multitudo divisorum:	erit forma numerorum:
3	p^2
4	p^3, pq
5	p^4
6	p^5, p^2q
7	p^6
8	p^7, p^3q, pqr
9	p^8, p^2q^2
10	p^9, p^4q
11	p^{10}
12	p^{11}, p^5q, p^3q^2, p^2qr.

81. Cognita ergo forma cujusque numeri, classe scilicet ejusque specie, quo est referendus, non solum multitudo divisorum, sed etiam ipsi divisores ope regularum traditarum assignari possunt.

Caput III.

De summa divisorum cujusque numeri.

82. Proposito quocunque numero n, summam omnium ejus divisorum hoc modo $\int n$ designemus, ita ut haec scriptura $\int n$ denotet summam divisorum numeri n.

83. Cum ergo unitas alium divisorem praeter se ipsam non habeat, erit $\int 1 = 1$; cujusque vero alius numeri summa divisorum se ipso erit major, erit scilicet $\int n > n$, nisi sit $n = 1$.

84. Pro numeris primis p, quia alios non agnoscunt divisores praeter se ipsos et unitatem, erit $\int p = p + 1$. Tum vero pro potestatibus numerorum primorum erit

$$\int p^1 = p + 1 = \frac{pp-1}{p-1},$$

$$\int p^2 = pp + p + 1 = \frac{p^3-1}{p-1},$$

$$\int p^3 = p^3 + p^2 + p + 1 = \frac{p^4-1}{p-1},$$

et in genere

$$\int p^n = p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

85. Cum numerorum in forma pq contentorum divisores sint 1, p, q, pq, erit eorum summa $1 + p + q + pq = (1+p)(1+q)$, ideoque $\int pq = (p+1)(q+1)$.

Simili modo erit ex classe tertia

$$\int p^2q = (pp+p+1)(q+1) \quad \text{et} \quad \int pqr = (p+1)(q+1)(r+1).$$

86. Eodem modo in reliquis classibus divisores in unam summam colligere liceret; verum quo indoles harum summarum clarius perspiciatur, consideremus in genere numerum N, cujus divisores sint 1, α, β, γ, δ, ... N, quorum summa sit $\int N$. Multiplicetur ille per numerum primum p,

in eo non contentum, et productum Np praeter illos divisores insuper eosdem, per p multiplicatos, habebit, quorum ergo summa erit $p\int N$, unde colligitur fore $\int Np = (p+1)\int N = \int p \int N$.

87. Eodem modo ex § 74 colligitur, si numerus N per quadratum numeri primi p, in ipso non contenti, multiplicetur, producti Np^2 summam divisorum fore

$$(1+p+p^2)\int N, \quad \text{seu} \quad \int Np^2 = \int N . \int p^2; \quad \text{eodemque modo fore} \quad \int Np^3 = \int N . \int p^3$$

et ita porro.

88. Hinc pro singulis classibus et speciebus, divisorum summae ita exprimentur

$$\begin{aligned}
\int p &= 1+p \\
\int p^2 &= 1+p+p^2 \\
\int pq &= (1+p)\,(1+q) \\[1ex]
\int p^3 &= 1+p+p^2+p^3 \\
\int p^2q &= (1+p+p^2)\,(1+q) \\
\int pqr &= (1+p)\,(1+q)\,(1+r) \\[1ex]
\int p^4 &= 1+p+p^2+p^3+p^4 \\
\int p^3q &= (1+p+p^2+p^3)\,(1+q) \\
\int p^2q^2 &= (1+p+p^2)\,(1+q+q^2) \\
\int p^2qr &= (1+p+p^2)\,(1+q)\,(1+r) \\
\int pqrs &= (1+p)\,(1+q)\,(1+r)\,(1+s)
\end{aligned}$$

etc.

89. Ex his formulis deducimus sequentes conclusiones:

$$\begin{aligned}
&\int p^2 = p^2 + \int p = 1 + p\int p \\
&\int p^3 = p^3 + \int p^2 = 1 + p\int p^2 = 1 + p + p^2 \int p \\
&\int p^4 = 1 + p\int p^3 = 1 + p + p^2 \int p^2 = 1 + p + p^2 + p^3 \int p \\
&\int p^5 = 1 + p\int p^4 = 1 + p + p^2\int p^3 = 1 + p + p^2 + p^3\int p^2 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 \int p
\end{aligned}$$

etc.

unde patet esse in genere

$$\int p^n = 1 + p\int p^{n-1} = 1 + p + p^2 \int p^{n-2} = 1 + p + p^2 + p^3 \int p^{n-3} \text{ etc.}$$

90. Proposito ergo numero N, cujus summam divisorum assignare oporteat, resolvatur is in suos factores primos, sitque

$$N = p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi, \quad \text{quo facto erit} \quad \int N = \int p^\lambda . \int q^\mu . \int r^\nu . \int s^\xi.$$

91. Dummodo ergo tam numerorum primorum ipsorum, quam eorum potestatum summae divisorum assignari queant, omnium plane numerorum summae divisorum definiri poterunt.

92. Pro ipsis numeris primis p, cum sit $\int p = p+1$, summa divisorum semper erit numerus par, nisi sit $p=2$, quo casu est $\int 2 = 3$. Si enim sit $p = 2a-1$, erit $\int(2a-1) = 2a$. At ob $\int p^2 = p^2+p+1$, summa divisorum quadrati cujusvis numeri primi semper erit numerus impar, ac subinde adeo numerus primus, veluti $\int 2^2 = 7$, $\int 3^2 = 13$, $\int 5^2 = 31$.

93. Deinde si N sit cubus numeri primi, seu

$$N = p^3, \quad \text{erit} \quad \int p^3 = 1 + p + pp + p^3 = (1 + p)\,(1 + pp),$$

ideoque numerus compositus, ac nisi sit $p = 2$, ad minimum erit summa divisorum divisibilis per 4, quia uterque factor $1 + p$ et $1 + pp$ est par. Erit ergo $\int p^3 = (1 + pp)\int p$.

94. Si numerus N sit potestas quarta numeri primi, seu $N = p^4$, erit summa divisorum $\int p^4 = 1 + p + pp + p^3 + p^4$, ideoque semper impar, fierique adeo poterit, ut ea sit numerus primus, veluti $\int 2^4 = 31$.

95. Si sit $N = p^5$, quia est $\int p^5 = 1 + p + pp + p^3 + p^4 + p^5$, erit summa divisorum

$$\int p^5 = (1 + p + pp)\,(1 + p^3) = (1 + p)\,(1 + p + pp)\,(1 - p + pp),$$

ideoque numerus compositus, qui ex summis inferiorum potestatum ita componitur, ut sit

$$\int p^5 = (1 - p + pp)\int p \,.\int p^2.$$

96. Proposito autem producto MN, cujus factores M et N nullum habeant factorem primum communem, erit $\int MN = \int M.\int N$, quae ergo summa divisorum eo magis erit composita, quo plures numeri primi dispares ingrediantur.

97. Proposito numero quocunque N, cujus summa divisorum sit $\int N$, si is per numerum primum p multiplicetur, summa divisorum producti Np semper major est quam $p\int N$. Nam $\int Np$ primum complectitur omnes divisores numeri N per p multiplicatos, quorum summa est $p\int N$, ac praeterea etiam eos divisores numeri N, qui per p non sunt affecti.

98. Hoc etiam ita bipartito ostenditur. Primo si numerus primus p non contineatur in N, erit utique $\int Np = \int p.\int N = (1 + p)\int N = p\int N + \int N$, quo casu sine dubio est $\int Np > p\int N$.

99. At si p jam contineatur in N, ut sit $N = Mp^n$, erit $\int N = \int M.\int p^n$; sed $\int Np = \int M\,\int p^{n+1}$. Ex superioribus vero constat esse $\int p^{n+1} = 1 + p\int p^n$, unde colligitur $\int Np = \int M + p\int p^n \int M$, ita ut sit $\int Np = p\int N + \int M$, ideoque $\int Np > p\int N$.

100. Numerorum naturali ordine progredientium summae divisorum ita se habebunt:

$\int 1 = 1$	$\int 13 = 14$	$\int 25 = 31$	$\int 37 = 38$	$\int 49 = 57$
$\int 2 = 3$	$\int 14 = 24$	$\int 26 = 42$	$\int 38 = 60$	$\int 50 = 93$
$\int 3 = 4$	$\int 15 = 24$	$\int 27 = 40$	$\int 39 = 56$	$\int 51 = 72$
$\int 4 = 7$	$\int 16 = 31$	$\int 28 = 56$	$\int 40 = 90$	$\int 52 = 98$
$\int 5 = 6$	$\int 17 = 18$	$\int 29 = 30$	$\int 41 = 42$	$\int 53 = 54$
$\int 6 = 12$	$\int 18 = 39$	$\int 30 = 72$	$\int 42 = 96$	$\int 54 = 120$
$\int 7 = 8$	$\int 19 = 20$	$\int 31 = 32$	$\int 43 = 44$	$\int 55 = 72$
$\int 8 = 15$	$\int 20 = 42$	$\int 32 = 63$	$\int 44 = 84$	$\int 56 = 120$
$\int 9 = 13$	$\int 21 = 32$	$\int 33 = 48$	$\int 45 = 78$	$\int 57 = 80$
$\int 10 = 18$	$\int 22 = 36$	$\int 34 = 54$	$\int 46 = 72$	$\int 58 = 90$
$\int 11 = 12$	$\int 23 = 24$	$\int 35 = 48$	$\int 47 = 48$	$\int 59 = 60$
$\int 12 = 28$	$\int 24 = 60$	$\int 36 = 91$	$\int 48 = 124$	$\int 60 = 168.$

101. Inter has divisorum summas non omnes occurrunt numeri, sed usque ad 60 excluduntur sequentes:

2, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 37, 41, 43, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 59.

Numeri autem, qui summas divisorum exprimunt, sunt:

1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 24, 28, 30, 31, 32, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 48, 54, 56, 57, 60.

102. Hinc patet duos pluresve numeros quandoque eandem divisorum summam praebere, veluti

$$\begin{array}{ll} \int 6 = \int 11 = 12 & \int 14 = \int 15 = \int 23 = 24 \\ \int 10 = \int 17 = 18 & \int 20 = \int 26 = \int 41 = 42 \\ \int 16 = \int 25 = 31 & \int 33 = \int 35 = \int 47 = 48 \\ \int 21 = \int 31 = 32 & \int 24 = \int 38 = \int 59 = 60. \\ \int 34 = \int 53 = 54 & \\ \int 28 = \int 39 = 56 & \end{array}$$

103. Problema hic proponi solet, quo quaeritur numerus, qui ad summam divisorum suorum habeat datam rationem: scilicet ut sit $N : \int N = n : m$, sive $\frac{\int N}{N} = \frac{m}{n}$, ubi quidem primo necesse est ut sit $m > n$; si enim esset $m = n$, foret $N = 1$.

104. Ratione $m : n$ in minimis terminis expressa, numerus N vel ipsi n, vel cuipiam ejus multiplo aequalis erit. Statuatur ergo $N = an$, eritque $\int N = \int an = am$. At nisi sit $a = 1$, est $\int an > a \int n$, hinque $m > \int n$. Quocirca si fuerit $m < \int n$, nulla solutio locum habet, sin autem $m = \int n$, unica datur solutio, scilicet $N = n$.

105. Nisi ergo sit vel $m = \int n$, vel $m > \int n$, problema solutionem non admittit. Priori quidem casu numerus quaesitus N ipsi n aequabitur, neque praeterea ulla alia dabitur solutio. Posteriori vero casu, quo $m > \int n$, numerus N aequabitur multiplo cuipiam ipsius n, puta $N = an$, siquidem ulla solutio locum habet. Dantur enim utique ejusmodi rationes $m : n$, quibus nequaquam satisfieri potest, etiamsi sit $m > \int n$.

106. Numerus *perfectus* est, cujus summa divisorum ipso duplo est major. Ita si fuerit $\int N = 2N$, erit N numerus perfectus. Qui si sit par, erit hujusmodi $2^n A$, existente A numero impari, sive primo, sive composito. Cum ergo sit

$$N = 2^n A, \quad \text{erit } \int N = (2^{n+1} - 1) \int A = 2^{n+1} A, \quad \text{unde fit } \frac{\int A}{A} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}.$$

107. Quia hujus fractionis $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$ numerator unitate tantum superat denominatorem, excedere nequit summam divisorum denominatoris; erit ergo vel aequalis, vel minor. Posteriori casu nulla datur solutio, prior vero existere nequit, nisi sit $2^{n+1} - 1$ numerus primus. Quare quoties $2^{n+1} - 1$ fuerit numerus primus, ei A aequalis capi debet, eritque numerus perfectus $= 2^n (2^{n+1} - 1)$.

108. Omnes ergo numeri perfecti pares in hac formula $2^n (2^{n+1} - 1)$ continentur, siquidem $2^{n+1} - 1$ fuerit numerus primus, quod quidem evenire nequit nisi $n + 1$ sit numerus primus; etiamsi non omnes primi pro $n + 1$ assumti praebeant $2^{n+1} - 1$ primum. Utrum vero praeter hos numeros perfectos pares, dentur quoque impares, nec ne? nemo adhuc demonstravit.

109. Si daretur numerus perfectus impar, omnes ejus factores impares sint necesse est. Sit ergo $= ABCD$ etc. oportetque fieri $\int A . \int B . \int C . \int D = 2ABCD$ numero impariter pari. Quare inter

summas divisorum $\int A$, $\int B$, $\int C$, $\int D$ unica debet esse impariter par, reliquae omnes impares: omnes ergo factores A, B, C, D, praeter unum, erunt potestates pares numerorum primorum, unus autem ille vel numerus primus formae $4n+1$, vel ejusdem potestas, cujus exponens sit $4\lambda+1$. Sicque talis numerus perfectus hujusmodi habebit formam $(4n+1)^{4\lambda+1} PP$, existente P numero impari, et $4n+1$ primo.

110. Plurima alia problemata huc referenda, quibus alia proponitur relatio inter numeros investigandos eorumque summas divisorum hic praetermitto, quoniam ex traditis principiis methodus ea solvendi non difficulter elicitur.

Caput IV.

De numeris inter se primis et compositis.

111. Duo numeri, qui praeter unitatem nullum alium habent factorem seu divisorem communem, vocantur numeri *primi inter se*; qui autem praeter unitatem alium habent divisorem communem, vocantur *compositi inter se*. Ita 8 et 15 sunt numeri inter se primi, at 9 et 15 numeri inter se compositi.

112. Unitas ergo est ad omnes numeros primus. Scilicet denotante n numerum quemcunque, numeri 1 et n sunt numeri primi inter se, quia praeter unitatem nullum alium admittunt divisorem communem.

113. Pari modo duo numeri unitate differentes n et $n+1$ sunt primi inter se; quoscunque enim divisores habuerit numerus n, nullus eorum dividere potest numerum $n+1$. Namque si p sit divisor numeri n, numerus proxime major per p divisibilis erit $n+p$, neque vero $n+1$ divisionem per p admittet.

114. Numerus primus p ad omnes numeros, nisi qui ejus sunt multipla, est primus; hinc numeri a et p sunt primi inter se, nisi sit vel $a=p$, vel $a=np$. Ergo numerus primus p ad omnes numeros se minores est primus.

115. Multitudo numerorum, dato numero a minorum, est $a-1$, inter quos quot sint ad a vel primi, vel compositi, operae pretium est definire; quoniam inde judicium ad omnes numeros ipso a majores facile extenditur.

116. Sit enim $b<a$, ac si b et a fuerint primi inter se, etiam omnes hi numeri $b+a$, $b+2a$, $b+3a$, etc. ad a erunt primi; ac si b et a habuerint communem divisorem, idem erit divisor numerorum $b+a$, $b+2a$, etc.

117. Si ergo a sit numerus primus $=p$, quia omnes numeri ipso minores ad eum sunt primi, horum multitudo est $=p-1$.

118. Si sit $a=2p$, ab 1 ad a dantur p numeri pares, qui ergo ad a non sunt primi, deinde ipse numerus p ad a etiam non est primus. Auferantur hi a numeris omnibus ab 1 usque ad a, quorum multitudo est $=p$, ac relinquentur $p-1$, totidemque ad a erunt primi.

119. Si sit $a=3p$, inter numeros ipso non majores primum ii, qui sunt per 3 divisibiles, ad eum non sunt primi, quorum multitudo est $=p$, deinde insuper p et $2p$ ad a non sunt primi; reliqui, quorum multitudo est $3p-p-2=2(p-1)$, omnes ad $a=3p$ erunt primi.