V.

DILUCIDATIONES

CIRCA BINAS SUMMAS DUORUM BIQUADRATORUM INTER SE AEQUALES.

Conventui exhibita die 28. Aug. 1780.

§. 1.

In Tomo Novor. Commentariorum XVII. pag. 64. ostendi, exhiberi posse duas binorum biquadratorum sive summas sive differentias, quae sint inter se aequales, quod quidem initio non parum paradoxon videbatur. Cum enim tales formulae $A^2 \pm B^2 = 0$; $A^3 \pm B^3 \pm C^3 = 0$ demonstratae sint impossibiles, siquidem termini vel aequales vel evanescentes excludantur, videri poterat, etiam hanc formulam:

$$A^4 \pm B^4 \pm C^4 \pm D^4 = 0,$$

atque adeo etiam pro superibus potestatibus

$$A^5 \pm B^5 \pm C^5 \pm D^5 \pm E^5 = 0 \quad \text{et} \quad A^6 \pm B^6 \pm C^6 \pm D^6 \pm E^6 \pm F^6 = 0; \text{ etc.}$$

esse impossibiles. Nunc autem certi sumus, pro biquadratis hanc aequalitatem $A^4 + B^4 - C^4 - D^4 = 0$ subsistere posse, ideoque conjecturam illam neutiquam valere, cum loco citato hujusmodi quatuor biquadrata pluribus modis dari posse, ostenderim. Numeri autem quos ibi inveni tam sunt praegrandes, ut veritas difficulter explorari potest; cum minimi numeri quos invenire potui, ut fiat

$$A^4 + B^4 = C^4 + D^4, \quad \text{erant}$$

$$A = 477069;\ B = 8497;\ C = 310319;\ D = 428397.$$

§. 2. Nuper autem, longe alia agens, casu fortuito incidi in tales numeros longe minores qui sunt

$$A = 542;\ B = 514;\ C = 359;\ D = 103,$$

qui quomodo satisfaciant huic aequationi $A^4 - B^4 = C^4 - D^4$ hoc modo exploratur. Cum sit

$A + B = 1056 = 32 . 3 . 11$	$C + D = 462 = 2 . 3 . 7 . 11$
$A - B = 28 = 4 . 7$	$C - D = 256 = 2^8$
$AA - BB = 2^7 . 3 . 7 . 11$	$CC - DD = 2^9 . 3 . 7 . 11$

erit $AA - BB : CC - DD = 1 : 4$, quocirca summae quadratorum reciprocam tenere debent rationem, ita ut sit

$$A^2 + B^2 : C^2 + D^2 = 4 : 1,$$

quod revera evenire ita commodissime ostenditur. Cum sit

$$AA + BB = 4CC + 4DD \text{ erit } AA - 4DD = 4CC - BB$$

sive $(A + 2D)(A - 2D) = (2C + B)(2C - B)$. Est autem

$$A + 2D = 748 = 4 . 11 . 17, \; A - 2D = 2^4 . 3 . 7,$$
$$2C + B = 1232 = 2^4 . 7 . 11; \; 2C - B = 2^2 . 3 . 17$$

ideoque

$$AA - 4DD = 2^6 . 3 . 7 . 11 . 17 \text{ et } 4CC - BB = 2^6 . 3 . 7 . 11 . 17$$

ergo $AA - 4DD = 4CC - BB$.

§. 3. Hic autem fateri cogor me nulla certa methodo ad hos numeros esse deductum, neque adhuc perspicio, quomodo per viam directam ad eos perveniri queat. Quamobrem operae pretium fore arbitror, totam Analysin, qua sum usus hic explicare. Cum inde haud contemnenda incrementa in Analysin redundandura videantur; sequente igitur modo calculum institui.

§. 4. Cum esse debeat

$$(aa + bb)(aa - bb) = (cc + dd)(cc - dd)$$

hinc formo has duas aequationes

$$(aa + bb)p = (cc + dd)q \text{ et } (aa - bb)q = (cc - dd)p;$$

quarum priore ducta in p posteriore vero in q, earum summa praebet $2pqcc = aa(pp + qq) + bb(pp - qq)$, at differentia praebet $2pqdd = aa(qq - pp) - bb(qq + pp)$ unde patet esse debere $q > p$ idcoque harum aequationem utraque resolutionem admittit, si fuerit $qq - pp$ quadratum; quamobrem ponamus statim

$qq - pp = ss$ ac prior aequatio hoc modo referatur:

$$bbss = aa(pp + qq) - 2ccpq,$$

quae ut ad quadratum reduci queat hac forma repraesentetur

$$bbss = aa(q-p)^2 + 2pq(aa - cc).$$

Hinc jam statuamus

$$bs = a(q-p) + 2p(a-c)x.$$

Hinc igitur ob bines terminos primos se destruentes, si reliqui per $2p(a-c)$ dividantur, prodibit haec aequatio:

$$2p(a-c)xx + 2a(q-p)x = q(a+c),$$

unde deducitur $\frac{a}{c} = \frac{2pxx + q}{2pxx + 2(q-p)x - q}$; quocirca statuamus

$$a = 2pxx + q \text{ et } c = 2pxx + 2(q-p)x - q,$$

unde deducitur $bs = q(q-p) + 4pqx - 2p(q-p)xx$.

§. 5. Aggrediamur jam alteram aequationem quam ut fractiones evitemus ita referamus

$$2ddpqss = aas^4 - bbss(pp + qq);$$

ubi si loco a et sb valores modo inventos substituamus, ob $ss = qq - pp$ omnes termini per $2pq$ divisibiles prodibunt orieturque sequens aequatio:

$$\begin{aligned} ddss = {} & qq(q-p)^2 - 4q(q-p)(qq+pp)x + 2(qq-pp)^2 xx \\ & + 2(qq - 6pq + pp)(pp+qq)xx + 8p(q-p)(pp+qq)x^3 \\ & + 4p^2(q-p)^2 x^4, \end{aligned}$$

in qua formula tam primus quam ultimus terminus sunt quadrata, eamque idcirco secundum praecepta cognita pluribus modis tractare licebit.

§. 6. Quoniam autem hujus formulae evolutio in genere non parum esset taediosa, casum tantum simplicissimum evolvamus, quo $qq - pp$ fit quadratum, quod evenit sumendo $p = 3$ et $q = 5$, unde fit $ss = 16$ et $s = 4$. Hoc igitur casu valores supra inventi evadent $a = 6xx + 5$; $c = 6xx + 4x - 5$ et $4b = 10 + 60x - 12xx$ sive $2b = 5 + 30x - 6xx$. Nunc vero formula pro quarta littera d invenienda erit:

$16dd = 100 - 1360x - 3296xx + 1632x^3 + 144x^4$ seu
$4dd = 25 - 340x - 824xx + 408x^3 + 36x^4$,
atque denuo per 4 dividendo prodibit:

$$dd = \tfrac{25}{4} - 85x - 206xx + 102x^3 + 9x^4.$$

§. 7. Ponamus hic primo secundum praecepta solita

$$d = \tfrac{5}{2} - 17x \pm 3xx,\ \text{ eritque}$$
$$dd = \tfrac{25}{4} - 85x \pm (289 \pm 15)\,xx \mp 102x^3 + 9x^4$$

ubi termini primus, secundus et ultimus tolluntur simul vero penultimus si signum inferius valeret indeque nihil concludi posset, quamobrem valeat signum superius, ut sit $d = \frac{5}{2} - 17x + 3xx$, atque hinc orietur ista aequatio:

$$304\,xx - 102\,x^3 = -206\,xx + 102\,x^3$$

unde fit $x = \frac{510}{204} = \frac{5}{2}$. Hinc ergo valores nostri erunt:

$$a = \tfrac{85}{2};\ c = \tfrac{85}{2};\ b = \tfrac{85}{4};\ d = -\tfrac{85}{4}.$$

Hinc ergo foret $c^4 = a^4$ et $d^4 = b^4$, quae solutio jam per se est obvia.

§. 8. Statuamus $d = 3\,xx + 17\,x \pm \frac{5}{2}$ eritque

$$dd = 9\,x^4 + 102\,x^3 + (289 \pm 15)\,xx \pm 85\,x + \tfrac{25}{4},$$

ubi statim patet, signum superius valere debere, unde prodit aequatio haec: $304xx + 85x = -85x - 206xx$ unde fit $x = -\frac{17}{51} = -\frac{1}{3}$. Hinc porro colligitur $a = \frac{17}{3}$; $c = -\frac{17}{3}$. Ergo iterum foret $c^4 = a^4$ ideoque necessario etiam $d^4 = b^4$; unde nihil sequeretur.

§. 9. Statuamus $d = \frac{5}{2} - 17x + \alpha xx$ eritque

$$dd = \tfrac{25}{4} - 85x + (5\alpha + 289)\,xx - 34\,\alpha x^3 + \alpha\alpha x^4$$

ubi α ita sumi oportet, ut priores tres termini tollantur ideoque $\alpha = -99$, et reliqua aequatio per x^3 divisa erit

$$9801\,x + 3366 = 102 + 9\,x$$

unde fit $x = -\frac{5264}{9792} = -\frac{1}{3}$ ut in casu praecedente, unde jam novimus hinc nihil ad scopum nostrum sequi.

§. 10. Statuamns denique $d = 3xx + 17x + \alpha$ ubi α ita definiatur, ut terminus medius destruatur. Cum igitur sit

$$dd = 9x^4 + 102x^3 + (289 + 6\alpha)xx + 34\alpha x + \alpha\alpha$$

fieri debet $289 + 6\alpha = -206$ ideoque $\alpha = -\frac{165}{2}$, tum vero reliqua aequatio erit $-17 \cdot 165x + \frac{165^2}{4} = -85x + \frac{25}{4}$ unde fit $x = \frac{5}{2}$, uti in casu primo, sicque iterum isto casu mni successu caret.

§. 11. Cum igitur hactenus nihil ad scopum nostrum simus assecuti secundum praecepta vulgaria oporteret formulam biquadraticam inventam ita transformare, ut ponatur vel $x = \frac{5}{2} + y$, vel $x = -\frac{1}{3} + y$, hocque modo perveniremus ad alias formas biquadraticas ejusdem indolis, quae secundum casus praecedentes tractatae utique largirentur valores idoneos pro y, verum inde pro litteris a, b, c, d numeri vehementer magni essent prodituri neque ulla solutio simplicior illa, quam olim dederam, sperari posset, multo minus hinc solutio simplex nuper inventa inde exspectari posset.

§. 12. In his operationibus loco dd tale quadratum assumitur, quo subtracto aequatio simplex relinquatur valorem ipsius x praebens, unde intelligitur, pro dd etiam tale quadratum assumi posse, quo subtracto aequatio quadratica relinquatur, dummodo ea radices habeat rationales, id quod in hac aequatione generali usu venire observavi:

$$\alpha\alpha + 2\alpha\beta x + \gamma xx + 2\delta\varepsilon x^3 + \varepsilon\varepsilon x^4 = zz,$$

quoties fuerit $\beta\beta + \delta\delta - \gamma$ quadratum, sive quoties fuerit $\gamma = \beta\beta + \delta\delta - \zeta\zeta$, quod ergo accuratius prosequamur.

§. 13. Sumamus pro zz hoc quadratum: $(\alpha + \beta x)^2$ quo ab illa forma subtracto, remanebit haec quantitas:

$$xx(\gamma - \beta\beta + 2\delta\varepsilon x + \varepsilon\varepsilon xx),$$

quae ob $\gamma - \beta\beta = \delta\delta - \zeta\zeta$ transit in hanc formam

$$xx((\delta + \varepsilon x)^2 - \zeta\zeta),$$

ita ut sit $zz = (\alpha + \beta x)^2 + xx\,(\varepsilon x + \delta + \zeta)(\varepsilon x + \delta - \zeta)$; unde patet, duplici modo fieri $z = \alpha + \beta x$, scilicet si fuerit vel $x = -\frac{\delta - \zeta}{\varepsilon}$ vel $x = -\frac{\delta + \zeta}{\varepsilon}$, sicque hoc modo duos valores pro x adipiscimur, qui per vulgarem operationem non reperientur. Idem commodum eveniet si pro zz sumamus hoc quadratum $(\varepsilon x + \delta)^2 xx$. Hoc enim sublato remanet: $\alpha\alpha + 2\alpha\beta x + (\gamma - \delta\delta)xx$, hoc est $(\alpha + \beta x)^2 - \zeta\zeta xx$ ita ut sit in genere

$$xx(\varepsilon x + \delta)^2((\beta - \zeta)x + \alpha)((\beta + \zeta)x + \alpha);$$

unde patet revera fieri $z = x(\varepsilon x + \delta)$, quoties fuerit vel

$$x = -\frac{\alpha}{\beta - \zeta} \text{ vel } x = -\frac{\alpha}{\beta + \zeta},$$

ita ut hoc casu omnino quatuor novi valores pro x reperiri queant.

§. 14. Videamus igitur utrum nostra aequatio:

$$\tfrac{25}{4} - 85x - 206xx + 102x^3 + 9x^4 = dd,$$

in illa forma generali contineatur nec ne. Comparatione autem instituta fiet $\alpha = \frac{5}{2}$; $\beta = -17$; $\gamma = -206$; $\delta = 17$; $\varepsilon = 3$. Erit ergo $\beta\beta + \delta\delta - \gamma = 28^2$ ideoque $\zeta = 28$, quo circa quatuor novi valores pro x resultantes erunt:

$$x = -15;\ x = +\tfrac{11}{3};\ x = \tfrac{1}{18};\ x = +\tfrac{5}{22}.$$

Hic autem probe notandum est, hunc egregium consensum exemplo tantum deberi, quo posuimus $p = 3$ et $q = 5$. Sin autem his litteris p et q alios tribuamus valores, ita tamen, ut $qq - pp$ evadat quadratum, rarissime iste consensus locum habebit.

§. 15. Evolvamus igitur nunc hos valores ope hujus methodi prorsus singularis inventos. Sit primo $x = -15$, quo casu fit $d = \alpha + \beta x = \frac{515}{2}$; reliquae vero litterae reperientur $a = 1355$; $b = \frac{1795}{2}$; $c = 1285$, qui numeri cum sint omnes per 5 divisibiles, ad minimos terminos revocabuntur in integris multiplicando per $\frac{2}{5}$, tum igitur quatuor nostri numeri quaesiti erunt:

$$a = 542;\quad b = 359;\quad c = 514;\quad d = 103,$$

qui sunt illi ipsi, quos initio exhibueram.

§. 16. Secundus valor pro x inventus erat $x = \frac{11}{3}$; ubi fit $d = \alpha + \beta x = -\frac{359}{6}$. Reliqui porro valores erunt:

$$a = \frac{257}{3};\quad b = \frac{103}{6};\quad c = \frac{271}{3},$$

qui per 6 multiplicati ad hos numeros revocantur:

$$a = 514;\quad b = 103;\quad c = 542;\quad d = 359,$$

qui cum praecedentibus conveniunt.

§. 17. Consideremus nunc tertium valorem $x = \frac{1}{18}$, pro quo erit $d = x(\varepsilon x + \delta) = \frac{103}{108}$; tum vero reliquae litterae hos nanciscentur valores:

$$a = \frac{171}{54};\quad b = \frac{359}{108};\quad c = \frac{257}{54},$$

multiplicando erit in numeris integris:

$$a = 542;\quad b = 359;\quad c = 514:\quad d = 103.$$

§. 18. Sit denique $x = -\frac{5}{22}$ eritque $d = \frac{1795}{22^2}$ tum vero

$$a = \frac{2570}{22^2};\quad b = \frac{515}{22^2};\quad c = \frac{2710}{22^2},$$

sive per 5 dividendo et per 22^2 multiplicando fiet in numeris integris:

$$a = 514;\quad b = 103;\quad c = 542;\quad d = 359.$$

§. 19. Praeterea vero formulā nostra pro dd inventa etiam hac insigni gaudet proprietate quod si extremi tantum termini tollantur, pars reliqua exhibeat aequationem quadraticam resolubilem. Posito enim loco dd hoc quadrato $(\frac{5}{2} + 3xx)^2$ hoc sublato remanebit ista aequatio: $102xx - 221x - 85 = 0$, quae per 17 divisa fit $6xx - 13x - 5 = 0$, unde fit $x = \frac{5}{2}$ et $x = -\frac{1}{3}$ qui sunt iidem valores, quos supra operatio prima et secunda praebuerat.

Alia Analysis ad eandem solutionem ducens.

§. 20. Ut fiat $a^4 - b^4 = c^4 - d^4$ ponatur

$$a = m(f+g);\ b = m(f-g);\ c = n(h+k);\ d = n(h-k).$$

Tum enim erit $m^4 fg(ff+gg) = n^4 hk(hh+kk)$, et nunc statim ponatur $ff+gg = hh+kk$, ut fiat $m^4 fg = n^4 hk$ sive $\frac{n^4}{m^4} = \frac{fg}{hk}$, ita ut haec fractio $\frac{fg}{hk}$ reddi debeat biquadratum.

§. 21. Statuamus nunc

$$ff+gg = hh+kk = (\alpha\alpha+\beta\beta)(\gamma\gamma+\delta\delta),$$

unde litterae ita determinari poterunt

$$f = \alpha\gamma+\beta\delta;\ g = \alpha\delta-\beta\gamma;\ h = \alpha\delta+\beta\gamma;\ k = \alpha\gamma-\beta\delta;$$

quamobrem esse debebit $\frac{n^4}{m^4} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma-\beta\delta)}$. Ut haec formula ad pauciores litteras reducatur, ponamus $\alpha = \beta x$ et $\gamma = \delta y$, fietque $\frac{n^4}{m^4} = \frac{(xy+1)(x-y)}{(xy-1)(x+y)}$.

§. 22. Ista quidem formula solutu est difficillima, si modo ad quadratum reduci deberet unde vix ulla spes affulget, quemadmodum ea adeo ad biquadratum reduci liceat. Interim tamen forte fortuna incidi in modum omnes difficultates superandi, qui in hoc consistit, ut ponam $y = \frac{x}{xx-2}$ tum enim erit:

$$xy+1 = \frac{2(xx-1)}{xx-2};\ x-y = \frac{x(xx-3)}{xx-2};\ xy-1 = \frac{2}{xx-2}$$

$$x+y = \frac{x(xx-1)}{xx-2},$$

quocirca nostra aequatio erit $\frac{n^4}{m^4} = xx-3$, quae jam facillime ad quadratum perducitur, ponendo $x = \frac{pp+3qq}{2pq}$ tum erit

$$xx-3 = (pp-3qq)^2,$$

quocirca extracta radice erit $\frac{nn}{mm} = \frac{pp-3qq}{2pq}$, quae ergo formula denuo quadratum reddi debet; quadratum ergo fieri debet

$$2pq(pp-3qq),$$

ubi statim casus simplicissimus in oculos incurrit sumendo $p = 2$ et $q = 1$ tum enim fiet $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, ideoque $n = 1$ et $m = 2$.

§. 23. Nunc igitur erit $x = \frac{7}{4}$ ideoque $y = \frac{28}{17}$. Quare cum sit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{4}$ et $\frac{\gamma}{\delta} = y = \frac{28}{17}$ statuere poterimus $\alpha = 7$; $\beta = 4$; $\gamma = 28$; $\delta = 17$ ex quibus valoribus porro colligimus

$$f = 264;\quad g = 7;\quad h = 231;\quad k = 128,$$

ex quibus ipsi numeri quaesiti ita definiuntur ut sit:

$$a = 542;\quad b = 514;\quad c = 359;\quad d = 103,$$

qui sunt ipsi numeri ante inventi.

§. 24. Postquam hac occasione numeros ex Commentariorum loco supra citato descriptos attentius considerassem, mox deprehendi, in iis errorem calculi esse commissum, quo emendato numeri quaestioni satisfacientes multo minores reperiuntur. Erit enim

$$A = 12231;\quad B = 10203;\quad C = 10381;\quad D = 2903;$$

qui post eos quos hic invenimus pro minimis videntur habendi. Majores autem numeri ibi traditi recte se habere sunt deprehensi.

§. 25. Quanquam autem hoc modo resolutio hujus aequationis $A^4 + B^4 - C^4 - D^4 = 0$ feliciter successit, tamen inde nullum subsidium ad istam aequationem resolvendam: $A^4 + B^4 + C^4 - D^4 = 0$, ita ut nulla summa trium biquadratorum exhiberi posse videatur biquadrato aequalis. Quin etiam equidem hactenus sum occupatus in quatuor biquadratis inveniendis quorum summa esset pariter biquadratum, etiamsi iste casus secundum analogiam possibilis videatur. At vero quinque biquadrata pluribus modis dari posse observavi quorum summa est biquadratum.