52. Si indolem numerorum attentius contemplemur, facile percipiemus, ab initio numeros primos frequentissime occurrere, compositos autem rarissime interspersos esse debere. Quo longius autem progrediamur, eo plures reperientur numeri compositi, contra autem pauciores primi.

53. Deinde etiam notari oportet in progressione numerorum primorum 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. nullum plane ordinem apparere, unde lex hujus progressionis definiri possit, etiamsi in genere certum sit, quo longius progrediamur, minus frequentes eos esse debere.

54. Tabulae habentur, in quibus numeri primi secundum centurias sunt dispositi; atque in prima centuria ab 1 ad 100 sunt 26 numeri primi, in secunda 21, in sequentibus vero pauciores; neque tamen eorum multitudo continuo minuitur, sed potius admodum irregulariter modo crescit, modo decrescit. Sic a 200 ad 300 occurrunt 16 numeri primi, at a 400 ad 500 sunt 17, totidemque adhuc a 1400 ad 1500. Porro a 79700 ad 79800 tres tantum reperiuntur numeri primi; hoc tamen non obstante in centuria a 90000 ad 90100 adhuc 13 numeri primi deprehenduntur.

Caput II.

De divisoribus numerorum.

55. Quatenus quidam numerus est multiplum alius numeri, eatenus hic illius dicitur *divisor*, et index multiplicitatis vocari solet *quotus* ex divisione ortus.

56. Ita si numerus N fuerit multiplum ipsius a, indice existente n, ut sit $N = na$, numerus a erit divisor numeri N, et index n praebebit quotum. Scilicet si numerus $N = na$ per a dividatur, quotus erit n.

57. Cum numeri n et a inter se sint permutabiles, hocque respectu factores appellentur, numerus $N = na$ etiam divisorem habebit n, quotusque tum erit a. In genere ergo divisor per quotum multiplicatus ipsum numerum divisum reproducit.

58. Cum quilibet numerus sit sui ipsius simplum, unitas cujusque numeri est divisor, ipseque numerus quotus. Tum vero quilibet numerus est sui ipsius divisor, quoto existente unitate.

59. Quilibet ergo numerus N primo unitatem pro divisore habet, eritque tum ipse numerus N quotus. Deinde etiam quilibet numerus N se ipsum habet pro divisore, quoto existente unitate.

60. Nullus numerus alios habet divisores, nisi quorum est multiplum (simplo ex idea multipli hic non excluso); si enim alium haberet divisorem, eo ipso hujus futurus esset multiplum, quoto praebente indicem multipli.

61. Cum igitur numerus primus nullius alius numeri, praeter unitatem, sit multiplum, numerus primus alios non habet divisores, praeter unitatem et se ipsum. Scilicet si p denotet numerum primum, ejus divisores erunt 1 et p, neque praeter hos ullos habet alios.

62. Numeri ergo primi, seu primae classis, duos tantum habent divisores, excepta unitate, quippe quae unicum habet; quam ob causam etiam unitas numeris primis non accenseri solet.

63. Numeri secundae classis, qui constant duobus factoribus primis pq, quia sunt multipla utriusque, praeter divisores 1 et pq etiam divisores habent p et q, ita ut omnes eorum divisores sint 1, p, q et pq.

64. Casus autem hic seorsim est perpendendus, quo ambo factores p et q sunt inter se aequales, quoniam eundem numerum non bis inter divisores numerare licet. Hinc numeri pp, qui sunt quadrata numerorum primorum, tres tantum habent divisores 1, p et pp.

65. Hanc ob causam numeros secundae classis in duas species subdividi convenit, quarum prior continet numeros formae pp et divisores habet tres $1, p, pp$; altera vero species continet numeros formae pq, denotantibus litteris p, q numeros primos diversos. Hujusque speciei numeri habebunt quaternos divisores $1, p, q, pq$.

66. Simili modo classis tertia subdividi debet in tres species, quarum formae sunt p^3, p^2q, pqr, siquidem p, q, r denotent numeros primos diversos, vel enim omnes tres factores sunt aequales vel bini tantum, vel omnes tres inaequales.

67. Pro tertia autem classe numerorum

speciei primae	p^3	divisores erunt	quatuor	$1, p, p^2, p^3$,
secundae	p^2q		sex	$1, p, q, p^2, pq, p^2q$,
tertiae	pqr		octo	$1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr$,

neque praeterea alii divisores locum habere possunt.

68. Classis quarta, quae numeros quatuor factoribus primis constantes continet, prout horum factorum bini, vel tres, vel omnes quatuor fuerint aequales, subdividenda est in quinque species, quarum formae sunt I. p^4, II. p^3q, III. p^2q^2, IV. p^2qr, V. $pqrs$.

69. Jam facile erit omnes divisores cujusque speciei in classe quarta enumerare:

Speciei:		divisores erunt	
I.	p^4	quinque:	$1, p, p^2, p^3, p^4$,
II.	p^3q	octo:	$1, p, q, p^2, pq, p^3, p^2q, p^3q$,
III.	p^2q^2	novem:	$1, p, q, p^2, pq, q^2, p^2q, pq^2, p^2q^2$,
IV.	p^2qr	duodecim:	$1, p, q, r, p^2, pq, pr, qr, p^2q, p^2r, pqr, p^2qr$,
V.	$pqrs$	sedecim:	$1, p, q, r, s, pq, pr, ps, qr, qs, rs, pqr, pqs, prs, qrs, pqrs$.

70. In classe quinta, quae numeros ex quinque factoribus primis compositos complectitur, ob aequalitatem aliquot factorum, sequentes species constitui oportebit:

I. p^5, II. p^4q, III. p^3q^2, IV. p^3qr, V. p^2q^2r, VI. p^2qrs, VII. $pqrst$.

71. Tum vero singularum harum specierum divisores ita enumerabuntur:

Speciei:		divisores erunt	
I.	p^5	sex:	$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$,
II.	p^4q	decem:	$1, p, q, p^2, pq, p^3, p^2q, p^4, p^3q, p^4q$,
III.	p^3q^2	duodecim:	$1, p, q, p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2, p^3q, p^2q^2, p^3q^2$,
IV.	p^3qr	sedecim:	$1, p, q, r, p^2, pq, pr, qr, p^3, p^2q, p^2r, pqr, p^3q, p^3r, p^2qr, p^3qr$,
V.	p^2q^2r	octodecim:	$1, p, q, r, p^2, pq, pr, q^2, qr, p^2q, p^2r, pq^2, pqr, q^2r, p^2q^2, p^2qr, pq^2r, p^2q^2r$,
VI.	p^2qrs	viginti quatuor:	$1, p, q, r, s, p^2, pq, pr, ps, qr, qs, rs, p^2q, p^2r, p^2s, pqr, pqs, prs, qrs, p^2qr, p^2qs, p^2rs, pqrs, p^2qrs$,

VII. $pqrst$ triginta duo: 1, p, q, r, s, t, pq, pr, ps, pt, qr, qs, qt, rs, rt, st, pqr, pqs, pqt, prs, prt, pst, qrs, qrt, qst, rst, $pqrs$, $pqrt$, $pqst$, $prst$, $qrst$, $pqrst$.

72. Simili modo reliquarum classium species constituentur, singularumque specierum divisores omnes assignabuntur. Simul autem hac ratione patebit natura singulorum divisorum, atque tam classis quam species, quorsum singuli sunt referendi.

73. Si numeri N divisores sint: 1, α, β, γ, δ, $\ldots N$, isque multiplicetur per numerum primum p, qui in eo nondum contineatur, tum productum Np praeter illos divisores 1, α, β, γ, δ, $\ldots N$ insuper eosdem per p multiplicatos p, αp, βp, γp, $\delta p \ldots Np$ pro divisoribus habebit, ideoque numerus divisorum duplo erit major.

74. At si ille numerus N per quadratum numeri primi p, qui in ipso non insit tanquam factor, multiplicetur, numerus divisorum triplicabitur. Primo enim productum Np^2 eosdem habebit divisores quos numerus N, tum vero eosdem per p multiplicatos, ac tertio eosdem per p^2 multiplicatos.

75. Simili modo si p sit numerus primus in N non contentus, numerusque N per p^3 multiplicetur, productum Np^3 habebit primo omnes divisores numeri N, deinde eosdem per p, porro eosdem per p^2, ac denique eosdem per p^3 multiplicatos, quo pacto multitudo divisorum producti Np^3 quadruplo major est quam numeri N.

76. Atque in genere si numeri N multitudo divisorum sit $= m$, isque per potestatem p^λ numeri primi p multiplicetur, producti Np^λ multitudo divisorum erit $(\lambda + 1)\, m$; ubi notasse juvabit ipsius potestatis p^λ multitudinem divisorum esse $\lambda + 1$.

77. Hinc patet regula facilis multitudinem divisorum cujuscunque numeri definiendi: Sit enim $p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi$ forma numeri propositi; et quia numeri p^λ multitudo divisorum est $\lambda + 1$, erit numeri $p^\lambda q^\mu$ multitudo divisorum $(\lambda + 1)\,(\mu + 1)$, hujus vero numeri $p^\lambda q^\mu r^\nu$ erit

$$(\lambda + 1)\,(\mu + 1)\,(\nu + 1), \quad \text{porroque hujus } p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi \text{ erit } (\lambda + 1)\,(\mu + 1)\,(\nu + 1)\,(\xi + 1).$$

Classis autem, ad quam hic numerus est referendus, indicatur numero $\lambda + \mu + \nu + \xi$, qui est summa exponentium.

78. Infiniti ergo numeri exhiberi possunt, quorum multitudo divisorum sit data. Si enim multitudo divisorum sit $= a$, existente a numero primo, numeri quaesiti in hac forma p^{a-1} continentur, denotante p numerum primum quemcunque.

79. Si a, b, c, d, etc. denotent numeros primos, pariter ac litterae p, q, r, s, etc., numeri, quorum multitudo divisorum est ab, sunt vel p^{ab-1}, vel $p^{a-1}q^{b-1}$; quorum autem multitudo divisorum est abc, ii sunt vel p^{abc-1}, vel $p^{ab-1}q^{c-1}$, vel $p^{ac-1}q^{b-1}$, vel $p^{bc-1}q^{a-1}$, vel $p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}$, ubi litterae a, b, c, etc. eundem quoque numerum primum significare possunt, dummodo litterae p, q, r, etc. significent diversos.

80. Hinc si multitudo divisorum sit $= 2$, soli numeri primi satisfaciunt, seu numeri in hac forma p contenti. Tum vero si fuerit

multitudo divisorum:	erit forma numerorum:
3	p^2
4	p^3, pq
5	p^4
6	p^5, p^2q
7	p^6
8	p^7, p^3q, pqr
9	p^8, p^2q^2
10	p^9, p^4q
11	p^{10}
12	p^{11}, p^5q, p^3q^2, p^2qr.

81. Cognita ergo forma cujusque numeri, classe scilicet ejusque specie, quo est referendus, non solum multitudo divisorum, sed etiam ipsi divisores ope regularum traditarum assignari possunt.

Caput III.

De summa divisorum cujusque numeri.

82. Proposito quocunque numero n, summam omnium ejus divisorum hoc modo $\int n$ designemus, ita ut haec scriptura $\int n$ denotet summam divisorum numeri n.

83. Cum ergo unitas alium divisorem praeter se ipsam non habeat, erit $\int 1 = 1$; cujusque vero alius numeri summa divisorum se ipso erit major, erit scilicet $\int n > n$, nisi sit $n = 1$.

84. Pro numeris primis p, quia alios non agnoscunt divisores praeter se ipsos et unitatem, erit $\int p = p + 1$. Tum vero pro potestatibus numerorum primorum erit

$$\int p^1 = p + 1 = \frac{pp-1}{p-1},$$

$$\int p^2 = pp + p + 1 = \frac{p^3-1}{p-1},$$

$$\int p^3 = p^3 + p^2 + p + 1 = \frac{p^4-1}{p-1},$$

et in genere

$$\int p^n = p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

85. Cum numerorum in forma pq contentorum divisores sint 1, p, q, pq, erit eorum summa $1 + p + q + pq = (1+p)(1+q)$, ideoque $\int pq = (p+1)(q+1)$. Simili modo erit ex classe tertia

$$\int p^2q = (pp+p+1)(q+1) \text{ et } \int pqr = (p+1)(q+1)(r+1).$$

86. Eodem modo in reliquis classibus divisores in unam summam colligere liceret; verum quo indoles harum summarum clarius perspiciatur, consideremus in genere numerum N, cujus divisores sint 1, α, β, γ, δ, ... N, quorum summa sit $\int N$. Multiplicetur ille per numerum primum p,