III.

INVESTIGATIO BINORUM NUMERORUM FORMAE $xy(x^4 - y^4)$ QUORUM PRODUCTUM SIVE QUOTUS SIT QUADRATUM.

Conventui exhibita die 14. Aug. 1780.

§. 1.

In Analysi Diophantea plura occurrunt Problemata ad quae resolvenda requiruntur duo numeri formae $xy(xx - yy)$ vel etiam hujus $xy(xx + yy)$, quorum alter per alterum divisus producat quadratum. At vero harum formularum evolutio nullo modo in genere expediri potest, sed contenti esse debemus casus quosdam particulares resolvisse qui adeo etiam haud exiguam sagacitatem postulant: quemadmodum in aliquot dissertationibus fusius ostendi, ubi hoc argumentum omni studio pertractavi. Quare cum formula proposita $xy(x^4 - y^4)$, multo magis sit complicata, atque adeo binas illas formulas quasi in se complectatur, haud immerito dubitare licet, utrum ejus evolutio vires analyseos superet nec ne.

§. 2. Equidem ejus solutionem vix ausus essem suscipere, nisi felici quodam casu in solutionem difficillimi cujusdam problematis incidissem, quod binos hujusmodi numeros postulat formae

$$xy(x^4 - y^4);$$

quorum productum sit quadratum. Hinc enim ex solutione a me reperta licuit reciproce tales numeros assignare, qui conditioni propositae satisfacerent.

§. 3. Cum igitur isti problemati resolutionem quaestionis propositae acceptam referre oporteat haud abs re erit istud problema hic breviter commemorare; quanquam enim istud problema jam in *Tomo XV. novorum Commentatiorum* tractavi, hic solutionem multo faciliorem et elegantiorem sum traditurus. Problema autem ita erat enunciatum:

Invenire duos numeros, quorum productum sive auctum sive minutum tam summa quam differentia ipsorum numerorum producat numeros quadratos.

§. 4. Statuantur bini numeri quaesiti, quoniam integri esse nequeunt $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, atque necesse est, ut istae formulae:

$$xy \pm z(x + y) \quad \text{et} \quad xy \pm z(x - y)$$

fiant quadrata. Pro harum formularum priore ponamus $xy = aa + bb$, eique satisfiet, sumendo $z(x + y) = 2ab$. Simili modo, si pro posteriore ponamus $xy = cc + dd$, esse oportebit $z(x - y) = 2cd$. Efficiendum igitur est, ut bini valores pro xy assumti reddantur inter se aequales, sive ut fiat $aa + bb = cc + dd$. Deinde, cum ex priore sit $x + y = \frac{2ab}{z}$, ex posteriore vero $x - y = \frac{2cd}{z}$ hinc colligitur fore $x = \frac{ab + cd}{z}$ et $y = \frac{ab - cd}{z}$ quorum ergo productum $\frac{aabb - ccdd}{zz}$ ipsi $aa + bb$ ut et $cc + dd$ aequari debet, unde fieri oportebit $zz = \frac{aabb - ccdd}{aa + bb} = \frac{aabb - ccdd}{cc + dd}$. Cum igitur xy duplici modo in summam duorum quadratorum resolubile esse debeat, statuamus $xy = (pp + qq)(rr + ss)$ hineque pro formula priore $aa + bb$ accipiatur $a = pr + qs$ et $b = ps - qr$; pro posteriore vero $c = pr - qs$, tum vero $d = ps + qr$. Hinc ergo erit

$$ab + cd = 2rs(pp - qq) \quad \text{et} \quad ab - cd = 2pq(rr - ss)$$

unde prodibit $zz = \frac{4pqrs(pp - qq)(rr - ss)}{(pp + qq)(rr + ss)}$.

§. 5. Cum igitur haec fractio quadratum esse debeat, etiam productum ex numeratore in denominatorem, quod est

$$pqrs\,(p^4 - q^4)\,(r^4 - s^4),$$

quadratum esse debebit, quod manifesto reducitur ad hoc productum

$$pq\,(p^4 - q^4) \times rs\,(r^4 - s^4),$$

vel etiam ista fractio $\frac{pq\,(p^4 - q^4)}{rs\,(r^4 - s^4)}$ ad quadratum reduci debebit, quae ergo est ea ipsa quaestio, quam hic enodandam suscepi.

§. 6. Cum autem istud problema mihi olim proponeretur pluribus tentaminibus frustra institutis tandem pro binis numeris quaesitis $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ hos elicui valores $\frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2}$ et $\frac{5 \cdot 29^2}{3^2 \cdot 11^2}$, ex quo casu vicissim pro litteris p, q, r, s conclusi istos valores:

$$p = 12, \quad q = 1, \quad r = 16 \quad \text{et} \quad s = 11,$$

qui quomodo nostrae quaestioni satisfaciant videamus. Erit igitur

$p = 12$	$r = 16$
$q = 1$	$s = 11$
$p + q = 13$	$r + s = 27$
$p - q = 11$	$r - s = 5$
$pp + qq = 5 \cdot 29$	$rr + ss = 13 \cdot 29$.

Hinc porro colligimus fore:

$$pq\,(p^4 - q^4) = 4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 29$$
$$rs\,(r^4 - s^4) = 16 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$$

unde concluditur $\frac{pq\,(p^4 - q^4)}{rs\,(r^4 - s^4)} = \frac{1}{4 \cdot 9}$.

§. 7. Cum igitur casus nobis constet, quo quaestioni hic propositae satisfit, ejus consideratio nos perducere poterit ad alias solutiones investigandas. Quam obrem quasdam notabiles relationes in valoribus inventis occurrentes observemus, ubi statim ista notabilis convenientia deprehenditur, quod formulae $pp + qq$ et $rr + ss$ communem habeant factorem 29, dum alteri factores sunt 5 et 13;

omnes scilicet summae duorum quadratorum, quemadmodum rei natura postulat.

§. 8. Ab hac igitur conditioni incipientes statuamus

$$pp + qq = (aa + bb)(xx + yy) \text{ et } rr + ss = (cc + dd)(xx + yy),$$

ita ut $xx + yy$ sit factor utrique formulae communis, atque hinc nanciscemur sequentes valores:

$$p = ax + by \; ; \quad r = cx + dy$$
$$q = bx - ay \; ; \quad s = dx - cy$$

ideoque:

$$p + q = (a + b)x + (b - a)y \; ; \quad r + s = (c + d)x + (d - c)y$$
$$p - q = (a - b)x + (b + a)y \; ; \quad r - s = (c - d)x + (d + c)y.$$

§. 9. Porro autem efficiamus, ut utrinque duo tantum termini se mutuo destruant, atque exemplum modo datum considerantes reperimus formulam $p - q = 11$ aequalem esse formulae $s = 11$, unde in genere istam aequalitatem statuamus $p - q = s$ hincque oritur ista aequatio: $(a - b)x + (b + a)y = dx - cy$ ex qua ratio inter x et y sponte definitur; fit enim $\frac{x}{y} = \frac{a + b + c}{d + b - a}$. Quamobrem in genere statuamus $x = a + b + c$ et $y = d + b - a$. Quamquam autem hoc modo quaestio restricta videatur, tamen re perpensa nulla plane restrictio est facta. Cum enim utrinque quaecunque multipla litterarum p et q itemque r et s perinde satisfaciant, semper talia multipla capere licebit ut fiat $p - q = s$.

§. 10. Praeterea etiam observasse juvabit, formulam $p + q$ in exemplo aequalem esse ipsi $cc + dd$; quamobrem in genere statuamus $p + q = cc + dd$, qua positione autem utique ingens restrictio introducitur. Substitutis ergo loco x et y valoribus modo inventis reperietur sequens aequatio:

$$(a + b)(a + b + c) + (b - a)(b - a + d) = cc + dd \text{ sive}$$
$$(a + b)^2 + c(a + b) + (b - a)^2 + d(b - a) = cc + dd$$

cui aequationi si utrinque addatur $\frac{1}{4}(cc+dd)$ prodibit ista:

$$(a+b+\tfrac{1}{2}c)^2+(b-a+\tfrac{1}{2}d)^2=\tfrac{5}{4}(cc+dd)$$

ubi in parte sinistra habetur summa duorum quadratorum. Evidens vero est membrum dextrum duplici modo summam duorum quadratorum continere scilicet vel $(c+\frac{1}{2}d)^2+(d-\frac{1}{2}c)^2$ vel etiam $(c-\frac{1}{2}d)^2+(d+\frac{1}{2}c)^2$. Hinc, prouti utrinque quodvis quadratum sive uni sive alteri aequale statuamus, quatuor hic occurrunt combinationes sequentes:

I.	II.
$a+b+\frac{1}{2}c=c+\frac{1}{2}d$	$a+b+\frac{1}{2}c=d-\frac{1}{2}c$
$b-a+\frac{1}{2}d=d-\frac{1}{2}c$	$b-a+\frac{1}{2}d=c+\frac{1}{2}d$
III.	**IV.**
$a+b+\frac{1}{2}c=c-\frac{1}{2}d$	$a+b+\frac{1}{2}c=d+\frac{1}{2}c$
$b-a+\frac{1}{2}d=d+\frac{1}{2}c$	$b-a+\frac{1}{2}d=c-\frac{1}{2}d.$

§. 11. Ex his autem quatuor casibus eum eligi convenit, qui cum exemplo congruat. At si formulas hactenus inventas cum exemplo conferamus reperiemus $a=2$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, unde fit $x=5$, $y=2$, ita ut sit

$$xx+yy=29;\quad aa+bb=5;\quad cc+dd=13;$$

hincque omnes reliqui valores cum exemplo prorsus convenient. Cum igitur sit $a+b+\frac{1}{2}c=4$ et $b-a+\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}$, eligatur ea combinatio, quae eosdem praebeat valores, at facile patebit quartam adhiberi debere. Habebimus ergo $a+b=d$, $b-a=c-d$, hincque litterae c et d ita per a et b definiuntur ut sit $c=2b$ et $d=a+b$ ex quibus jam porro fit $x=a+3b$; $y=2b$. His igitur valoribus constitutis singuli factores utriusque formulae

$$pq(p+q)(p-q)(pp+qq) \text{ et } rs(r+s)(r-s)(rr+ss)$$

sequenti modo expressi reperiuntur

$$p = aa + 3\,ab + 2\,bb = (a + b)(a + 2\,b)$$
$$q = 3\,bb - ab = b\,(3\,b - a)$$
$$p + q = aa + 2\,ab + 5\,bb$$
$$p - q = aa + 4\,ab - bb$$
$$pp + qq = (aa + bb)(xx + yy)$$

$$r = 4\,ab + 8\,bb = 4\,b\,(a + 2\,b)$$
$$s = aa + 4\,ab - bb$$
$$r + s = aa + 8\,ab + 7\,bb = (a + b)(a + 7\,b)$$
$$r - s = 9\,bb - aa = (3\,b + a)(3\,b - a)$$
$$rr - ss = (aa + 2\,ab + 5\,bb)(xx + yy).$$

§. 12. Conjungamus jam singulos factores utriusque formulae, ac reperiemus:

$$pq(p^4 - q^4) = (a + b)(a + 2b)\,b\,(3\,b - a)(aa + 2ab + 5\,bb) \times (aa + 4ab - bb)(aa + bb)(xx + yy)$$
$$rs\,(r^4 - s^4) = 4b\,(a + 2b)(aa + 4ab - bb)(a + b)(a + 7b)(3b + a)(3b - a)(aa + 2ab + 5bb)(xx + yy).$$

Quod si ergo priorem per posteriorem dividamus erit
$$\frac{pq\,(p^4 - q^4)}{rs\,(r^4 - s^4)} = \frac{aa + bb}{4\,(a + 7b)(3b + a)}.$$
Quamobrem, ut haec fractio quadrato aequetur, ejusmodi valores pro litteris a et b requiruntur, ut ista fractio $\frac{aa + bb}{(a + 7b)(3b + a)}$ fiat quadratum, vel etiam ejus inversa $\frac{(a + 3b)(a + 7b)}{aa + bb}$, quod quidem pro nostro exemplo utique evenit, sumendo $a = 2$ et $b = 1$, tum enim hujus posterioris fractionis valor erit 9. Totum ergo negotium huc redit, ut ista fractio ad quadratum reducatur.

§. 13. Ponamus hic $\frac{a}{b} = t$, ut formula quadrato aequanda sit $\frac{(t + 3)(t + 7)}{tt + 1}$ atque methodum prorsus singularem hic sum traditurus, ex quovis valore cognito innumeros alios inveniendi. Hunc in finem plures casus, qui quasi se sponte offerunt notasse juvabit qui sunt $t = 2$, $t = 1$, $t = -2$, $t = \infty$, $t = -3$, $t = -7$.

Quemadmodum igitur ex his valoribus cognitis alii novi elicere queant, hic ostendamus. Ante omnia autem productum ex numeratore in denominatorem est considerandum, quod est:

$$t^4 + 10t^3 + 22tt + 10t + 21$$

quod ergo ad quadratum reduci oportet.

§. 14. Quoniam hic tantum primus terminus est quadratum, ejus radicem ita fingamus, ut etiam secundus terminus tollatur; quare haec formula aequalis statuatur huic quadrato:

$$(tt + 5t + v)^2$$

hincque orietur sequens aequatio:

$$22tt + 10t + 21 = (2v + 25)tt + 10tv + vv,$$

quae reducitur ad hanc:

$$-3tt + 10t + 21 = 2vtt + 10tv + vv,$$

haecque aequatio duas continet litteras t et v, quarum utraque ad duas dimensiones assurgit, ideoque, dum altera ut cognita spectatur altera geminos valores recipiet, qui si indicentur per t et t', nec non per v et v' ex natura aequationum constat fore:

$$t + t' = \frac{10(1-v)}{2v+3}, \quad \text{tum vero} \quad v + v' = -2t(t+5),$$

quarum formularum ope simulac constent valores pro t et v inde novi pro iisdem litteris eruentur atque ex his simili modo denuo novi, ita ut tales operationes sine fine continuari queant.

§. 15. Cum igitur pro t jam cognitae sint aliquot valores, videamus quales valores ipsius v illis respondeant, quae determinatio ex ultima aequatione peti potest. Ita cum sit $t = 2$ haec aequatio evadet $vv + 28v = 29$, unde oriuntur hi duo valores $v = 1$ et $v = -29$. Pro secundo valore $t = 1$ oritur $v = 2$ et $v = -14$. Pro tertio valore $t = -2$ prodit $v = 1$ et $v = 11$. Pro quarto $t = \infty$ ambo termini quadratum tt continentes se debent destruere, sicque erit $2v = -3$ sive $v = -\frac{3}{2}$, tum vero huic valori $v = -\frac{3}{2}$ respondet valor

$t = -\frac{3}{4}$. Pro quinto valore $t = -3$ nanciscimur valorem $v = 6$. Denique casus $t = -7$ praebet $v = -14$.

§. 16. Quod si jam bini hujusmodi valores pro litteris t et v accipiantur, ex iis novi formabuntur ope harum formularum:

$$t' = \frac{10(1-v)}{2v+3} - t; \quad v' = -2t(t+5) - v.$$

Incipiamus igitur a casu $t = 2$ et $v = 1$ atque tota operatio sequenti modo procedet:

$$t = 2, \quad -2, \quad -2, \quad 2, \quad \frac{-82}{11}, \quad \frac{262}{649},$$

$$v = 1, \quad 11, \quad 1, \quad -29, \quad \frac{-919}{121}.$$

In hac operatione jam continentur casus initio cogniti unde hos jam praetermittere poterimus.

§. 17. Progrediamur igitur ad casum quartum quo $v = -\frac{3}{2}$ et $t = -\frac{3}{4}$, ubi valores pro v et z inverso modo scribere debemus, quia alias t' prodiret $= \infty$. Operatio igitur ita se habebit:

$$v = -\frac{3}{2}, \quad \frac{65}{8}, \quad \frac{77}{18}, \quad -\frac{164 \cdot 27}{11 \cdot 11},$$

$$t = -\frac{3}{4}, \quad -\frac{35}{12}, \quad \frac{25}{312}.$$

§. 18. Sumamus nunc $t = -3$ et $v = 6$, similique modo operationem instituendo orientur hi valores:

$$t = -3, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{41}{3}, \quad \frac{267}{31},$$

$$v = 6, \quad -\frac{26}{9}, \quad -9 \cdot 26.$$

Possunt etiam termini initiales inverti hoc modo:

$$v = 6, \quad 6, \quad -\frac{26}{9}, \quad -9 \cdot 26,$$

$$t = -3, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{41}{3}.$$

Evidens autem est, hinc nullos novos valores emergere cum omnes in praecedente serie jam contineantur.

§. 19. Evolvamus denique casum ultimum quo $t = -7$ et $v = -14$ pro quo sequentes valores eruuntur:

$$t = -7, \quad 1, \quad -\frac{17}{7}, \quad \frac{503}{7 \cdot 47},$$

$$v = -14, \quad 2, \quad \frac{514}{49}.$$

Primis autem terminis v et t inverso modo positis fit:

$$v = -14, \quad -14, \quad 2, \quad \frac{514}{49},$$

$$t = -7, \quad 1, \quad -\frac{17}{7}, \quad \frac{503}{329},$$

qui autem numeri jam in praecedente serie occurrunt. Ceterum notandum est, casum secundum, quo $t = 1$ et v vel $= 2$ vel $= -14$ etiam hic reperiri, qui casus supra erat praetermissus.

§. 20. Valores ergo idonei per has operationes pro t inventi sequenti modo se habebunt:

I. $t = 2$; II. $t = -2$; III. $t = -\frac{82}{11}$; IV. $t = \frac{262}{649}$;

V. $t = -\frac{3}{4}$; VI. $t = -\frac{35}{12}$; VII. $t = \frac{25}{312}$; VIII. $t = -3$;

IX. $t = -\frac{1}{3}$; X. $t = -\frac{41}{3}$; XI. $t = \frac{267}{31}$; XII. $t = -7$;

XIII. $t = 1$; XIV. $t = -\frac{17}{7}$; XV. $t = \frac{503}{329}$.

Horum igitur valorum singuli suppeditant solutionem quaestionis propositae; quemadmodum in sequente problemate ostendemus.

Ex quolibet valore idoneo pro t *invento assignare quatuor numeros* p, q, r, s, *ita ut productum sive quotus harum formularum* $pq(p^4 - q^4)$ *et* $rs(r^4 - s^4)$ *fiat quadratum.*

Solutio.

§. 21. Cum sit $\frac{a}{b}$, habebuntur quoque ambo numeri a et b in integris, ex quibus litterae p, q, r, s cum derivatis sequenti modo determinabuntur:

$$\begin{array}{l|l}
p = (a+b)(a+2b) & r = 4b(a+2b) \\
q = b(3b-a) & s = aa+4ab-bb \\
p+q = aa+2ab+5bb & r+s = (a+b)(a+7b) \\
p-q = aa+4ab-bb & r-s = (3b+a)(8b-a) \\
pp+qq = (aa+bb)(x^2+y^2) & rr+ss = (aa+2ab+5bb)(x^2+y^2) \\
= (aa+bb)(aa+6ab+13bb) & =(aa+2ab+5bb)(aa+6ab+13bb).
\end{array}$$

§. 22. Circa has formulas observandum est 1°) si quispiam numerorum p, q, r, s, prodierit negativus, ejus loco semper positivum scribi posse; 2°) si prodierit vel $q > p$ vel $s > r$ hos valores inter se semper permutari posse, ita ut littera p indicet numerum majorem, q vero minorem, similique modo r majorem et s minorem; 3°) si eveniat ut numeri p et q habeant communem divisorem, eum per divisionem semper tollere licet, quod idem de litteris r et s est tenendum. 4°) Evidens quoque est, tam loco binarum litterarum p et q quam r et s eorum summam et differentiam scribi posse: Si enim ponamus

$$P = p+q, \quad Q = p-q, \quad R = r+s, \quad S = r-s$$

fiet $PQ(P^4 - Q^4) = 8pq(p^4 - q^4)$ similique modo

fiet $RS(R^4 - S^4) = 8rs(r^4 - s^4)$,

ideoque et harum novarum formularum sive quotus sive productum erit etiam quadratum. 5°) Ista transformatio insignem usum praestat, si litterae p, q, r, s fuerint impares; tum enim litterae majusculae P, Q, R, S deprimi possunt, sicque ad minores numeros pervenietur: nam si ponamus

$$P = \frac{p+q}{2}, \quad Q = \frac{p-q}{2}, \quad R = \frac{r+s}{2}, \quad S = \frac{r-s}{2}$$

fiet $PQ(P^4 - Q^4) = \frac{pq(p^4-q^4)}{8}$ et $RS(R^4 - S^4) = \frac{rs(r^4-s^4)}{8}$.

Secundum haec ergo praecepta pro valoribus ipsius t inventis litteras p, q, r, s in sequentibus exemplis assignemus.

Exemplum 1,

quo $t = 2$.

§. 23. Hic ergo erit $a = 2$ et $b = 1$ hincque fiet
$$p = 3 \cdot 4, \quad q = 1, \quad r = 4 \cdot 4, \quad s = 11,$$
qui ergo cum suis derivatis ita disponantur:

$$\begin{array}{l|l}
p = 4 \cdot 3 & r = 4 \cdot 4 \\
q = 1 & s = 11 \\
p + q = 13 & r + s = 3 \cdot 9 \\
p - q = 11 & r - s = 5 \\
pp + qq = 5 \cdot 29 & rr + ss = 13 \cdot 29.
\end{array}$$

Casus porro $t = -2$ et $t = 1$, $t = -3$, $t = -7$, $t = -\frac{1}{3}$, hic omittamus, quia solutiones incongruas praeberent.

Exemplum 2,

quo $t = -\frac{3}{4}$.

§. 24. Cum igitur sit $a = -3$ et $b = 4$, fiet hoc casu

$$\begin{array}{l|l}
p = 1 & r = 4 \cdot 4 \\
q = 4 \cdot 3 & s = 11 \\
p + q = 13 & r + s = 27 \\
p - q = 11 & r - s = 5 \\
pp + qq = 5 \cdot 29 & rr + ss = 13 \cdot 29,
\end{array}$$

qui autem valores cum praecedentibus tantum in eo dissentiunt ut p et q sint permutati; hinc ergo nulla nova solutio emergit.

Exemplum 3.

quo $t = -\frac{17}{7}$.

§. 25. Hic ergo sumi debet $a = -17$, $b = 7$ unde hi valores orientur per 2 et 4 scil. depressi:

$p = 3 \cdot 5 \qquad r = 3 \cdot 7$

$q = 7 \cdot 19 \qquad s = 59.$

Jam quia omnes hi numeri sunt impares, eorum loco scribantur semi-summae et semi-differentiae sicque haec nova problematis solutio orietur:

$p = 2 \cdot 37$	$r = 40$
$q = 59$	$s = 19$
$p + q = 133$	$r + s = 59$
$p - q = 15$	$r - s = 21$
$pp + qq = 53 \cdot 169$	$rr + ss = 53 \cdot 37.$

Ubi omnes factores non quadrati se utrinque destruunt.

Exemplum 4,

quo $t = -\frac{41}{3}.$

§. 26. Sumto hic $a = -41$ et $b = 3$ valores p, q, r, s, quantum licet depressi erunt:

$$p = 7 \cdot 19; \quad q = 3 \cdot 5; \quad r = 3 \cdot 7; \quad s = 59,$$

qui casus cum praecedente perfecte congruit.

Exemplum 5,

quo $t = -\frac{35}{12}.$

§. 27. Cum igitur sumi debeat $a = -35$ et $b = 12$ valores pro p, q, r, s, hinc erunt:

$p = 12 \cdot 71 = 852$	$r = 599$
$q = 11 \cdot 23 = 253$	$s = 11 \cdot 48 = 52$
$p + q = 5 \cdot 21$	$r + s = 23 \cdot 49$
$p - q = 599$	$r - s = 71$
$pp + qq = 37^2 \cdot 577$	$rr + ss = 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 577,$

ubi iterum omnes factores non quadrati utrinque occurrunt. Eandem porro solutionem resultare ex casu $t = -\frac{82}{11}$ inde patet, quod

$$82^2 + 11^2 = 5\,(35^2 + 12^2).$$

§. 28. Praeter casum ergo jam pridem cognitum quo

$$p = 12, \quad q = 1, \quad r = 16, \quad s = 11,$$

qui nobis instar normae in hac investigatione inserviit duas alias novas solutiones sumus adepti, quae numeris non nimis magnis constant. Reliqui vero quatuor casus pro t inventi:

$$\frac{25}{312}, \quad \frac{267}{31}, \quad \frac{503}{379}, \quad \frac{262}{649}$$

perducerent ad numeros nimis magnos, quos operae non est pretium evolvere. Ceterum in his operationibus plura occurrunt calculi artificia vix adhuc cognita quibus Analysis non exigua incrementa accipere est censenda.

§. 29. Hinc jam Problema in Tomo XV. nov. Comment. tractatum multo commodius et concinnius resolvi ac per numeros absolutos expediri poterit, quam solutionem hic subjungo.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum productum sive auctum sive minutum tam summa quam differentia ipsorum numerorum, producat numeros quadratos.

Solutio.

§. 30. Positis numeris quaesitis $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ supra jam vidimus esse $x = \frac{ab + cd}{z}$ et $y = \frac{ab - cd}{z}$ deinde introductis litteris p, q, r, s, erat

$$ab + cd = 2rs\,(pp - qq) \text{ et } ab - cd = 2pq\,(rr - ss).$$

Quamobrem numeri quaesiti erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{2rs\,(pp - qq)}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2pq\,(rr - ss)}{zz}.$$

Invenimus autem porro esse $zz = \frac{4pqrs(pp - qq)(rr - ss)}{(pp + qq)(rr + ss)}$ quo valore substituto ambo numeri quaesiti erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{2pq(rr - ss)} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{2rs(pp - qq)}.$$

§. 31. Quoniam igitur supra in exemplis tres solutiones in numeris absolutis dedimus, si ex iis valores pro litteris p, q, r, s depromamus, sequentes tres solutiones numericas nanciscemur.

I. Solutio,

ex §. 23. petita.

$$\frac{x}{z} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 13 \cdot 29}{2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 13 \cdot 29}{13 \cdot 11 \cdot 32 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 29^2}{32 \cdot 11^2},$$

quae est solutio a me primum inventa.

II. Solutio,

ex §. 25. petita.

$$\frac{x}{z} = \frac{53 \cdot 169 \cdot 53 \cdot 37}{4 \cdot 37 \cdot 59 \cdot 59 \cdot 21} = \frac{13^2 \cdot 53^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 59^2}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{53 \cdot 169 \cdot 53 \cdot 37}{38 \cdot 40 \cdot 133 \cdot 15} = \frac{37 \cdot 13^2 \cdot 53^2}{3 \cdot 7 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 19^2}.$$

III. Solutio,

ex §. 27. petita.

$$\frac{x}{z} = \frac{37^2 \cdot 577 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 577}{24 \cdot 71 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 49 \cdot 71} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 37^2 \cdot 577^2}{11 \cdot 24 \cdot 7^2 \cdot 23^2 \cdot 71^2}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{37^2 \cdot 577 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 577}{2 \cdot 528 \cdot 599 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 599} = \frac{13 \cdot 17 \cdot 37^2 \cdot 577}{6 \cdot 7 \cdot 528 \cdot 599^2}.$$

§. 32. Subjungam hic curiositatis gratia adhuc solutionem maximis numeris contentam, quam suppeditat casus supra inventus

§. 20., scilicet $t = \frac{25}{312}$, unde fit $a = 25$ et $b = 312$. Hinc autem deducuntur sequentes valores:

$p = 3 . 8 . 13 . 911$	$r = 3 . 11 . 13 . 32 . 59$
$q = 11 . 59 . 337$	$s = 65519$
$p + q = 5 . 17 . 61 . 97$	$r + s = 31^2 . 911$
$p - q = 65519$	$r - s = 337 . 47^2$
$pp + qq = 313^2 . 1312897$	$rr + ss = 5 . 17 . 61 . 97 . 1312897,$

ex quibus numeri quaesiti erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{5 . 17 . 61 . 97 . 313^2 . 1312897^2}{3 . 11 . 13 . 59 . 4^2 . 31^2 . 47^2 . 337^2 . 911^2}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{313^2 . 1312897^2}{3 . 11 . 13 . 8^2 . 59 . 65519^2}.$$