I.

Tractatus de numerorum doctrina Capita XVI, quae supersunt.

Caput I.

De compositione numerorum.

1. *Numerus* est multitudo unitatum.

2. Quilibet ergo numerus indicat, quot unitates in eo contineantur.

3. Ab unitate incipiendo numeri sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., quorum quisque praecedentem unitate superat.

4. Quia quemque numerum unitate augere licet, series numerorum in infinitum progréditur.

5. Cum primus, scilicet unitas, praecedentem etiam unitate superet, praecedens nihilum 0 sit necesse est.

6. Hic tantum de numeris integris sermo est, ad quos definitio est restricta, unde fractos multoque magis surdos hinc excludi oportet.

7. Si numerus quicunque sit a, erunt eum sequentes $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, etc., quorum primus $a+1$ datum a superat unitate, secundus $a+2$ duobus unitatibus, tertius $a+3$ tribus, etc.

8. Simili modo, proposito numero a, antecedentes erunt $a-1$, $a-2$, $a-3$, $a-4$, etc., quorum primus $a-1$ a dato a unitate deficit, secundus $a-2$ duabus unitatibus, tertius $a-3$ tribus, et ita porro.

9. Si numero a tot unitates addantur, quot numerus b continet, oritur $a+b$; sin autem a numero a tot unitates auferantur, quot numerus b continet, oritur $a-b$: illo casu numerus b numero a *additus*, hoc vero ab eo *subtractus* dicitur.

10. Si idem numerus a sibi ipsi addatur, oritur ejus duplum $a+a$, quod ita scribitur $2a$: si idem denuo addatur, prodit triplum $3a$; tum eodem numero a insuper addito, ejus quadruplum $4a$, et ita porro, quae in genere vocantur ejus *multipla*.

11. Multipla ergo numeri a sunt $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc., quorum quodque praecedens superat ipso numero a; horumque respectu ipse numerus a *simplum* vocatur.

12. Si a esset unitas, ejus multipla omnes plane numeros praeberent; at si a non est unitas, sed multitudo unitatum, ejus multipla non omnes numeros praebebunt: hocque casu dabuntur numeri, qui non sunt multipla ipsius a.

13. Cum multipla ipsius a sint $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc., inter ea primo non reperiuntur omnes numeri ipso a minores, qui sunt $1, 2, 3, \ldots (a-1)$; totidemque non-multipla occurrent a quovis multiplo usque ad sequens.

14. Si ergo fuerit α numerus minor quam a, tum neque α neque hi numeri $a+\alpha$, $2a+\alpha$, $3a+\alpha$, $4a+\alpha$, etc. inter multipla ipsius a reperiuntur.

15. Quia ob $\alpha < a$, est $2a-\alpha$ minus quam $2a$, simulque majus quam a, numerus $2a-\alpha$ non erit multiplum ipsius a, neque ullus horum numerorum $a-\alpha$, $2a-\alpha$, $3a-\alpha$, $4a-\alpha$, etc. inter multipla ipsius a continetur.

16. Proposito ergo quocunque numero b, qui non sit multiplum ipsius a, is vel ipso a erit minor, vel ita superabit aliquod ejus multiplum, ut tamen minor sit multiplo sequente.

17. Cum multipla binarii sint 2, 4, 6, 8, 10, etc. (ejus simplo non excluso), numeri reliqui ab his unitate differunt. Simili modo ob ternarii multipla: 3, 6, 9, 12, 15, etc. reliqui numeri ab his vel unitate, vel binario distant.

18. Duplum cujusque numeri a, scilicet $2a$, est etiam multiplum binarii. Cum enim a sit multitudo unitatum $1+1+1+1$ etc. duplicatio ita repraesentetur

$$a = 1+1+1+1+\text{etc.}$$
$$a = 1+1+1+1+\text{etc.}$$

unde additione prodit
$$2a = 2+2+2+2+\text{etc.}$$

19. Vel cum numerus a sit multitudo unitatum, numerus a duplicabitur singulis unitatibus bis sumendis, unde oritur multitudo binariorum. Ex quo patet duplum $2a$ toties continere binarium, quoties a continet unitatem.

20. Simili modo triplum $3a$ toties continebit ternarium, quoties ipse numerus a continet unitatem, eritque itaque $3a$ multiplum ternarii, quod etiam de omnibus multiplis est intelligendum.

21. *Index* multipli vocatur numerus indicans, quoties multiplum in se contineat simplum, ita index dupli est binarius, tripli ternarius, quadrupli quaternarius, etc.

22. Si numerus a toties sumatur, quot numerus n continet unitates, multipli inde orti index est n, ipsum autem multiplum hoc ita exprimitur na, ita ut na denotet multiplum ipsius a, cujus index sit n.

23. Tale ergo multiplum na ipsius a est etiam multiplum indicis n, quandoquidem toties in se continet indicem, quoties ipse numerus a continet unitatem.

24. Hinc ergo patet multiplum numeri a, cujus index sit n, congruere cum eo multiplo numeri n, cujus index sit a; quare cum illud multiplum per na, hoc vero per an exprimatur, erit $na = an$.

25. Cum in quovis multiplo na tam numerus a, cujus multiplum sumitur, quam index multipli n inter se permutari queant, hi duo numeri a et n sine discrimine *factores* appellantur, multiplo autem ipsi na nomen *producti* seu *facti* indi solet.

26. Quemadmodum quisque numerus est multiplum unitatis, cujus ipse est index, ita etiam est sui ipsius simplum, indice existente unitate. In posterum ergo tam multipla unitatis quam simpla cujusque numeri a denominatione multiplorum segregabimus.

27. Multipla ergo nobis erunt ejusmodi numeri, qui cujuspiam numeri, praeter unitatem, sunt multipla (excluso simplo), constabunt ergo duobus factoribus, quorum alter alterius respectu tanquam index spectari potest.

28. Factum ergo ab, cujus factores sunt a et b, est multiplum tam ipsius a quam ipsius b. Quatenus est multiplum ipsius a, index est b, quatenus autem est multiplum ipsius b, index est a.

29. Multipla hujus facti ab simul erunt multipla tam ipsius a, quam ipsius b. Sit nab tale multiplum, cujus index sit n, et quia etiam est multiplum ipsius n, erit multiplum uniuscujusque horum numerorum n, a et b.

30. Hinc patet etiam in facto ex tribus factoribus constante, tres factores inter se esse permutabiles, atque tale factum abc non solum esse multiplum singulorum a, b, c, sed etiam factorum ex binis ab, ac, bc.

31. Si in serie numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. omnia multipla deleantur, reliqui numeri non erunt multipla ullius numeri (quandoquidem simpla excludimus), hique numeri vocantur *simplices*, vel *primi.*

32. Deletis scilicet multiplis binarii 4, 6, 8, 10, 12, etc. restat haec series 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.; hinc porro extinguantur multipla ternarii 6, 9, 12, 15, 18, 21, etc. quae quidem adhuc adsunt, et restat 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.; ita relinquentur tandem numeri primi 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, etc.

33. Si ergo p sit numerus primus, is neque inter multipla binarii neque inter multipla cujusquam alius numeri occurrit, neque ergo hujusmodi facto ab ullo modo exhiberi potest, nisi sit vel $a = 1$, vel $b = 1$, quos autem casus exclusimus (26).

34. Omnes numeri, qui non sunt primi, vocantur *compositi;* unde patet omnes numeros compositos esse multipla aliorum numerorum minorum, qui cum iterum sint primi, vel multipla aliorum denuo minorum, multipla autem cujusvis producti sint simul multipla singulorum ejus factorum, sequitur omnes numeros compositos tandem reduci ad multipla numerorum primorum.

35. Omnis ergo numerus est vel primus, vel multiplum cujuspiam numeri primi; quo posteriori casu cum numerus sit compositus, omnis numerus compositus exhiberi potest producto, cujus singuli factores sint numeri primi.

36. Inter numeros compositos primum occurrunt ii, qui constant duobus tantum factoribus primis. Veluti si p et q denotent duos numeros primos quoscunque, productum pq in genere exhibebit ejusmodi numeros compositos primae speciei, qui duobus tantum constant factoribus primis.

37. Talis ergo numerus compositus pq erit tam multiplum numeri q, indice existente p, quam multiplum ipsius p, indice existente q, neque vero ullius alius numeri erit multiplum. Si enim esset multiplum alius cujuspiam numeri a, indice existente b, hi numeri a et b ejus essent factores, contra hypothesin.

38. Hujusmodi autem productum pa, cujus quidem factor p est primus, alter vero a compositus, factores habens α, β, γ, etc., non solum erit multiplum numerorum p et a, sed etiam inter multipla numerorum α, β, γ, etc. occurret.

39. Post numeros compositos, duobus factoribus primis constantes, considerandi veniunt ii, qui tribus factoribus primis constant, cujus ergo speciei forma est pqr, denotantibus p, q, r numeros primos quoscunque.

40. Tum vero sequentur numeri compositi, qui sunt producta ex quaternis numeris primis, quorum forma erit $pqrs$. Sequentes autem species erunt producta vel ex quinis, vel senis, vel septenis etc. numeris primis constantia.

41. Hinc omnes numeri ita in classes distribuentur, ut prima contineat omnes numeros primos singulos; secunda, producta ex binis primis; tertia, producta ex ternis primis; quarta, ex quaternis; quinta, ex quinis, et ita porro.

42. Post unitatem ergo numeri primae classis, seu primi centenario non majores sunt:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

43. Numeri vero secundae classis centenario minores sunt

2. 2 = 4,	3. 3 = 9,	5. 5 = 25,	7. 7 = 49,
2. 3 = 6,	3. 5 = 15,	5. 7 = 35,	7.11 = 77,
2. 5 = 10,	3. 7 = 21,	5.11 = 55,	7.13 = 91.
2. 7 = 14,	3.11 = 33,	5.13 = 65,	
2.11 = 22,	3.13 = 39,	5.17 = 85,	
2.13 = 26,	3.17 = 51,	5.19 = 95,	
2.17 = 34,	3.19 = 57,		
2.19 = 38,	3.23 = 69,		
2.23 = 46,	3.29 = 87,		
2.29 = 58,	3.31 = 93,		
2.31 = 62,			
2.37 = 74,			
2.41 = 82,			
2.43 = 86,			
2.47 = 94,			

44. Tum vero numeri tertiae classis centenario inferiores sunt

2.2. 2 = 8,	2.3. 3 = 18,	3.3. 3 = 27,
2.2. 3 = 12,	2.3. 5 = 30,	3.3. 5 = 45,
2.2. 5 = 20,	2.3. 7 = 42,	3.3. 7 = 63,
2.2. 7 = 28,	2.3.11 = 66,	3.3.11 = 99,
2.2.11 = 44,	2.3.13 = 78,	
2.2.13 = 52,		3.5. 5 = 75.
2.2.17 = 68,	2.5. 5 = 50,	
2.2.19 = 76,	2.5. 7 = 70,	
2.2.23 = 92,	2.7. 7 = 98,	

45. Quartae autem classis numeri infra 100 sunt

$2.2.2.\ 2 = 16,$ $\quad 2.2.3.3 = 63,$ $\quad 2.3.3.3 = 54,$
$2.2.2.\ 3 = 24,$ $\quad 2.2.3.5 = 60,$ $\quad 2.3.3.5 = 90,$
$2.2.2.\ 5 = 40,$ $\quad 2.2.3.7 = 84,$
$2.2.2.\ 7 = 56,$ $\quad 3.3.3.3 = 81.$
$2.2.2.11 = 88,$ $\quad 2.2.5.5 = 100,$

46. Quintae classis numeri centenario non majores sunt

$2.2.2.2.2 = 32,$ $\quad 2.2.2.2.5 = 80,$
$2.2.2.2.3 = 48,$ $\quad 2.2.2.3.3 = 72,$

47. In sexta classe hujusmodi numeri duo occurrunt

$2.2.2.2.2.2 = 64,$ $\quad 2.2.2.2.2.3 = 96.$

Sequentes autem classes nullos continent numeros centenario minores.

48. Cujusque classis numeri charactere peculiari distinguuntur a numeris aliarum classium, et quilibet numerus ita ad certam quandam classem pertinet, ut non simul ad ullam aliam referri possit.

49. Quodsi ergo p, q, r, s, etc. denotent numeros primos, formae harum classium ita exhiberi possunt:

Forma classis I. . . p
« II . . . pq,
« III. . . pqr,
« IV. . . $pqrs$,
« V . . . $pqrst$,
« VI . . . $pqrstu$,
etc.

50. Quoniam in his classibus omnes numeri continentur, si seriem numerorum naturalem 1, 2, 3, 4, etc. usque ad n continuemus, ita ut multitudo numerorum sit $= n$, ac multitudo numerorum primorum in hac serie contentorum sit $= \alpha$, multitudo numerorum secundae classis $= \beta$, tertiae classis $= \gamma$, quartae $= \delta$, et ita porro, necesse est sit $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= n$. Ita vidimus, si sumatur $n = 100$, fore $\alpha = 26$ (unitate inter numeros primos comprehensa), $\beta = 34$, $\gamma = 22$, $\delta = 12$, $\varepsilon = 4$, $\zeta = 2$, $\eta = 0$, estque utique $26 + 34 + 22 + 12 + 4 + 2 = 100$.

51. Si n denotet potestatem binarii, multitudo numerorum cujusque classis ad numerum n usque ita se habebit:

numerus	*multitudo numerorum*									
n	α	β	γ	δ	ε	ξ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
2	2									
4	3	1								
8	5	2	1							
16	7	6	2	1						
32	12	10	7	2	1					
64	19	22	13	7	2	1				
128	32	42	30	14	7	2	1			
256	55	82	60	34	15	7	2	1		
512	98	157	125	71	36	15	7	2	1	
1024	173	304	256	152	77	37	15	7	2	1

52. Si indolem numerorum attentius contemplemur, facile percipiemus, ab initio numeros primos frequentissime occurrere, compositos autem rarissime interspersos esse debere. Quo longius autem progrediamur, eo plures reperientur numeri compositi, contra autem pauciores primi.

53. Deinde etiam notari oportet in progressione numerorum primorum 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. nullum plane ordinem apparere, unde lex hujus progressionis definiri possit, etiamsi in genere certum sit, quo longius progrediamur, minus frequentes eos esse debere.

54. Tabulae habentur, in quibus numeri primi secundum centurias sunt dispositi; atque in prima centuria ab 1 ad 100 sunt 26 numeri primi, in secunda 21, in sequentibus vero pauciores; neque tamen eorum multitudo continuo minuitur, sed potius admodum irregulariter modo crescit, modo decrescit. Sic a 200 ad 300 occurrunt 16 numeri primi, at a 400 ad 500 sunt 17, totidemque adhuc a 1400 ad 1500. Porro a 79700 ad 79800 tres tantum reperiuntur numeri primi; hoc tamen non obstante in centuria a 90000 ad 90100 adhuc 13 numeri primi deprehenduntur.

Caput II.

De divisoribus numerorum.

55. Quatenus quidam numerus est multiplum alius numeri, eatenus hic illius dicitur *divisor*, et index multiplicitatis vocari solet *quotus* ex divisione ortus.

56. Ita si numerus N fuerit multiplum ipsius a, indice existente n, ut sit $N = na$, numerus a erit divisor numeri N, et index n praebebit quotum. Scilicet si numerus $N = na$ per a dividatur, quotus erit n.

57. Cum numeri n et a inter se sint permutabiles, hocque respectu factores appellentur, numerus $N = na$ etiam divisorem habebit n, quotusque tum erit a. In genere ergo divisor per quotum multiplicatus ipsum numerum divisum reproducit.

58. Cum quilibet numerus sit sui ipsius simplum, unitas cujusque numeri est divisor, ipseque numerus quotus. Tum vero quilibet numerus est sui ipsius divisor, quoto existente unitate.

59. Quilibet ergo numerus N primo unitatem pro divisore habet, eritque tum ipse numerus N quotus. Deinde etiam quilibet numerus N se ipsum habet pro divisore, quoto existente unitate.

60. Nullus numerus alios habet divisores, nisi quorum est multiplum (simplo ex idea multipli hic non excluso); si enim alium haberet divisorem, eo ipso hujus futurus esset multiplum, quoto praebente indicem multipli.

61. Cum igitur numerus primus nullius alius numeri, praeter unitatem, sit multiplum, numerus primus alios non habet divisores, praeter unitatem et se ipsum. Scilicet si p denotet numerum primum, ejus divisores erunt 1 et p, neque praeter hos ullos habet alios.

62. Numeri ergo primi, seu primae classis, duos tantum habent divisores, excepta unitate, quippe quae unicum habet; quam ob causam etiam unitas numeris primis non accenseri solet.

63. Numeri secundae classis, qui constant duobus factoribus primis pq, quia sunt multipla utriusque, praeter divisores 1 et pq etiam divisores habent p et q, ita ut omnes eorum divisores sint 1, p, q et pq.