RESOLUTIO FACILIS QUAESTIONIS DIFFICILLIMAE

QUA HAEC FORMULA MAXIME GENERALIS:

$$vvzz(axx+byy)^2+\Delta xxyy(avv+bzz)^2$$

AD QUADRATUM REDUCI POSTULATUR.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 12. Junii 1780.

§. 1. Etsi hic quatuor litterae incognitae x, y, z, v occurrunt, quae tamen ad duas tantum rationes $x:y$ et $v:z$ revocantur, neutra tamen earum pro cognita assumi potest, cum saepissime reductio ad quadratum fieret impossibilis; quam ob rem tota quaestio huc reducitur, ut ambae istae rationes exquirantur, quibus formula ad quadratum reduci queat; tum vero imprimis omnes plane solutiones requiruntur, quod quomodo fieri sine ambagibus possit in hac dissertatione novo plane modo ostendere constitui. Notandum autem hic est a, b, Δ arbitrio nostro plane esse relictas.

§. 2. Ante omnia autem hic observandum est, nullam plane viam patere, qua quaesito satisfieri queat, nisi litterae v et z ita definiantur, ut formula $avv+bzz$ divisorem involvat formulam $axx+byy$, quod quomodo in genere fieri possit in sequenti Lemmate sum ostensurus.

Lemma.

Invenire valores pro litteris v *et* z, *ut formula* $avv+bzz$ *divisionem admittat per formulam* $axx+byy$.

Solutio:

§. 3. Multiplicetur utraque formula per a, ut utriusque factores simplices sint $av \pm z\sqrt{-ab}$ et $ax \pm y\sqrt{-ab}$. Jam ponatur $av + z\sqrt{-ab} = (ax + y\sqrt{-ab})(f + g\sqrt{-ab})$ factaque evolutione partes rationales et irrationales seorsim inter se adjecimus, ac pro partibus rationalibus habebimus $av = afx - abgy$ ideoque $v = fx - bgy$. Pro partibus autem irrationalibus fiet $z = fy + agx$. Quamobrem si statuamus $v = fx - bgy$ et $z = fy + agx$, fiet

$$avv + bzz = (ff + abgg)(axx + byy).$$

§. 4. Praemisso hoc lemmate, resolutionem quaestionis propositae sequenti problemate complectamur:

Problema.

Invenire omnes valores litterarum x, y, v, z, *quibus haec formula:* $vvzz(axx + byy)^2 + \Delta xxyy(avv + bzz)^2$ *evadat quadratum.*

Solutio:

§. 5. Vi lemmatis praemissi statuamus $v = fx - bgy$ et $z = fy + agx$, et quoniam nunc formula proposita divisionem per quadratum $(axx + byy)^2$ admittit, supererit ut facta divisione ad quadratum reducatur ista formula:

$$vvzz + \Delta xxyy(ff + abgg)^2.$$

Est vero $vz = afgxx + (ff - abgg)xy - bfgyy$, sicque quadratum reddi debebit haec expressio:

$$(afgxx + (ff - abgg)xy - bfgyy)^2 + \Delta xxyy(ff + abgg)^2,$$

quae quo simplicior reddatur, dividatur utrinque per quadratum $(ff + abgg)^2$, ac ponatur brev. gr.

$$\frac{afg}{ff + abgg} = A;\ -\frac{bfg}{ff + abgg} = B \text{ et } \frac{ff - abgg}{ff + abgg} = C$$

hocque modo quadrato aequanda erit ista formula

$$(Axx + Cxy + Byy)^2 + \Delta xxyy.$$

§. 6. Quo hoc concinnius fieri possit loco Δ scribamus $-4mn$, ut istam habeamus formulam:

$$(Axx + Cxy + Byy)^2 - 4mnxxyy = \square$$

quod praestabitur, uti constat, statuendo

$$Axx + Cxy + Byy = \lambda(mpp + nqq) \text{ et } xy = \lambda pq;$$

tum enim formula nostra aequabitur huic quadrato: $\lambda\lambda(mpp - nqq)^2$. Jam nihil impedit quominus statuamus $y = 1$, cum hic tantum ratio inter x et y spectetur. Tum igitur erit $x = \lambda pq$ atque altera aequatio fiet $A\lambda\lambda ppqq + C\lambda pq + B = \lambda mpp + \lambda nqq$, quae est aequatio quadratica tam respectu litterae p quam ipsius q, ideoque pro utraque binos valores simul exhibebit.

§. 7. Ordinemus ergo primo aequationem respectu litterae p, quae erit

$$(A\lambda\lambda qq - \lambda m)pp + C\lambda pq + B - \lambda nqq = 0;$$

unde patet, si pro quolibet ipsius q valore binae radices ipsius p sint p et p', fore $p + p' = -\frac{C\lambda q}{A\lambda\lambda qq - \lambda m} = \frac{Cq}{m - A\lambda qq}$. Simili modo aequatio respectu literae q disposita fiet:

$$(A\lambda\lambda pp - \lambda n)qq + C\lambda pq + B - \lambda mpp = 0,$$

ita ut, si pro quolibet p valores ipsius q statuantur q et q', fiet $q + q' = \frac{Cp}{n - A\lambda pp}$. Unde intelligitur, dummodo pro p et q binos habeamus valores idoneos, ex iis ope harum formularum innumerabiles alios erui posse, quemadmodum jam fusius ostendi.

§. 8. At vero facillime ex ipsa aequatione quadratica tales valores elici possunt. Posito enim $p = 0$ fit $qq = \frac{B}{\lambda n}$; quod si ergo sumamus $\lambda = Bn$, fiet $q = \frac{1}{n}$, hicque casus solus sufficit, ex quo innumerabiles alii erui poterunt. Quamobrem sit ubique $\lambda = Bn$, et fiat $x = Bnpq$; tum igitur constituamus hanc seriem: p, q, p', q', p'' etc. ubi ergo bini termini initiales erunt $p = 0$ et $q = \frac{1}{n}$, hincque per has formulas, ob $\lambda = Bn$, sequentes termini successive ita de-

terminabuntur:

$$p' = \frac{Cq}{m - AB\,nqq} - p = \frac{C}{mn - AB}$$

$$q' = \frac{Cp}{n - AB\,npp} - q = \frac{mnC^2 - (mn - AB)^2}{n(mn - AB)^2 - nABCC}$$

etc.

quae progressio, quando omnes litterae per numeros determinatos dantur, haud difficulter ulterius continuari poterit.

§. 9. Isti valores evoluti pro $x = Bnpq$ sequentes praebent:

$$0,\ \frac{BC}{mn - AB};\ \frac{BC(mnC^2 - (mn - AB^2))}{(mn - AB)^3 - ABC^2(mn - AB)}$$

qui singuli jam innumerabiles solutiones complectuntur, quoniam litteris p' et q' valores quoscunque tribuere licet. Deinde etiam quilibet horum valorum adhuc alium suppeditat. Nam quia aequatio ita est comparata, ut posito $x = \frac{1}{t}$ abeat in hanc:

$$(A + Ct + Btt)^2 - 4mnt\,t = \square,$$

haec a priore in hoc tantum discrepat, quod litterae A et B sint permutatae, unde facta hac permutatione singuli valores pro x inventi dabunt totidem valores pro t, qui ergo inversi novos valores pro x praebent. Ita cum sit $x = \frac{BC}{mn - AB}$, erit $t = \frac{AC}{mn - AB}$; ideoque novus valor erit $\frac{mn - AB}{AC}$, quod idem de omnibus reliquis valoribus pro x inventis est tenendum.

§. 10. Postquam pro x inventa fuerit fractio quaecunque $\frac{M}{N}$, quia sumsimus $y = 1$, ut ad numeros integros revertamur capi oportebit $x = M$ et $y = N$, unde porro colligetur $v = fM - bgN$ et $z = fN + agM$. Hoc ergo modo problemati plene erit satisfactum, cum adeo infinities infinitos valores satisfacientes assignare liceat.

Exemplum.

§. 11. Proposita sit haec formula ad quadratum redigenda:

$$vvzz(xx + yy)^2 + xxyy(vv + zz)^2.$$

Hic igitur erit $a = 1$, $b = 1$ et $\Delta = 1 = -4mn$, unde sum poterit $m = \frac{1}{2}$ et $n = -\frac{1}{2}$. Ex his valoribus fiet

$$A = \frac{fg}{ff+gg}; \quad B = \frac{fg}{ff+gg}; \quad C = \frac{ff-gg}{ff+gg}.$$

Hinc ergo valores supra evoluti erunt $0, \frac{fg(ff-gg)}{ff\,gg-(ff+gg)^2}$. Suma mus igitur $f = 2$ et $g = 1$, erit $x = \frac{2}{3}$; quamobrem ponamu $x = 8$ et $y = 3$, fietque $v = 13$ et $z = 14$. Cum igitur sit $vz = 182$ $xx + yy = 73$, $xy = 24$, $vv + zz = 205 = 5.73$, quadratum ess debet $182^2.73^2 + 24^2.5^2.73^2$, dividendo ergo per $2^2.73^2$ repe rietur $91^2 + 12^2.5^2 = 109^2$.

§. 12. Quaestio proposita adhuc generalior reddi similiqu modo resolvi posset, si proponeretur ad quadratum reducenda hae formula:

$$vvzz(axx + 2bxy + czz)^2 + \Delta xxyy(avv + 2bvz + czz)^2,$$

quae autem, ob id ipsum quod b non nihilum, nulla plane labora difficultate. Sumi enim adeo possunt ambae litterae v et z pro lu bitu, et facta evolutione prodibit talis forma:

$$A^2x^4 + 2Bx^3y + Cxxyy + 2Dxy^3 + E^2y^4,$$

cujus resolutio adeo methodo vulgari expediri potest.

§. 13. Interim tamen si similis solutio desideretur, qua perinde locum habere queat, sive b sit 0 sive minus, talis solut pari modo succedet ut ante, si modo sequens Lemma in subsidiu vocetur.

Lemma.

Invenire idoneos valores pro litteris v *et* z *ut ista formula* avv + 2bvz + czz *divisibilis evadat per hanc:* axx + 2bxy + cyy

Solutio.

§. 14. Multiplicetur utraque formula per a, ut utriusque fa tores simplices sint $av + bz \pm z\sqrt{bb-ac}$ et $ax + by \pm y\sqrt{bb-ac}$

norum ergo ille per hunc divisibilis reddi debet. Hunc in finem statuatur

$$(av + bz + z\sqrt{bb - ac}) = (ax + by + y\sqrt{bb - ac})(f + g\sqrt{bb - ac});$$

tum vero facta evolutione partes rationales et irrationales seorsim inter esse aequentur, unde pro rationalibus reperietur

$$av + bz = afx + bfy + gy(bb - ac).$$

Pro irrationalibus autem erit $z = agx + bgy + fy$, qui valor in praecedente substitutus dat $v = (f - bg)x - cgy$, quibus valoribus loco z et v introductis formula proposita $avv + 2bvz + czz$ aequabitur huic producto:

$$(qxx + 2bxy + cyy)(ff + (ac - bb)gg)$$

atque nunc totus calculus ut ante expediri poterit.