II.

SOLUTIO
PROBLEMATIS DIFFICILLIMI,
QUO HAE DUAE FORMULAE:
$$aaxx + bbyy \quad \& \quad aayy + bbxx$$
QUADRATA REDDI DEBENT.

Conventui exhibita die 3. Julii 1780.

§. 1.

Hanc quaestionem non solum solutu difficillimam sed etiam maximi in Analysi momenti pronunciare non dubito. Primo enim in ea evolvenda satis diu frustra desudavi; deinde vero solutio quam tandem sum adeptus plura insignia artificia calculi postulat quae haud contemnenda incrementa in universam Analysin Diophanteam inferre videntur. Cum autem haec quaestio circa bina quadratorum paria aa, bb et xx, yy versetur, eorum neutrum pro lubitu assumi potest, sed ambo parem industriam et sagacitatem requirunt.

§. 2. Ponamus igitur
$$aaxx + bbyy = zz \text{ et } aayy + bbxx = vv,$$
atque his formulis tam addendis quam subtrahendis prodit
$$(aa + bb)(xx + yy) = zz + vv \text{ et}$$
$$(aa - bb)(xx - yy) = zz - vv,$$
ex quibus quidem primum speravi solutionem derivare posse; propterea quod summa quadratorum $zz + vv$ pluribus modis in duo quadrata resolubilis requiritur: tum vero etiam manifestum est, formulam $zz - vv$ plures factores involvere debere. Interim tamen

haec consideratio vix quicquam ad solutionem inveniendam conferre videtur. Inde enim multo labore vix tandem unicam solutionem elicere potui, qua inveni $a = 5$, $b = 3$, $x = 7$, $y = 4$. Hinc enim fit

$$aaxx + bbyy = 35^2 + 12^2 = 37^2 \quad \text{et}$$
$$aayy + bbxx = 20^2 + 21^2 = 29^2.$$

Verum nihil prorsus attinet conatus irritos meos fusius exponere propterea quod tandem ad solutionem generalem et satis elegantem perveni.

§. 3. Primo igitur ut formula $aaxx + bbyy$ quadratum reddatur pono $\frac{ax}{by} = \frac{pp-qq}{2pq}$; pro altera vero formula pono $\frac{ax}{by} = \frac{rr-ss}{2rs}$, quarum illa per hanc divisa praebet $\frac{xx}{yy} = \frac{rs(pp-qq)}{pq(rr-ss)}$ ubi si utrinque per $\frac{ppqq}{rrss}$ multiplicetur, orietur $\frac{ppqqxx}{rrssyy} = \frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)}$, sicque totam resolutionem perduximus ad binas has formulas inter se prorsus similes $pq(pp-qq)$ et $rs(rr-ss)$, quarum altera per alteram divisa quadratum producere debeat, vel quod eodem redit, ut earum productum evadat quadratum, in quo negotio plures Geometrae ingenti studio sunt versati, neque tamen a quoquam resolutio satis generalis est inventa, unde non solum plures solutiones particulares ad hoc institutum satis accomodatas sum adeptus, sed etiam tandem mihi contigit in solutionem generalem incidere, qua fines Analyseos diophantaeae plurimum proferentur.

§. 4. Quod si autem hujusmodi casu invenerimus quo

$$\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{tt}{uu},$$

statim inde deducimus $\frac{pqx}{rsy} = \frac{t}{u}$, ideoque $\frac{x}{y} = \frac{rst}{pqu}$, qua fractione ad minimos terminos reducta ponatur $x = rst$ et $y = pqu$. Hinc cum habuerimus $\frac{ax}{by} = \frac{pp-qq}{2pq}$, ideoque $\frac{a}{b} = \frac{u(pp-qq)}{2rst}$, qua fractione ad minimos terminos reducta capiatur iterum

$$a = u(pp-qq) \quad \text{et} \quad b = 2rst.$$

§. 5. Hic igitur commode in usum vocari potest tabula quam non ita pridem in dissertatione dedi, in qua hujus formulae:

$$AB(AA - BB),$$

factores non quadratos exhibui. Quod si enim inde depromantur duo casus eosdem factores non quadratos continentes, eorum productum utique erit quadratum, ideoque solutionem nostri Problematis suppeditabit. In ea autem tabula statim se offerunt tales valores: $p = 5, q = 2, r = 6, s = 1$. Hinc enim erit $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = 1$, ideoque $t = 1$ et $u = 1$ unde ergo habebimus $\frac{x}{y} = \frac{rs}{pq} = \frac{3}{5}$ et $\frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{2rs} = \frac{7}{4}$. Hinc ergo colligimus $a = 7$, $b = 4$, $x = 5$, $y = 3$ quandoquidem tam litteras a et b, quam x et y inter se permutare licet, sicque iste casus cum ante memorato convenit.

§. 6. Simili modo tabula allegata etiam dat hos valores: $p = 5$; $q = 2$; $r = 8$, $s = 7$, unde fit $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{1}{4}$, ergo $t = 1$ et $u = 2$. Hinc ergo habebimus

$$\frac{x}{y} = \frac{rs}{2pq} = \frac{14}{5} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{rs} = \frac{3}{8}.$$

Quamobrem sumi potest $a = 8$, $b = 3$, $x = 14$, $y = 5$ unde fit $aaxx + bbyy = 113^2$ et $aayy + bbxx = 38^2$ quae solutio a praecedente parum discrepat.

§. 7. Adhuc alius casus ex tabula depromi potest, quo $p = 6$, $q = 5$, $r = 8$, $s = 3$, qui dat $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{1}{4}$ ergo iterum $t = 1$ et $u = 2$, unde colligitur

$$\frac{x}{y} = \frac{rs}{2pq} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{rs} = \frac{11}{24}.$$

Sumto igitur $a = 24$, $b = 11$; $x = 5$, $y = 2$; fiet

$$aaxx + bbyy = 122^2 \quad \text{et} \quad aayy + bbxx = 73^2.$$

§. 8. Quoniam autem hoc modo solutiones tantum singulares reperiuntur, atque tabula illa ad imites satis arctos restringitur, hic potissimum in formulas generaliores sumus inquisituri, quae simul infinitam multitudinem solutionum contineant, id quod pluribus modis fieri posse observavi, etsi hae formulae tantum solutiones particulares exhibeant. Quamobrem aliquot hujusmodi solutiones particulares in medium afferamus, ex quibus innumerabiles alias solutiones derivare liceat, quibus expositis solutionem demum generalem aggrediemur.

Prima solutio particularis.

§. 9. Sumamus statim $s = q$ et $r = p + q$, quo pacto fractio nostra generalis $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{tt}{uu}$ ad hanc simplicem formam reducitur $\frac{p-q}{p+2q} = \frac{tt}{uu}$ unde deducimus $\frac{p}{q} = \frac{uu+2tt}{uu-tt}$. Quamobrem si sumamus $p = uu + 2tt$ et $q = uu - tt$ fiet $r = 2uu + tt$ et $s = uu - tt$. Ex his ergo valoribus colligitur

$$\frac{x}{y} = \frac{t(2uu+tt)}{u(uu+2tt)} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{3tu}{2(uu-tt)}$$

ideoque

$$a = 3tu, \quad b = 2(uu-tt), \quad x = t(2uu+tt), \quad y = u(uu+2tt).$$

Ex his autem valoribus erit

$$ax = 3ttu(2uu+tt) \quad \text{et} \quad by = 2u(uu-tt)(uu+2tt).$$

Hinc igitur colligimus

$$z = u((uu-tt)^2 + (uu+2tt)^2) = u(2u^4 + 2ttuu - 5t^4).$$

Simili modo cum sit

$$ay = 3tuu(uu+2tt) \quad \text{et} \quad bx = 2t(uu-tt)(2uu+tt),$$

unde colligimus

$$v = t((uu-tt)^2 + (2uu+tt)^2) = t(2t^4 + 2ttuu + 5u^4).$$

§. 10. Hinc igitur facili negotio plurimae solutiones singulares deduci poterunt, quia pro litteris t et u numeros quoscunque assumere licet, non solum in numeris exiguis sed etiam valores quantumvis grandes assumere licebit, cujus modi ope tabulae ante usitatae neutiquam obtineri possunt. Operae igitur pretium erit has formulas per exempla illustrare, dum scilicet litteris t et u valores pro arbitrio assignamus. At quia litterae t et u inter se permutantur ipsi u valores majores, t vero minores tribuamus, quia casus $t = u$ nihil daret. Hinc in sequentem tabulam plura exempla simul ante oculos ponamus:

u	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6
t	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1	5
a	1	9	9	2	18	5	5	45	10	9	45
b	1	16	5	5	7	16	7	32	3	35	11
x	3	19	44	11	123	17	36	177	88	73	485
y	4	33	51	24	136	45	55	215	95	228	516
z	5	555	471	122	2410	725	425	10525	925	8007	22551
v	5	425	509	73	2595	353	373	11211	986	3277	23825

Solutio particulares secunda.

§. 11. Maneat $r = p + q$ et sumatur $s = p$ fietque

$$\frac{pq(pp - qq)}{rs(rr - ss)} = \frac{tt}{uu} = \frac{p - q}{2p + q},$$

unde colligitur $\frac{p}{q} = \frac{uu + tt}{uu - 2tt}$. Sumatur ergo $p = uu + tt$ atque $q = uu - 2tt$, eritque $r = 2uu - tt$ et $s = uu + tt$. Ex his valoribus sequitur fore

$$\frac{x}{y} = \frac{rst}{pqu} = \frac{t(2uu - tt)}{u(uu - 2tt)} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{u(pp - qq)}{2rst} = \frac{3tu}{2(uu + tt)}.$$

Quamobrem radices quatuor nostrorum quadratorum erunt:

$$a = 3tu;\; b = 2(uu + tt);\; x = t(2uu - tt);\; y = u(uu - 2tt),$$

quae solutio a praecedente hoc tantum differt, quod tt hic sit negative sumtum, manente tamen radice t eadem, unde deducuntur pro z et v sequentes valores:

$$z = u(2u^4 - 2ttuu + 5t^4) \text{ et } v = t(2t^4 - 2ttuu + 5u^4),$$

sive in gratiam calculi

$$z = u\left((uu + tt)^2 + (uu - 2tt)^2\right)$$
$$v = t\left((uu + tt)^2 + (2uu - tt)^2\right).$$

§. 12. Etsi hae formulae tam parum a praecedentibus differunt, tamen prorsus diversas in numeris solutiones suppeditant; quocirca ut ante loco t et u valores simpliciores accipiamus et solutiones numericas in sequenti tabula repraesentemus, ubi notandum, si loco a, b, x, y prodeant valores negativi, eorum loco semper positivos scribi posse.

u	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6
t	1	1	1	2	1	3	1	3	4	1
a	3	3	9	9	6	18	15	45	30	9
b	4	5	20	13	17	25	52	68	41	37
x	1	7	17	28	31	69	49	123	136	71
y	1	4	21	3	56	8	115	35	35	204
z	5	29	447	255	970	1258	6025	6025	4325	7575
v	5	37	389	365	625	1731	3077	8511	5674	3205

Solutio particularis tertia.

§. 13. Sumamus hic $s = q$ ac ponamus $\frac{pq(pp - qq)}{rs(rr - ss)} = 1$, eritque $p(pp - qq) = r(rr - qq)$ unde fit

$$qq = \frac{r^3 - p^3}{r - p} = rr + pr + pp,$$

quae ergo formula quadratum esse debet. Cum igitur sit

$$qq = (r + \tfrac{1}{2}p)^2 + 3\left(\tfrac{p}{2}\right)^2,$$

sumatur $r + \frac{1}{2}p = tt - 3uu$ et $\frac{1}{2}p = 2tu$, eritque $q = tt + 3uu$. Quoniam ergo $p = 4tu$ erit $r = tt - 2tu - 3uu = (t + u)(t - 3u)$. Quare cum pro praecedentibus formulis sit $t = 1$ et $u = 1$, quos valores cum praesentibus confundi non oportet, erit:

$$\frac{x}{y} = \frac{rs}{pq} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{pp - qq}{2rs}.$$

Habebimus ergo $x = (t + u)(t - 3u)$ et $y = 4tu$; tum vero

$$a = (t - u)(t + 3u) \quad \text{et} \quad b = 2(tt + 3uu).$$

Cum igitur sit

$$ax = (tt - uu)(tt - 9uu) \quad \text{et} \quad by = 8tu(tt + 3uu)$$

ponatur $(tt - uu)(tt - 9uu) = A^2 - B^2$ atque esse oportet

$$8tu(tt + 3uu) = 2AB,$$

ut fiat $z = A^2 + B^2$. Erit ergo $AB = 4tu(tt + 3uu)$, unde sumamus $A = tt + 3uu$ et $B = 4tu$, eritque

$$A + B = (t + 3u)(t + u) \text{ et } A - B = (t - 3u)(t - u)$$

quocirca erit $A^2 - B^2 = (tt - uu)(tt - 9uu)$ prorsus uti requiritur, consequenter erit nunc

$$z = (tt + 3uu)^2 + 16ttuu = t^4 + 22ttuu + 9u^4.$$

Simili modo sit $ay = 4tu(t - u)(t + 3u) + 4AB$ et

$$bx = 2(t + u)(t - 3u)(tt - 3uu) = 2(A^2 - B^2).$$

Hinc enim fiet $v = 2(A^2 + B^2)$. Statuamus ergo $A + B = tt + 3uu$ et $A - B = tt - 2tu - 3uu$ unde fit $A = tt - tu$ et $B = 3uu + tu$, quod cum positione egregie convenit, consequenter erit

$$v = 2\left(tt(t - u)^2 + uu(t + 3u)^2\right).$$

En ergo solutionem nostri problematis tertiam particularem

$$a = (t - u)(t + 3u); \quad b = 2(tt + 3uu)$$
$$x = (t + u)(t - 3u); \quad y = 4tu$$
$$z = (tt + 3uu)^2 + 16ttuu$$
$$v = 2tt(t - u)^2 + 2uu(t + 3u)^2.$$

Ubi iterum notandum est si pro his litteris valores prodeant negativi, eos tuto in positivos verti posse. Tribuamus igitur binis litteris t et u simpliciores valores numericos, unde quidem casus $t = u$, et $t = 3u$ excludi debent, itemque casus ubi t et u sunt impares, et solutiones hinc oriundas in sequenti tabula stipemus

t	2	1	4	1	4	5	2	5	4
u	1	2	1	4	3	2	5	4	5
a	5	7	21	39	13	33	51	17	19
b	14	26	38	98	86	74	158	146	182
x	3	15	5	55	35	7	91	63	99
y	8	8	16	16	48	40	40	80	80
z	113	233	617	2657	4153	2919	7841	11729	14681
v	58	394	368	6426	3074	1418	14522	9298	18082

Solutio generalis.

§. 14. Cum totum negotium reductum sit ad resolutionem hujus aequationis: $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{tt}{uu}$, loco $\frac{tt}{uu}$ scribamus brevitatis gratia litteram n, ita ut sit $t = \sqrt{n}$ et $u = 1$, unde ex litteris p, q, r, s, inventis numeri quaesiti a, b, x, y ita determinabuntur, ut sit $\frac{x}{y} = \frac{rs}{pq}\sqrt{n}$ et $\frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{2rs\sqrt{n}}$, vel, cum litterae a et b inter se permutari queant, poni poterit $\frac{a}{b} = \frac{2rs}{pp-qq}\sqrt{n}$, quibus fractionibus ad minimos terminos reductis habebuntur ipsi numeri quaesiti a, b, x, y. Nunc quemadmodum illa aequatio principalis:

$$\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = n,$$

resolvi debeat hic prorsus novam methodum apperiam, unde maxima incrementa in universam Analysin Diophantaeam redundabunt, cum a nemine adhuc ista aequatio generaliter sit evoluta.

§. 15. Quoniam hic sola relatio inter binas litteras p et q et inter binas r et s in computum venit, sine ulla restrictione assumere licet $s = q$ ita ut sit $\frac{p(pp-qq)}{r(rr-qq)} = n$; hinc colligitur $qq = \frac{p^3-nr^3}{p-nr}$. Hic jam porro statuatur $p = rv$ fietque $\frac{qq}{rr} = \frac{v^3-n}{v-n}$, sicque tota invetigatio eo redit, ut ista formula $\frac{v^3-n}{v-n}$ quadrato aequetur. Communi igitur methodo utentes, productum ex numeratore in denominatorem, quod est $v^4 - nv^3 - nv + nn$ quadratum reddi deberet cujus quidem ope statim aliquot valores pro v erui possent, quibus inventis ipsa haec formula per novas substitutiones transformari deberet, unde denuo novi valores erui possent, verum mox ad numeros tam enormes perveniretur, ut non nisi paucissimi valores modicae magnitudinis erui possent. At vero methodus mea nova nobis plurimas solutiones in numeris satis exiguis suppeditabit.

§. 16. Statuo autem $\frac{v^3-n}{v-n} = (v-z)^2$, ita ut sit $\frac{q}{r} = v-z$, dum, ut ante vidimus, est $\frac{p}{r} = v$. Facta igitur evolutione prodit haec aequatio:

$$(n+2z)vv - z(2n+z)v + n(zz-1) = 0,$$

quae tam respectu ipsius v quam ipsius z est quadratica, ideoque duas radices exhibet. At vero termini secundum z dispositi praebebunt hanc aequationem:

$$(n-v)zz - 2v(n-v)z - n(1-vv) = 0.$$

Quoniam igitur cuilibet factori ipsius v gemini ipsius z respondent, si hi designentur per z et z' erit ex natura aequationum $z+z'=2v$. Simili modo cuilibet valori ipsius z respondent gemini ipsius v, qui si ponantur v et v' erit $v+v'=\frac{z(z+2n)}{2z+n}$, unde, si jam valores pro v et z quicunque habeantur, ex iis novi pro iisdem litteris, scilicet v' et z' erit $z'=2v-z$ et $v'=\frac{z(z+2n)}{2z+n}-v$. Similique modo ex his valoribus denuo bini novi, hincque porro alii in infinitum reperiri poterunt, idque facili negotio, atque in hac duplici evolutione tota vis novae solutionis consistit, ita ut hoc modo plurimi valores sine ulla molesta transformatione obtineri queant statim atque binos tantum valores pro v et z cognoverimus.

§. 17. Tales autem valores primitivos ipsa aequatio quadratica quasi sponte nobis offert. Posito enim $v=0$ fiet $zz-1=0$ unde duo valores oriuntur $z=+1$ et $z=-1$. Simili modo posito $z=0$ fit $vv-1=0$ ideoque tam $v=+1$ quam $v=-1$, ita ut hinc jam habeamus quatuor casus, unde continuo novi valores pro litteris v et z derivari queant. Praeterea vero etiam quintus casus adjici poterit, ex positione $v=\infty$ oriundus; tum enim coëfficiens ipsius vv qui est $n+2z$ nihilo aequari debet, unde cum fiat $z=-\frac{n}{2}$ nunc aequatio induet hanc formam: $3nv+nn-4$, unde colligitur $v=\frac{4-nn}{3n}$, qui est alter valor ipsius v, valori $z=-\frac{n}{2}$ respondens, dum alter erat $v=\infty$, atque ex his duobus valoribus $z=-\frac{n}{2}$ et $v=\frac{4-nn}{3n}$, ope nostrarum formularum continuo plures novi elici poterunt. Hinc ergo istos quinque casus ulterius evolvamus.

Casus I,
quo $v = 0$ et $z = +1$.

§. 18. Hinc igitur per nostras formulas alternatim applicandas novi valores inde oriundi reperiuntur:

1°) $v = \frac{1+2n}{2+n}$, $z = \frac{3n}{2+n}$;

2°) $v = \frac{4(nn+n-2)}{nn+10n+16} = \frac{4(n-1)}{n+8}$; $z = \frac{5nn-16n-16}{nn+10n+16}$.

In genere autem vix ulterius progredi licet. Loco n nunc restituamus $\frac{tt}{uu}$, et cum secundus valor sit $v = \frac{1+2n}{2+n}$ et $v - z = \frac{n-1}{2+n}$, erit $v = \frac{p}{r} = \frac{uu+2tt}{2uu+tt}$ et $v - z = \frac{q}{r} = \frac{tt-uu}{tt+2uu}$. Quamobrem sumamus $p = uu + 2tt$, $q = tt - uu$, $r = 2uu + tt$, $s = tt - uu$, qui casus prorsus congruit cum solutione particulari prima supra data. Simili modo evolvamus valorem tertium ipsius v qui erat $\frac{4(n-1)}{n+8}$ cui respondet $z = \frac{3n}{2+n}$, unde fit $v - z = \frac{nn-20n-8}{(2+n)(8+n)}$. Hinc ergo erit $\frac{p}{r} = \frac{4(tt-uu)}{tt+8uu}$ et $\frac{q}{r} = \frac{t^4-20ttuu-8u^4}{(2uu+tt)(8uu+tt)}$. Sumatur ergo $r = (2uu+tt)(8uu+tt)$ eritque

$$p = 4(tt-uu)(tt+2uu) \text{ et } q = s = t^4 - 20\,ttuu - 8u^4.$$

Hinc igitur porro reperitur

$$\frac{x}{y} = \frac{t(8uu+tt)}{4u(tt-uu)} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{3tu(5t^4-16ttuu-16u^4)}{2(2uu+tt)(t^4-20ttuu-8u^4)}$$

unde innumerabiles novae solutiones reperiuntur.

Casus II,
quo $v = 0$ et $z = -1$.

§. 19. Hic ergo formulis supra datis sequentes valores deducuntur: $v = \frac{1-2n}{n-2}$; $z = -\frac{3n}{n-2}$; $v = \frac{-4(n+1)}{n-8}$. Evolvamus secundum valorem ipsius v scilicet $\frac{1-2n}{n-2}$, cui respondet $z = -1$;

unde fit $v - z = \frac{n+1}{2-n}$; ergo loco n posito $\frac{tt}{uu}$ fiet

$$\frac{p}{r} = v = \frac{uu - 2tt}{tt - 2uu} \text{ et } \frac{q}{r} = v - z = \frac{tt + uu}{2uu - tt}.$$

Sumto ergo $r = tt - 2uu$ erit $p = uu - 2tt$ et $q = s = tt + uu$ unde jam patet hunc casum cum solutione particulari secunda convenire, quia litteras p et q inter se permutare licet, neque ergo opus est hunc casum ulterius prosequi.

§. 20. Consideremus igitur tertium valorem ipsius v qui erat $\frac{-4(n+1)}{n-8}$, cui respondet $z = \frac{-3n}{n-2}$. His duobus valoribus cognitis habebimus $\frac{p}{r} = v$ et $\frac{q}{r} = v - z$, sicque obtinebuntur quatuor litterae p, q, r, s, ex quibus porro facile deducuntur numeri quaesiti a, b, x, y, ope formularum supra datarum

$$\frac{a}{b} = \frac{2rs}{pp - qq}\sqrt{n} \text{ et } \frac{x}{y} = \frac{rs}{pq}\sqrt{n}.$$

Ad quod illustrandum evolvamus casum, quo $n = \frac{9}{4}$ eritque $z = -27$ et $v = \frac{52}{23}$. Hinc fit $v - z = \frac{673}{23}$. Hinc ergo erit $\frac{p}{r} = \frac{53}{23}$ et $\frac{q}{r} = \frac{673}{23}$. Sumatur ergo $r = 23$ erit $p = 53$ et $q = 673 = s$ unde porro sequitur $\frac{a}{b} = \frac{23 \cdot 673}{242 \cdot 620}$ et $\frac{x}{y} = \frac{3 \cdot 23}{2 \cdot 53}$. Quatuor ergo numeri quaesiti erunt

$$a = 23 \cdot 673;\ b = 242 \cdot 620;\ x = 3 \cdot 23;\ y = 2 \cdot 53.$$

Casus III,

quo $z = 0$ et $v = 1$.

§. 21. Ex formulis supra datis pro hoc casu deducuntur sequentes valores:

$$z = 2;\ v = \frac{3n}{n+4};\ z = \frac{4(n-2)}{n+4};\ v = \frac{5nn - 24n + 16}{nn + 12n - 16},$$

ubi primus valor ipsius v nihil prodest; secundus vero $v = \frac{3n}{n+4}$ cui respondet $z = 2$, ita ut sit $v - z = \frac{n-8}{n+4}$, dat

$$\frac{p}{r} = \frac{3tt}{tt + 4uu} \text{ et } \frac{q}{r} = \frac{tt - 8uu}{tt + 4uu}.$$

Sumto ergo $r = tt + 4uu$ habebimus $p = 3tt$ et $q = s = tt - 8uu$ ex quibus porro deducimus:

$$\frac{a}{b} = \frac{t(tt - 8uu)}{4u(tt - 2uu)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{(tt + 4uu)}{3tu}.$$

Hae formulae reddentur concinniores, si loco u scribamus $\frac{1}{2}u$, tum enim erit:

$$\frac{a}{b} = \frac{t(tt - 2uu)}{u(2tt - uu)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{2(tt + uu)}{3tu},$$

consequenter quatuor numeri nostri quaesiti erunt:

$$a = t(tt - 2uu);\ b = u(2tt - uu);\ x = 2(tt + uu);\ y = 3tu,$$

qui casus iterum convenit cum solutione secunda particulari.

Casus IV,

quo $z = 0$ et $v = -1$.

§. 22. Hinc igitur valores derivati ita progredientur:

$$z = 0;\ v = -1;\ z = -2;\ v = \frac{-3n}{n-4};\ z = \frac{-4(n+2)}{n-4};$$
$$v = \frac{-(5nn + 24n + 16)}{nn - 12n - 16};$$

qui valores a praecedente casu hoc tantum differunt, quod sumto n negativo etiam v et z fiunt negativi. Hinc si ex valore $v = \frac{-3n}{n-4}$, posito $n = \frac{tt}{uu}$ litterae p, q, r, s, derivantur erit

$$p = 3tt;\ q = s = tt + 8uu;\ r = tt - 4uu;$$

ac si hic ut ante loco u scribamus $\frac{1}{2}u$, valores litterarum a, b, x, y, quaesiti erunt:

$$a = t(tt + 2uu);\ b = u(2tt + uu);\ x = 2(tt - uu);\ y = 3tu,$$

quae formulae conveniunt cum casu particulari primo. At vero sequentes valores ipsius v in omnibus his casibus prorsus novas suppeditabunt solutiones in casibus particularibus non contentos, ex quo generalitas hujus novae solutionis clarissime elucet.

Casus V,

qui incipit a $v = \infty$.

§. 23. Ex formulis ergo generalibus valores successive pro

v et z ita se habebunt:

$$v = \infty;\quad z = \frac{-n}{2};\quad v = \frac{4 - nn}{3n};\quad z = \frac{16 - nn}{6n};\quad v = \frac{n(64 - nn)}{8(nn + 8)}.$$

Hic jam secundus valor ipsius v qui est $\frac{4 - nn}{3n}$, cui respondet $z = \frac{-n}{2}$, ita ut sit $v - z = \frac{8 + nn}{6n}$, posito $n = \frac{tt}{uu}$, hos praebet valores: $\frac{p}{r} = \frac{4u^4 - t^4}{3ttuu}$ et $\frac{q}{r} = \frac{8u^4 + t^4}{6ttuu}$, unde deducimus

$$p = 8u^4 - 2t^4;\quad r = 6ttuu;\quad q = s = 8u^4 + t^4,$$

ex quibus colligimus fore

$$\frac{a}{b} = \frac{4u(8u^4 + t^4)}{t(16u^4 - t^4)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{6t^3u}{8u^4 - 2t^4},$$

ideoque sumi poterit

$$a = 4u(8u^4 + t^4);\quad b = t(16u^4 - t^4);\quad x = 6t^3u;\quad y = 8u^4 - 2t^4.$$

Has igitur formulas ad solutiones quasdam speciales accommodemus, tribuendo litteris t et u valores simpliciores, quas solutiones in sequenti tabula comprehendamus:

t	1	2	3	3	1	1	2
u	1	1	1	2	3	2	3
a	12	1	4 . 89	8 . 11 . 19	11 . 12 . 59	8 . 43	3 . 83
b	5	0	3 . 5 . 13	3 . 7 . 25	5 . 7 . 37	5 . 17	2 . 5 . 8
x	1	2	81	2 . 81	9	2	3 . 6
y	1	1	7 . 11	17	17 . 19	21	7 . 11

§. 24. His casibus litteras z et v non ultra paucos terminos assignare licuit, si quidem litterae n valorem indefinitum relinquamus; at si ejus loco determinata quadrata assumamus, plerumque has series ad plurimos terminos continuare licet, id quod nonnullis exemplis ostendisse juvabit.

Evolutio solutionum
ex casu $n = 4$ oriundarum.

§. 25. Hoc ergo casu erit $v' = \frac{z(z + 8)}{2z + 4} - v$ manente $z' = 2v - z$. In hujus evolutione statim a casu quinto qu

$v = \infty$ incipiamus, quoniam mox videbimus, in eo reliquos quatuor casus omnes comprehendi. Quoniam igitur pro hoc casu vidimus esse $z = \frac{-n}{2}$ et sequens $v = \frac{4 - nn}{3n}$, series harum litterarum sequenti modo se habebit:

$v = \infty$;	$z = -2$	$v = +\frac{17}{3}$;	$z = -\frac{14}{3}$
$v = -1$;	$z = 0$	$v = -\frac{11}{4}$;	$z = -\frac{5}{6}$
$v = +1$;	$z = +2$	$v = +\frac{4}{21}$;	$z = +\frac{17}{14}$
$v = \frac{3}{2}$;	$z = +1$	$v = +\frac{31}{20}$;	$z = +\frac{66}{35}$
$v = 0$;	$z = -1$	$v = +\frac{101}{119}$;	$z = -\frac{16}{85}$
$v = -\frac{7}{2}$;	$z = -6$	$v = -\frac{69}{55}$;	$z = -\frac{434}{187}$
$v = +5$;	$z = +16$	$v = +\frac{741}{34}$;	etc.

§. 26. Hinc jam ex quovis valore v cum proximo z conjuncto (perinde enim est, sive cum praecedente sive cum sequente conjungatur) solutio nostrae quaestionis deduci potest, cum sit

$$\frac{p}{r} = v \quad \text{et} \quad \frac{q}{r} = v - z,$$

hincque porro ob $\sqrt{n} = 2$ erit

$$\frac{a}{b} = \frac{4rs}{pp - qq} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{2rs}{pq}.$$

Ita sumto $v = \frac{4}{21}$, cui respondet $z = \frac{-5}{6}$ fiet $z - v = \frac{43}{42}$. Hinc ergo erit $\frac{p}{r} = \frac{4}{21}$ et $\frac{q}{r} = \frac{43}{42}$. Sumto ergo $r = 42$ erit $p = 8$ et $q = s = 43$. Ex his valoribus denique colligitur $\frac{a}{b} = \frac{8 \cdot 43}{5 \cdot 17}$ et $\frac{x}{y} = \frac{21}{2}$, quocirca erit

$$a = 8 \cdot 43; \quad b = 5 \cdot 17; \quad x = 21; \quad y = 2.$$

Hinc erit $ax = 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 43$ et $by = 2 \cdot 5 \cdot 17$, qui factorem communem habent 2. Posito ergo

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = AB \quad \text{et} \quad 5 \cdot 17 = AA - BB,$$

sumtoque $A = 43$ et $B = 42$ fiet $AA - BB = 5 \cdot 17$ uti requiritur, ex quo erit $\sqrt{aa\,xx + bb\,yy} = 2(43^2 + 42^2) = 7226$

quem numerum supra vocavimus z. Simili modo erit $ay = 16 . 43$ et $bx = 3 . 5 . 7 . 17$, atque hic habebimus

$$AB = 8 . 43 \quad \text{et} \quad A^2 - B^2 = 3 . 5 . 7 . 17.$$

Sumto ergo $A = 43$ et $B = 8$ erit $A^2 - B^2 = 35 . 51$ quamobrem erit $\sqrt{aayy + bbxx} = 1913$, quem numerum supra indicavimus littera v ita ut v et z innotescunt. Ceterum quia in serie litterarum z et v inventa occurrunt valores $v = 0$ et $z = 0$ evidens est, omnes quatuor priores casus in illa involvi.

Evolutio solutionum,

ex casu $n = \frac{1}{4}$ oriundorum.

§. 27. Hoc ergo casu erit $v' = \frac{2z(2z+1)}{8z+1} - v$ manente $z' = 2v - z$. Pro hoc jam omnes quinque casus supra constitutos percurramus:

I.	II.	III.	IV.	V.
$v = 0$	$v = 0$	$v = \infty$	$z = 0$	$z = 0$
$z = 1$	$z = -1$	$z = -\frac{1}{8}$	$v = 1$	$v = -1$
$v = \frac{2}{3}$	$v = -\frac{2}{7}$	$v = \frac{21}{4}$	$z = 2$	$z = -2$
$z = \frac{1}{3}$	$z = +\frac{3}{7}$	$z = \frac{85}{8}$	$v = \frac{3}{17}$	$v = +\frac{1}{5}$
$v = -\frac{4}{11}$	$v = \frac{20}{31}$	$v = \frac{341}{32 . 43}$	$z = -\frac{28}{17}$	$z = \frac{12}{5}$
$z = -\frac{35}{33}$	$z = \frac{87}{7 . 31}$	$z = \frac{6969}{16 . 43}$	$v = -\frac{55}{69}$	$v = \frac{119}{101}$

evidens autem est, pro v valores inversos in praecedente casu comprehendi debere, quoniam permutatis litteris p et r loco n scribi debet $\frac{1}{n}$.

§. 28. Casum praecipuum quo $n = 1$, ideo hic non attingimus, quoniam in casu particulari tertio jam penitus est exhaustus. Ceterum, quia hoc casu $n = 1$ aequatio quadratica inter z

et v inventa evadit $(1+2z)vv - z(2+z)v + zz - 1 = 0$ sive $(1-v)zz - 2v(1-v)z + vv - 1 = 0$, quae aequatio cum divisorem habeat $v - 1$, evidens est, posito $v = 1$ valorem respondentem z arbitrio nostro relinqui.

§. 29. Coronidis loco problema multo magis arduum hic subjungamus, quod vix aggredi ausus fuissem, nisi praeter omnem exspectationem solutio particularis tertia ejus solutionem suppeditasset.

Problema.

Invenire quatuor numeros quadratos, aa, bb, cc, dd, ejus indolis, ut productum ex binis quibusvis, una cum producto binorum reliquorum faciat quadratum, sive ut istae tres formulae evadant quadrata:

$$aabb + ccdd = \Box$$
$$aacc + bbdd = \Box$$
$$aadd + bbcc = \Box.$$

Solutio.

§. 30. Solutio particularis tertia pro litteris a, b, x, y, hos nobis suppeditavit valores:

$$a = (t - u)(t + 3u); \quad b = 2(tt + 3uu);$$
$$x = (t + u)(t - 3u); \quad y = 4tu;$$

ubi formula pro x inventa ita similis est illi pro a inventae, ut sumto u negativo altera in alteram vertatur. Quare cum sit

$$bbxx + aayy = \Box,$$

permutatis a et x etiam haec formula $aabb + xxyy$ erit quadratum cum ex conditione problematis jam hae duae formulae:

$$aaxx + bbyy \quad \text{et} \quad aayy + bbxx$$

sint quadrata, sicque omnes has quatuor litteras a, b, x, y, inter se permutare licet. Quare nil aliud opus est nisi ut loco x et y scribamus c et d, atque solutio hujus problematis maxime generalis sequentibus formulis satis simplicibus continetur:

$$a = 4tu;\quad b = 2(tt + 3uu);\quad c = (t - u)(t + 3u);$$
$$d = (t + u)(t - 3u),$$

ubi pro litteris t et u numeros quoscunque pro lubitu accipere licet.

§. 31. Hinc simplicissimus casus orietur sumendo $t = 2$ et $u = 1$; tum enim fiet

$$a = 8;\quad b = 14;\quad c = 5;\quad d = 3.$$

Ceterum omnes solutiones in solutione particulari allatae aeque satisfaciunt quos in sequenti tabula iterum ob oculos ponamus:

t	2	1	4	1	4	5	2	5	4
u	1	2	1	4	3	2	5	4	5
a	8	8	16	16	48	40	40	80	80
b	14	26	38	98	86	74	158	146	182
c	5	7	21	39	13	33	51	17	19
d	3	15	5	55	35	7	91	63	99

Solutio succinctior.

§. 32. Quaerantur duo numeri f et g, ut sit $ff + 3gg = hh$, quod fit, uti vidimus $f = tt - 3uu$, $g = 2tu$, tum enim erit $h = tt + 3uu$, hincque quatuor numeri quaesiti erunt

$$a = 2g;\quad b = 2h;\quad c = f + g;\quad d = f - g,$$

ex his porro valoribus reperitur:

$$\sqrt{aabb + ccdd} = ff + 7gg,$$
$$\sqrt{aacc + bbdd} = 2(ff - fg + 2gg),$$
$$\sqrt{aadd + bbcc} = 2(ff + fg + 2gg).$$

Hinc patet, in hac solutione semper fore $c - d = a$. Quoniam vero haec solutio quasi praeter omnem expectationem sponte ex praecedentibus se obtulit solutionem directam adjungamus.

Solutio directa.

§. 33. Cum facta divisione per primum terminum hae tres formulae quadrata esse debeant:

$$1^{\circ})\ 1+\frac{cc\,dd}{aa\,bb}=\square;\quad 2^{\circ})\ 1+\frac{bb\,dd}{aa\,cc}=\square;\quad 3^{\circ})\ 1+\frac{bb\,cc}{aa\,dd}=\square,$$

ponatur

$$\frac{cd}{ab}=\frac{pp-qq}{2pq}=\mathrm{P};\quad \frac{bd}{ac}=\frac{rr-ss}{2rs}=\mathrm{R}\ \text{et}\ \frac{bc}{ad}=\frac{tt-uu}{2tu}=\mathrm{T}.$$

Ex his positionibus jam colligitur

$$\frac{d}{a}=\sqrt{\mathrm{PR}};\quad \frac{c}{a}=\sqrt{\mathrm{PT}};\quad \frac{b}{a}=\sqrt{\mathrm{RT}};$$

quare ad solutionem inveniendam quaeri debent tres hujusmodi formulae P, R, T, ut producta ex binis sint quadrata. Tum enim facile numeri quaesiti a, b, c, d, in integris definientur. Tales autem numeri obtinentur, sumendo

$$p=4fg,\quad q=ff+3gg;\quad r=ff+2fg-3gg,$$
$$s=ff+3gg;\quad t=ff-2fg-3gg;\quad u=ff+3gg,$$

tum enim solutio supra data orietur, id quod nonnullis exemplis illustremus.

Exemplum 1.

§. 34. Sumatur $p=6$; $r=5$; $t=8$;
$q=1$; $s=2$; $u=7$,

ex his igitur erit $\mathrm{P}=\frac{5\cdot 7}{4\cdot 3}$; $\mathrm{R}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}$; $\mathrm{T}=\frac{3\cdot 5}{16\cdot 7}$ unde porro colligitur $\sqrt{\mathrm{PR}}=\frac{7}{4}=\frac{d}{a}$; tum vero

$$\sqrt{\mathrm{PT}}=\frac{5}{8}=\frac{c}{a},\ \text{denique}\ \sqrt{\mathrm{RT}}=\frac{3}{8}=\frac{b}{a}.$$

Quamobrem si sumamus $a=8$ erit $b=3$, $c=5$, $d=14$, quae est solutio simplicissima jam supra eruta.

Exemplum 2.

§. 35. Sumatur $p = 6$; $r = 8$; $t = 27$;
$q = 5$; $s = 3$; $u = 22$,

unde fit $P = \frac{11}{4 \cdot 3 \cdot 5}$; $R = \frac{5 \cdot 11}{16 \cdot 3}$; $T = \frac{5 \cdot 7^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 11}$ hinc porro sequitur fore $\sqrt{PR} = \frac{11}{24} = \frac{d}{a}$, $\sqrt{PT} = \frac{7}{36} = \frac{c}{a}$ et $\sqrt{RT} = \frac{35}{72} = \frac{b}{a}$. Sumto ergo $a = 72$ erit $b = 35$; $c = 14$; $d = 33$, qui valores prorsus discrepant ab iis quas praecedens methodus suppeditavit, unde patet superiorem solutionem non esse generalem sed innumeras alias praeterea solutiones locum habere posse, ad quas inveniendas methodus requiritur idoneos valores pro tribus formulis P, R, T, in genere investigandi, quod negotium aliis evolvendum relinquo.