ni le quatrième D ne se trouve dans les billets tirés

la probabilite sera $=\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)(n-t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

7. **Problème 5.** Le nombre de tous les billets étant $=n$, dont on va tirer t billets, si l'on a choisi autant de nombres qu'on veut, déterminer la probabilité de tous les cas possibles qui peuvent avoir lieu.

Solution. La méthode que je viens d'expliquer dans la solution du problème précédent sert à découvrir successivement les probabilités de plusieurs nombres choisis, et la loi de leur progression étant évidente, nous n'avons qu'à mettre ici devant les yeux les formules pour chaque nombre de numéros qu'on aura choisis. Mais pour abréger ces formules, puisque n marque le nombre de tous les billets, et t le nombre de ceux qu'on en va tirer, désignons par r le nombre de ceux qui restent, de sorte que $r = n - t$, ou $n = t + r$.

I. Ayant choisi un seul nombre:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouve ce nombre	$1.\dfrac{t}{n} = 1\,A^1$
qu'il ne s'y trouve pas . . .	$1.\dfrac{r}{n} = 1\,A^0$

II. Ayant choisi deux nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les deux . . .	$1.\dfrac{t(t-1)}{n(n-1)} = 1\,B^2$
un seul	$2.\dfrac{tr}{n(n-1)} = 2\,B^1$
nul	$1.\dfrac{r(r-1)}{n(n-1)} = 1\,B^0$

III. Ayant choisi trois nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les trois . . .	$1.\dfrac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)} = 1\,C^3$
deux seulement	$3.\dfrac{t(t-1)r}{n(n-1)(n-2)} = 3\,C^2$
un seul	$3.\dfrac{tr(r-1)}{n(n-1)(n-2)} = 3\,C^1$
nul	$1.\dfrac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} = 1\,C^0$

IV. Ayant choisi quatre nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les quatre . .	$1.\dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 1\,D^4$
trois seulement	$4.\dfrac{t(t-1)(t-2)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 4\,D^3$
deux seulement	$6.\dfrac{t(t-1)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 6\,D^2$
un seul	$4.\dfrac{tr(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 4\,D^1$
nul	$1.\dfrac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 1\,D^0$

V. Ayant choisi cinq nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les cinq . . .	$1.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 1E^5$
quatre seulement	$5.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5E^4$
trois seulement	$10.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 10E^3$
deux seulement	$10.\ \dfrac{t(t-1)r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 10E^2$
un seul	$5.\ \dfrac{tr(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5E^1$
nul	$1.\ \dfrac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 1E^0$

VI. Ayant choisi six nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les six . . .	$1.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 1F^6$
cinq seulement	$6.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 6F^5$
quatre seulement	$15.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 15F^4$
trois seulement	$20.\ \dfrac{t(t-1)(t-2)r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 20F^3$
deux seulement	$15.\ \dfrac{t(t-1)r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 15F^2$
un seul	$6.\ \dfrac{tr(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 6F^1$
nul	$1.\ \dfrac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 1F^0$

etc.

Pour abréger, j'ai donné à chacune de ces formules une certaine marque dont je me servirai dans la suite. C'est donc de là qu'il faudra toujours tirer la signification de ces marques.

8. **Corollaire 1.** Il est évident, comment les valeurs des marques de chaque ordre se peuvent aisément trouver des valeurs des marques de l'ordre précédent. La manière suivante semble la plus simple:

$$B^2 = \frac{t-1}{n-1}A^1, \quad B^1 = \frac{r}{n-1}A^1, \quad B^0 = \frac{r-1}{n-1}A^0;$$

$$C^3 = \frac{t-2}{n-2}B^2, \quad C^2 = \frac{r}{n-2}B^2, \quad C^1 = \frac{r-1}{n-2}B^1, \quad C^0 = \frac{r-2}{n-2}B^0;$$

$$D^4=\frac{t-3}{n-3}C^3,\quad D^3=\frac{r}{n-3}C^3,\quad D^2=\frac{r-1}{n-3}C^2,\quad D^1=\frac{r-2}{n-3}C^1,\quad D^0=\frac{r-3}{n-3}C^0;$$

$$E^5=\frac{t-4}{n-4}D^4,\quad E^4=\frac{r}{n-4}D^4,\quad E^3=\frac{r-1}{n-4}D^3,\quad E^2=\frac{r-2}{n-4}D^2,\quad E^1=\frac{r-3}{n-4}D^1,\quad E^0=\frac{r-4}{n-4}D^0;$$

$$F^6=\frac{t-5}{n-5}E^5,\quad F^5=\frac{r}{n-5}E^5,\quad F^4=\frac{r-1}{n-5}E^4,\quad F^3=\frac{r-2}{n-5}E^3,\quad F^2=\frac{r-3}{n-5}E^2,\quad F^1=\frac{r-4}{n-5}E^1,\quad F^0=\frac{r-5}{n-5}E^0$$

etc.

9. **Corollaire 2.** Le calcul des valeurs de toutes ces marques pourra donc, dans chaque cas, aisément se faire par le calcul des logarithmes. C'est à cette fin, que j'ai séparé de chaque marque son coefficient numérique dont on tiendra facilement compte, après avoir trouvé la valeur de la marque.

10. **Corollaire 3.** Il faut donc bien prendre garde qu'on ne prenne point ces marques pour des puissances, puisque les nombres, qui tiennent lieu des exposants, ne sont pas de vrais exposants de puissances, mais ils marquent seulement le nombre des numéros dont il est probable qu'ils se trouvent, en chaque cas, parmi les billets tirés.

11. **Corollaire 4.** Puisque les probabilités, prises ensemble, de tous les cas possibles de chaque ordre, doivent donner une certitude complète, leur somme sera toujours égale à l'unité. Ainsi l'on aura:

$$1A^1+1A^0=1$$
$$1B^2+2B^1+1B^0=1$$
$$1C^3+3C^2+3C^1+1C^0=1$$
$$1D^4+4D^3+6D^2+4D^1+1D^0=1$$

etc.

12. **Problème 6.** Ayant établi une telle loterie de n billets, dont on va tirer t billets, déterminer les prix, conformément à la loi d'égalité, qu'on est obligé de payer aux participants dans chaque cas, par rapport à leur mise.

Solution. Puisque le prix est toujours proportionné à la mise, supposons la mise toujours d'un écu, de sorte que, pour chaque écu que le participant aura payé, il en retirera les prix que nous allons déterminer conformément aux règles de l'égalité. Pour cet effet, il faut considérer séparément les cas où le participant aura choisi un, ou deux, ou trois, ou quatre, etc. nombres, ce qui nous mène aux recherches suivantes:

I. Si le participant n'a choisi qu'un nombre, et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soit le prix
ce nombre se trouve	$1A^1$	a
qu'il ne s'y trouve pas	$1A^0$	0

La probabilité est donc A^1 qu'il retire a, et A^0 qu'il ne retire rien, d'où son avantage est $=A^1a$, qui selon les règles de l'égalité, lui doit valoir autant que sa mise 1. Il faut donc qu'il soit $A^1a=1$, et partant le prix doit être $a=\frac{1}{A^1}$.

II. Si le participant a choisi deux nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les deux	$1B^2$	a
un seul	$2B^1$	b
nul	$1B^0$	0

L'avantage du participant sera donc $1B^2a + 2B^1b$ qui doit être égalé à la mise 1, de sorte que nous ayons $1B^2a + 2B^1b = 1$, d'où l'on peut déterminer les deux prix a et b par une infinité de manières différentes, car, quelque valeur qu'on prenne pour l'un, on trouvera celle de l'autre. Mais, puisqu'il faut éviter les cas où l'un s'évanouirait, ou deviendrait même négatif, on remplira cette condition le plus commodément en partageant l'unité en deux parties α et β, de sorte qu'il soit $\alpha + \beta = 1$, et alors on aura les prix en général: $a = \frac{\alpha}{1B^2}$ et $b = \frac{\beta}{2B^1}$.

III. Si le participant a choisi trois nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les trois	$1C^3$	a
deux seulement	$3C^2$	b
un seul	$3C^1$	c
nul	$1C^0$	0

L'avantage du participant étant donc $1C^3a + 3C^2b + 3C^1c$, il faut qu'il soit équivalent à la mise 1. Pour cet effet, partageons la mise 1 à volonté en trois parties α, β, γ, de sorte qu'il y ait $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et de là nous aurons, en général, les déterminations suivantes des prix

$$a = \frac{\alpha}{1C^3}, \quad b = \frac{\beta}{3C^2}, \quad c = \frac{\gamma}{3C^1},$$

d'où l'on voit que ces trois prix peuvent être variés à l'infini.

IV. Si le participant a choisi quatre nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les quatre	$1D^4$	a
trois seulement	$4D^3$	b
deux seulement	$6D^2$	c
un seul	$4D^1$	d
nul	$1D^0$	0

Partageons maintenant l'unité en quatre parties égales ou inégales, comme on jugera à propos, ou posons $1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, et les valeurs des prix seront

$$a = \frac{\alpha}{1D^4}, \quad b = \frac{\beta}{4D^3}, \quad c = \frac{\gamma}{6D^2}, \quad d = \frac{\delta}{4D^1}.$$

V. Si le participant a choisi cinq nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les cinq . . .	$1E^5$	a
quatre seulement . . .	$5E^4$	b
trois seulement	$10E^3$	c
deux seulement	$10E^2$	d
un seul	$5E^1$	e
nul . . .	$1E^0$	0

Qu'on partage à volonté l'unité en cinq parties, de sorte qu'il soit $1=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$, et l'on aura, en général, la juste détermination de ces prix

$$a=\frac{\alpha}{1E^5},\quad b=\frac{\beta}{5E^4},\quad c=\frac{\gamma}{10E^3},\quad d=\frac{\delta}{10E^2},\quad e=\frac{\varepsilon}{5E^1}.$$

Cette détermination est si aisée, qu'il serait superflu d'aller plus loin, et il n'est pas probable qu'on fasse jamais usage de plus de 5 nombres, à cause des prix trop exorbitants qu'on devrait accorder.

13. **Corollaire 1.** Ce n'est donc que dans le premier cas que le prix est déterminé $a=\frac{1}{E}$; dans les autres cas, on peut d'autant plus varier les prix, que le nombre des billets choisis est grand. Cela dépend de la division de l'unité en autant de parties qu'il y a de prix en chaque cas.

14. **Corollaire 2.** La première manière de diviser l'unité est celle qui prend des parties égales, et alors on a

$$\text{pour le second cas}\quad \alpha=\beta=\frac{1}{2}$$

$$\text{pour le troisième}\quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$$

$$\text{pour le quatrième}\quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}$$

$$\text{pour le cinquième}\quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{5}$$

d'où l'on tirera des prix déterminés pour chaque cas.

15. **Corollaire 3.** Si l'on juge que, de cette façon, les hauts prix des cas supérieurs deviennent trop grands, les coefficiens numériques nous fournissent une telle manière de diviser, qui en rendant les formules plus simples, semble produire une espèce d'égalité. On pourrait prendre

$$\text{pour le II cas:}\quad \alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=\frac{2}{3}$$

$$\text{III cas:}\quad \alpha=\frac{1}{7},\quad \beta=\frac{3}{7},\quad \gamma=\frac{3}{7}$$

$$\text{IV cas:}\quad \alpha=\frac{1}{15},\quad \beta=\frac{4}{15},\quad \gamma=\frac{6}{15},\quad \delta=\frac{4}{15}$$

$$\text{V cas:}\quad \alpha=\frac{1}{31},\quad \beta=\frac{5}{31},\quad \gamma=\frac{10}{31},\quad \delta=\frac{10}{31},\quad \varepsilon=\frac{5}{31}.$$

16. **Corollaire 4.** Si l'on voulait diminuer d'avantage les hauts prix pour rendre plus considérables les autres, on pourrait se servir des divisions suivantes:

II cas: $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{4}{5}$

III cas: $\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = \frac{6}{16}$, $\gamma = \frac{9}{16}$

IV cas: $\alpha = \frac{1}{43}$, $\beta = \frac{8}{43}$, $\gamma = \frac{18}{43}$, $\delta = \frac{16}{43}$

V cas: $\alpha = \frac{1}{106}$, $\beta = \frac{10}{106}$, $\gamma = \frac{30}{106}$, $\delta = \frac{40}{106}$, $\varepsilon = \frac{25}{106}$.

17. Scholie. Représentons à la fois les prix que fourniront ces trois manières différentes de partager l'unité en chaque cas:

Ayant choisi	En cas que dans les billets tirés se trouvent	Les prix d'après la I manière	II manière	III manière
un nombre	le nombre	$\frac{1}{A^1}$	$\frac{1}{A^1}$	$\frac{1}{A^1}$
	ou non	0	0	0
deux nombres	tous les deux	$\frac{1}{2B^2}$	$\frac{1}{3B^2}$	$\frac{1}{5B^2}$
	un seul	$\frac{1}{4B^1}$	$\frac{1}{3B^1}$	$\frac{2}{5B^1}$
	nul	0	0	0
trois nombres	tous les trois	$\frac{1}{3C^3}$	$\frac{1}{7C^3}$	$\frac{1}{16C^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{9C^2}$	$\frac{1}{7C^2}$	$\frac{2}{16C^2}$
	un seul	$\frac{1}{9C^1}$	$\frac{1}{7C^1}$	$\frac{3}{16C^1}$
	nul	0	0	0
quatre nombres	tous les quatre	$\frac{1}{4D^4}$	$\frac{1}{15D^4}$	$\frac{1}{43D^4}$
	trois seulement	$\frac{1}{16D^3}$	$\frac{1}{15D^3}$	$\frac{2}{43D^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{24D^2}$	$\frac{1}{15D^2}$	$\frac{3}{43D^2}$
	un seul	$\frac{1}{16D^1}$	$\frac{1}{15D^1}$	$\frac{4}{43D^1}$
	nul	0	0	0
cinq nombres	tous les cinq	$\frac{1}{5E^5}$	$\frac{1}{31E^5}$	$\frac{1}{106E^5}$
	quatre seulement	$\frac{1}{25E^4}$	$\frac{1}{31E^4}$	$\frac{2}{106E^4}$
	trois seulement	$\frac{1}{50E^3}$	$\frac{1}{31E^3}$	$\frac{3}{106E^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{50E^2}$	$\frac{1}{31E^2}$	$\frac{4}{106E^2}$
	un seul	$\frac{1}{25E^1}$	$\frac{1}{31E^1}$	$\frac{5}{106E^1}$
	nul	0	0	0

18. **Problème 7.** Ayant fixé les prix d'une telle loterie selon la loi de l'égalité, trouver la diminution de ces prix, afin que l'entrepreneur en retire un profit prescrit.

Solution. Par rapport aux frais que l'établissement d'une telle loterie exige, il faut rabattre quelque chose des prix que la loi de l'égalité a fournis, comme cela se pratique dans les loteries ordinaires. Outre cela, une telle loterie ne saurait être permise que pour des besoins importants, et à cet égard la diminution des prix doit être plus considérable. Mais, puisque le profit n'est pas certain, comme dans les autres loteries, et qu'il pourrait arriver que l'entrepreneur, malgré toute la probabilité, y perdît très considérablement, il est bien juste que le rabais des prix soit plus grand qu'à l'ordinaire où l'on se contente de 10 pour cent. Cependant, comme ce ne sont que les grands prix qui pourraient ruiner l'entrepreneur, il est raisonnable qu'on augmente le rabais seulement dans ceux-ci, et qu'on laisse celui des petits prix à dix pour-cent. Un plus grand rabais dans les petits prix sauterait aussi trop aux yeux, et dégoûterait les participants, au lieu que, dans les grands prix on ne s'aperçoit presque point de la diminution, vu que peu de personnes sont en état d'en calculer la juste valeur. Or pour procurer à la caisse un profit de 10 pour-cent sur les moindres prix, on n'a qu'à les multiplier par $\frac{9}{10}$: ce seraient donc les prix de chaque cas qui répondent à un seul nombre. Pour les prix qui répondent à deux nombres, on pourrait bien les multiplier par $\frac{8}{10}$, ce qui produirait un profit de 20 pour-cent, sans qu'on s'en aperçoive aisément. Et lorsque trois nombres se rencontrent dans les billets tirés, on pourrait, avec autant de raison, multiplier les prix par $\frac{7}{10}$, et ceux qui conviennent à quatre nombres par $\frac{6}{10}$, et enfin celui qui convient à cinq nombres par $\frac{5}{10}$, ce qui est équivalent à un profit de 50 pour-cent. Mais, en chaque cas, on pourra régler la diminution des prix comme on jugera le plus à propos, et on aura principalement en vue d'arrondir les nombres autant qu'il sera possible. Ayant donc fait le plan sur les prix conformes à la loi de l'égalité, il sera aisé d'y appliquer les diminutions les plus convenables qui remplissent le mieux les conditions qu'on aura en vue.

19. **Problème 8.** Le nombre de tous les billets étant 90 dont on doit tirer en son temps 5, dresser le plan des prix qui conviennent à tous les cas, selon la loi de l'égalité.

Solution. Ici est renfermée la loterie projetée autrefois et dont j'ai parlé au commencement. Nous verrons bientôt quels prix elle pouvait promettre, en assignant ceux que la loi d'égalité exige. Or, pour appliquer à ce cas nos formules générales, nous avons $n=90$, $t=5$, et partant $r=85$, d'où nous tirons d'abord $A^1=\frac{1}{18}$ et $A^0=\frac{17}{18}$, et ces deux valeurs nous mènent à celles de toutes les marques suivantes. Mais, puisque nous avons besoin de ces valeurs renversées, je m'en vais les exprimer en sorte, de même que leurs logarithmes, pour en faciliter ensuite le calcul:

$-lA^0=0{,}0248236$	$1:A^0=\quad 1{,}0588$
$-lA^1=1{,}2552725$	$1:A^1=\quad 18{,}0000$
$-lB^0=0{,}0499343$	$1:B^0=\quad 1{,}1218$
$-lB^1=1{,}2752436$	$1:B^1=\quad 18{,}8470$
$-lB^2=2{,}6026025$	$1:B^2=400{,}5000$

$-lC^0 = 0{,}0753389$ $\quad 1:C^0 = 1{,}1894$
$-lC^1 = 1{,}2954470$ $\quad 1:C^1 = 19{,}7445$
$-lC^2 = 2{,}6176663$ $\quad 1:C^2 = 414{,}6354$
$-lC^3 = 4{,}0699659$ $\quad 1:C^3 = 11748{,}054$

$-lD^0 = 0{,}1010443$ $\quad 1:D^0 = 1{,}262$
$-lD^1 = 1{,}3158882$ $\quad 1:D^1 = 20{,}695$
$-lD^2 = 2{,}6329063$ $\quad 1:D^2 = 429{,}44$
$-lD^3 = 4{,}0800649$ $\quad 1:D^3 = 12024{,}5$
$-lD^4 = 5{,}7084532$ $\quad 1:D^4 = 511038$

$-lE^0 = 0{,}1270578$ $\quad 1:E^0 = 1{,}340$
$-lE^1 = 1{,}3365728$ $\quad 1:E^1 = 21{,}705$
$-lE^2 = 2{,}6483267$ $\quad 1:E^2 = 444{,}96$
$-lE^3 = 4{,}0902841$ $\quad 1:E^3 = 12310{,}5$
$-lE^4 = 5{,}7135334$ $\quad 1:E^4 = 517051$
$-lE^5 = 7{,}6429517$ $\quad 1:E^5 = 43949268$

Voilà donc le plan de cette loterie selon les trois manières différentes:

		I manière	II manière	III manière
I cas	1	18	18	18
II cas	2	200,25	133,5	80,1
	1	4,712	6,282	7,539
III cas	3	3916,02	1678,29	734,25
	2	46,071	59,234	51,830
	1	2,1938	2,8206	3,7021
IV cas	4	127759,5	34069,2	11844,6
	3	751,53	801,63	559,28
	2	17,893	28,629	29,961
	1	1,2934	1,3791	1,9251
V cas	5	8789853,6	1417718,3	414615,7
	4	20682,04	16679,06	9755,68
	3	246,210	397,113	348,410
	2	8,899	14,353	16,791
	1	0,8682	0,7001	1,0238

A présent il est aisé de diminuer ces prix à proportion du profit qu'on veut procurer à l'entrepreneur.

20. **Corollaire I.** Puisque ces trois manières sont également conformes à la loi de l'égalité, rien n'empêche qu'on ne mette en usage toutes les trois à la fois, et qu'on n'accorde aux partici-

pants la liberté de soumettre leur mise à celle qui leur plaira le mieux. Ainsi ceux qui choisiront deux ou plusieurs nombres, seront les maîtres de se déterminer ou pour la première manière, ou pour la seconde, ou pour la troisième.

21. **Corollaire 2.** Cependant, il sera de l'intérêt de l'entrepreneur, d'exclure entièrement la première manière, pour le cas où l'on choisit cinq nombres. Car, en cas qu'on attrapperait précisément tous les cinq nombres qui seront tirés dans les cinq billets, le prix de presque 9 millions fût-il diminué jusqu'à la moitié, pourrait ruiner la banque.

Scholie. Or en diminuant ces prix selon les règles expliquées ci-dessus et en arrondissant les nombres, on pourra former le plan suivant qui doit probablement apporter à l'entrepreneur un profit très considérable, sans qu'il paraisse désavantageux aux intéressés.

Plan d'une telle loterie à 90 *billets dont on doit tirer* 5.

Ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants: écus	écus	écus
1 nombre	ce nombre	16	16	16
2 nombres	tous les deux	160	106	64
	un seul	4	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$
3 nombres	tous les trois	2741	1174	513
	2 seulement	36	47	41
	un seul	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$
4 nombres	tous les quatre	76655	20441	7130
	3 seulement	526	561	391
	2 seulement	14	$22\frac{1}{2}$	24
	un seul	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
5 nombres	tous les cinq	4394925	708859	207305
	4 seulement	12409	10007	5853
	3 seulement	172	278	243
	2 seulement	7	$11\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
	un seul	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

On pourrait encore mieux arrondir ces nombres et augmenter, par ce moyen, insensiblement d'avantage le profit de l'entreprise.

23. **Problème 9.** Le nombre de tous les billets étant 100, dont on doit tirer en son temps 9, dresser le plan des prix qui conviennent à tous les cas, selon la loi de l'égalité.

Solution. Le nombre des billets qu'on doit tirer, étant ici plus grand qu'auparavant, les prix pour le cas de 5 nombres choisis ne deviendront plus si exorbitants que dans le plan précédent, ce qui rendra l'exécution moins dangereuse.

Ayant donc ici $n=100$, $t=9$ et partant $r=91$, nous avons d'abord $A^1=\frac{9}{100}$ et $A^0=\frac{91}{100}$, d'où nout tirerons les valeurs des marques suivantes.

$$
\begin{array}{ll}
-lA^0=0,0409586 & 1:A^0= \quad 1,0989 \\
-lA^1=1,0457575 & 1:A^1= \quad 11,1111 \\
\hline
-lB^0=0,0823513 & 1:B^0= \quad 1,2087 \\
-lB^1=1,0823513 & 1:B^1= \quad 12,0879 \\
-lB^2=2,1383027 & 1:B^2= \quad 137,50 \\
\hline
-lC^0=0,1241874 & 1:C^0= \quad 1,3310 \\
-lC^1=1,1193349 & 1:C^1= \quad 13,1624 \\
-lC^2=2,1704874 & 1:C^2= \quad 148,077 \\
-lC^3=3,2844308 & 1:C^3= \quad 1925,0 \\
\hline
-lD^0=0,1664764 & 1:D^0= \quad 1,4671 \\
-lD^1=1,1567166 & 1:D^1= \quad 14,3455 \\
-lD^2=2,2030166 & 1:D^2= \quad 159,594 \\
-lD^3=3,3121611 & 1:D^3= \quad 2051,92 \\
-lD^4=4,4930512 & 1:D^4= \quad 31120,833 \\
\hline
-lE^0=0,2092283 & 1:E^0= \quad 1,6189 \\
-lE^1=1,1945051 & 1:E^1= \quad 15,6497 \\
-lE^2=2,2358978 & 1:E^2= \quad 172,146 \\
-lE^3=3,3401898 & 1:E^3= \quad 2188,72 \\
-lE^4=4,5162810 & 1:E^4= \quad 32830,8 \\
-lE^5=5,7763524 & 1:E^5=597520
\end{array}
$$

De ces valeurs on formera, selon les trois manières, le plan suivant:

Cas	sortent	I manière	II manière	III manière
I	1	11,111	11,111	11,111
II	2	68,75	45,83	27,50
	1	3,022	4,029	4,835
III	3	641,66	275,00	120,3125
	2	16,453	21,154	18,509
	1	1,462	1,880	2,468
IV	4	7780,208	2074,722	723,740
	3	128,240	136,795	95,439
	2	6,649	10,639	11,134
	1	0,8966	0,9564	1,3344
V	5	119504,	19274,84	5636,981
	4	1313,232	1059,06	619,450
	3	43,774	70,604	61,945
	2	3,443	5,553	6,496
	1	0,626	0,505	0,738

24. **Corollaire 1.** Pourvu qu'une telle loterie ne soit tirée jusqu'à ce que le fonds ne se soit accru au delà de quelques centaines de milliers d'écus, l'entrepreneur ne risque pas trop de se ruiner, vu que les plus hauts prix, après être diminués, ne monteront pas à 100000 écus, supposé que la mise ne surpasse pas un écu.

25. **Corollaire 2.** Mais en cas qu'on voudrait former une telle loterie en petit, et que le fonds entier ne monterait pas à 100000 écus, on devrait bien retrancher la première manière du cas de cinq billets choisis.

26. **Corollaire 3.** Il faut aussi remarquer que de telles loteries doivent être tirées à plusieurs reprises, afin que si une avait trop favorisé les participants, les autres puissent dédommager l'entrepreneur. Or chaque fois on peut tirer la loterie, aussitôt que le fonds surpasse une certaine somme proportionnée aux prix qu'on veut admettre.

27. **Scholie 1.** Diminuons ces prix suivant les règles données ci-dessus, et nous obtiendrons ce

Plan d'une telle loterie à 100 *billets dont on doit tirer* 9.

ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants			
		écus	écus	écus	en général
1 nombre	ce nombre	10	10	10	a
2 nombres	tous les deux	55	36	22	b
	un seul	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{3}$	c
3 nombres	tous les trois	449	192	84	d
	2 seulement	13	17	15	e
	un seul	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{3}$	2	f
4 nombres	tous les quatre	4668	1245	434	g
	3 seulement	90	96	$66\frac{2}{3}$	h
	2 seulement	$5\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{2}$	9	i
	un seul	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	k
5 nombres	tous les cinq	59752	9637	$2818\frac{1}{2}$	l
	4 seulement	788	635	$371\frac{2}{3}$	m
	3 seulement	$30\frac{1}{2}$	49	$43\frac{1}{3}$	n
	2 seulement	$2\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{4}$	5	p
	un seul	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	q

28. **Scholie 2.** Outre ces trois manières, on peut faire pour chaque cas, une infinité d'autres répartitions des prix que nous avons marqués en général dans ce plan, à côté, par les lettres a, b, c, d, etc. Si l'on veut que ces prix soient déjà diminués dans la même raison que nous avons diminué les autres, il faut les déterminer par les équations suivantes:

I. $\frac{10}{9}a.A^1 = 1$, ou $0,1a = 1$;

II. $\frac{10}{8}b.B^2 + \frac{10}{9}c.2B^1 = 1$, ou $0,0090909b + 0,1838383c = 1$;

III. $\frac{10}{7}d.C^3 + \frac{10}{8}e.3C^2 + \frac{10}{9}f.3C^1 = 1$, ou $0,000742115d + 0,02532467e + 0,2532467f = 1$;

IV. $\frac{10}{6}g.D^4 + \frac{10}{7}h.4D^3 + \frac{10}{8}i.6D^2 + \frac{10}{9}k.4D^1 = 1$, ou

$0,0000535547g + 0,0027848845h + 0,04699425i + 0,3098139k = 1.$

V. $\frac{10}{5}l.E^5 + \frac{10}{6}m.5E^4 + \frac{10}{7}n.10E^3 + \frac{10}{8}p.10E^2 + \frac{10}{9}q.5E^1 = 1$, ou

$0,0000033471681l + 0,000253827m + 0,00652698n + 0,07261263p + 0,3549952q = 1.$

De ces formules on pourra tirer les prix suivants qui semblent commodes pour la pratique

$$a = 10$$

$$b = 50, \quad c = 3$$

$$d = 200, \quad e = 20, \quad f = 1$$

$$g = 1000, \quad h = 100, \quad i = 10, \quad k = \frac{2}{3}$$

$$l = 5000, \quad m = 500, \quad n = 50, \quad p = 5, \quad q = \frac{1}{2}.$$

Par un tel plan la banque ne risquerait pas tant que suivant la première ou la seconde manière.