DE TRIBUS
PLURIBUSVE NUMERIS INVENIENDIS, QUORUM SUMMA SIT QUADRATUM, QUADRATORUM VERO SUMMA BIQUADRATUM.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibit. die 18. Mai 1780.

§. 1.

Celebre est et nuper ab illustri *Lagrange* singulari studio pertractatum problema a *Fermatio* olim propositum, quo quaeruntur duo numeri integri, positivi, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum. Hinc occasionem arripui istam quaestionem ad tres pluresve numeros extendendi, certa spe fretus, ejus solutionem sine tantis ambagibus expediri posse. Postquam autem rem tentassem, mox deprehendi easdem difficultates, quibus ipsum problema *Fermatianum* involvitur. Tandem vero omnia haec obstacula feliciter superavi atque adeo satis modicos numeros, quaestioni satisfacientes sum adeptus; dum minimi numeri problematis *Fermatiani* ultra billionem ascendunt. Istam igitur methodum, qua sum usus, hic propositurus ero, postquam scilicet prima tentamina, longissimos calculos minantia, in medium attulero.

§. 2. Sint x, y, z tres numeri positivi, quorum summa debeat esse $= A^2$, quadratorum vero summa $xx + yy + zz = B^4$.

atque ob numeros positivos statim patet esse debere $A^4 > B^4$ ideoque $A > B$, propterea quod A^4 praeter ipsa quadrata xx, yy, zz insuper duplicia producta ex binis complectitur. Cum igitur sit $x = A^2 - y - z$, posui $y + z = p$ et $y - z = q$, unde fit $yy + zz = \frac{pp+qq}{2}$. Quia ergo habemus $x = A^2 - p$, aequatio secunda dabit

$$A^4 - 2A^2p + pp + \frac{pp+qq}{2} = B^4,$$

unde deducimus $qq = 2(B^4 - A^4) + 4A^2p - 3pp$, quae formula nullo modo quadratum reddi potest, nisi constet unicus saltem casus, quo hoc eveniat.

§. 3. Quod si formula $2B^4 - 2A^4$ evadere posset quadratum, res nulla laboraret difficultate. Retum, quod autem est impossibile, relinquitur igitur casus, ubi $2B^4 - A^4$ fit quadratum, puta $= CC$; tum enim erit $qq = CC - A^4 + 4A^2p - 3pp$, quae forma, reducta ad $qq = CC - (AA - p)(AA - 3p)$, statim praebet hanc positionem: $q = C - v(AA - p)$, qua evoluta reperitur

$$p = -\frac{2Cv + AA(1 + vv)}{3 + vv},$$

hocque valore substituto prodit $q = \frac{3C - 2AAv - Cvv}{3 + vv}$.

§. 4. Cum autem hic ante omnia binis litteris A et B ejusmodi valores tribui debeant ut fiat $2B^4 - A^4 = CC$, hoc modo ad ipsum problema *Fermatianum* revolvimur. Quare, cum tales valores non nisi in maximis numeris exhiberi queant, nulla plane spes affulget, hujus methodi ope ad solutiones in modicis numeris perveniendi. — Alia igitur nobis ineunda erit via hujusmodi quaestiones tractandi, quae a tantis difficultatibus sit immunis. Talis autem via se mihi optimo successu obtulit, cujus vis quo melius perspiciatur, ab ipso problemate *Fermatiano* inchoabo.

Problema I.

Invenire duos numeros, integros, positivos, x *et* y, *quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum.*

Solutio:

§. 5. Incipiamus a posteriore conditione. Ac primo quidem formula $xx + yy$ reddetur quadratum, ponendo $x = aa - bb$ et $y = 2ab$; tum enim erit $xx + yy = (aa + bb)^2$. Insuper igitur haec formula $aa + bb$ quadratum reddi debet, quod pari modo fiet ponendo $a = pp - qq$ et $b = 2pq$: hoc enim modo proveniet $xx + yy = (pp + qq)^4$, sicque posteriori conditioni jam plene est satisfactum. Tantum igitur superest ut priori conditioni, qua $x + y$ quadratum effici debet, satisfiat.

§. 6. Ex factis igitur positionibus reperitur

$$x = aa - bb = p^4 - 6ppqq + q^4 \text{ et } y = 4p^3q - 4pq^3;$$

quamobrem sequens formula quarti gradus ad quadratum reduci debet $p^4 + 4p^3q - 6ppqq - 4pq^3 + q^4$, pro quo efficiendo praenotandum est, binos numeros p et q esse debere positivos. Deinde etiam necesse est, ut sit $p > q$, quia aliter numerus y fieret negativus. Denique etiam requiritur, ut fiat $a > b$, ut pro x prodeat numerus positivus.

§. 7. Formula autem inventa resolvetur ponendo ejus radicem $= \sqrt{x + y} = pp - 2pq + qq$, unde colligitur $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, sive $p = 3$ et $q = 2$, qui ergo numeri jam sunt positivi, et $p > q$. Quia autem hinc fit $a = 5$ et $b = 12$, pro x resultat valor negativus, rejiciendus. Hanc ob rem secundum praecepta cognita novam operationem institui oportebit, quem in finem maneat $q = 2$ at vero statuamus $p = 3 + v$, unde sequentes valores deducimus:

$$\begin{aligned}
p^4 &= 81 + 108v + 54vv + 12v^3 + v^4,\\
4p^3q &= 216 + 216v + 72vv + 8v^3,\\
6p^2q^2 &= 216 + 144v + 24vv,\\
4pq^3 &= 96 + 32v,\\
q^4 &= 16.
\end{aligned}$$

quibus collectis formula supra data hanc formam induit:

$$1 + 148\,v + 102\,vv + 20\,v^3 + v^4 = x + y,$$

cujus radix, si statuatur $\sqrt{x+y} = 1 + 74\,v - vv$, perducit ad hanc aequationem: $1343 = 42v$, sive $v = \frac{1343}{42}$; unde fit $p = 3 + v = \frac{1469}{42}$, existente $q = 2$. Hae ergo litterae ad numeros integros perductae fient $p = 1469$ et $q = 84$. Ex his porro colligitur $a = 1385.1553$ et $b = 168.1469$, sive $a = 2150905$ et $b = 246792$. Unde manifestum est ob $a > b$ etiam ipsos numeros x et y ambos prodituros esse positivos, qui, etsi adeo billionem excedant, tamen sunt minimi problemati satisfacientes: Hi numeri autem sunt $x = 4,565,486,027,761$

$y = 1,061,652,293,520$

qui sunt iidem, quos *Fermatius*, aliique post eum, invenerunt. Eorum summa est quadratum numeri 2,372,159, quadratorum vero summa est biquadratum numeri 2,165,017.

Problema II.

Invenire tres numeros, integros, positivos x, y, z, *quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum.*

Solutio:

§. 8. Incipiamus iterum a summa quadratorum, quae primo quadratum reddatur, ponendo $x = aa + bb - cc$; $y = 2\,ac$; $z = 2\,bc$; sic enim fiet $xx + yy + zz = (aa + bb + cc)^2$; ubi ergo $aa + bb + cc$ denuo quadratum effici debet, quod fiet ponendo simili modo $a = pp + qq - rr$; $b = 2\,pr$; $c = 2\,qr$; sic enim obtinebitur $xx + yy + zz = (pp + qq + rr)^4$; ita ut posterior conditio jam sit adimpleta.

§. 9. Exprimamus nunc ipsas litteras x, y, z per p, q, r, eritque:

$$x = p^4 + q^4 + r^4 + 2ppqq + 2pprr - 6qqrr,$$
$$y = 4qr(pp + qq - rr),$$
$$z = 8pqrr.$$

Hinc ergo erit:

$$x + y + z = p^4 + q^4 + r^4 + 2ppqq + 2pprr - 6qqrr + 4ppqr + 4q^3r - 4qr^3 + 8pqrr,$$

quae forma primum secundum potestates ipsius p disposita ita se habet:

$$x + y + z = p^4 + 2(q + r)^2pp + 8pqrr + q^4 + 4q^3r - 6qqrr - 4qr^3 + r^4,$$

quam ita quadratum reddi oportet, ut singulae litterae p, q, r, fiant positivae, simulque sit $pp + qq > rr$. Praeterea vero etiam necesse est ut valores litterarum a, b, c ita sint comparati, ut fiat $aa + bb > cc$.

§. 10. Quia in hac formula potestas tertia ipsius p deest, radix statui poterit $pp + (q + r)^2$. Sic enim tam potestas quarta quam secunda tolletur, et ex residuis terminis definiri poterit $p = \frac{3}{2}q + r$, qui valor, ob simplicitatem ejus, solutiones multo concinniores pollicetur, quam in praecedente problemate obtinuimus. Sumto autem $p = \frac{3}{2}q + r$ erit $a = \frac{13}{4}qq + 3qr$; $b = 3qr + 2rr$; $c = 2qr$; ubi jam ambas litteras q et r pro lubitu assumere licet.

Exemplum 1.

§. 11. Sumamus $q = 2$ et $r = 1$, ut fiat $p = 4$, tum prodibit $a = 19$; $b = 8$; $c = 4$; unde ipsi numeri quaesiti deducuntur, qui erunt $x = 409$; $y = 152$; $z = 64$. Horum numerorum summa est $x + y + z = 625 = 25^2$; quadratorum vero summa $x^2 + y^2 + z^2 = 194481 = 441^2 = 21^4$.

Exemplum 2.

§. 12. Maneat $q = 2$ et sumatur etiam $r = 2$, fietque $p = 5$; tum vero erit $a = 25$; $b = 20$; $c = 8$. Hinc ipsi numeri quaestioni satisfacientes erunt

$$x = 961\,;\quad y = 400\,;\quad z = 320,$$

quorum summa est $x + y + z = 1681 = 41^2$ et summa quadratorum $x^2 + y^2 + z^2 = 1185921 = 33^4$.

Alia solutio problematis.

§. 13. Cum ante formulam biquadraticam secundum posestates ipsius p coordinaverimus, nunc eam secundum ordinem potestatum litterae q disponemus, quo facto erit $x + y + z =$

$$p^4 + 4q^3r + 2\,(pp - 3\,rr)\,qq + 4r\,(pp + 2pr - rr)\,q + (pp + rr)^2$$

cujus radix, ut bini priores termini cum ultimo tollantur, statui debet $qq + 2\,qr - pp - rr$; unde evolutione facta colligitur

$$q = \frac{2pr\,(p + r)}{2rr - pp}$$

Exemplum.

§. 14. Sumatur $p = 1$ et $r = 1$, ut fiat $q = 4$, hincque colligitur $a = 16$; $b = 2$; $c = 8$, sive per 2 deprimendo $a = 8$; $b = 1$; $c = 4$; unde porro erit $x = 49$; $y = 64$; $z = 8$. Hinc fi

$$x + y + z = 11^2 \text{ et } xx + yy + zz = 9^4.$$

Isti numeri sine dubio sunt simplicissimi problemati satisfacientes.

Problema III.

Invenire quatuor numeros x, y, z, v, *quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum.*

Solutio:

§. 15. Ut primo summa quadratorum reddatur quadratum capiatur $x = aa + bb + cc - dd$; $y = 2ad$; $z = 2bd$; $v = 2cd$. Sic enim quadratorum summa fiet $(aa + bb + cc + dd)^2$, cujus radix denuo quadratum reddetur, ponendo $a = pp + qq + rr - ss$; $b = 2ps$; $c = 2qs$; $d = 2rs$. Ne jam calculus, ob termino rum multitudinem, nimis prolixus evadat, ponamus brevitatis gratia $qq + rr + ss = A$, ut habeamus $a = pp + A$. Hinc jam sequitur fore $x = p^4 + 2App + A^2 + 4p^2s^2 + 4q^2s^2 - 4r^2s^2$; $y = 4rspp + 4Ars$; $z = 8prss$ et $v = 8qrss$.

§. 16. Jam summa numerorum quaesitorum, secundum potestates ipsius p disposita, erit

$$p^4 + 2(A + 2ss + 2rs)p^2 + 8prss + A^2 + 4qqss - 4rrss + 4Ars + 8qrss,$$

quae cum debeat esse quadratum, ejus radix statuatur

$$pp + (A + 2ss + 2rs);$$

unde facta substitutione prodibit ista aequatio:

$$2pr + qq + 2qr - 2rr - ss - 2rs - A = 0.$$

Restituto igitur loco A valore assumto habebimus $p = s + \frac{3}{2}r - q$, ubi jam litterae q, r, s, pro lubitu assumi possunt. Evolvamus aliquot casus, sumtisque pro q, r, s, valoribus positivis tantum cavendum est ne valor ipsius x fiat negativus, quod facile evitabitur dummodo q non nimis magnum capiatur.

Exemplum 1.

§. 17. Sumatur $r = 2$, $q = 1$ et $s = 1$, eritque $p = 3$; unde porro fit $a = 13$; $b = 6$; $c = 2$; $d = 4$, atque hinc colliguntur ipsi numeri quaesiti $x = 193$; $y = 104$; $z = 48$; $v = 16$, quorum summa est $x + y + z + v = 361 = 19^2$; summa vero quadratorum erit $xx + yy + zz + vv = (pp + qq + rr + ss)^4 = 15^4$.

Exemplum 2.

§. 18. Maneat $r = 2$, sumatur autem $s = 1$ et $q = 2$, eritque $p = 2$, unde colligitur fore $a = 11$; $b = 4$; $c = 4$; $d = 4$; hincque $x = 137$; $y = 88$; $z = 32$; $v = 32$, quorum summa $x + y + z + v = 289 = 17^2$, quadratorum vero summa

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 13^4.$$

Exemplum 3.

§. 19. Manente $r = 2$ sit $s = 1$ et $q = 3$, erit $p = 1$. Hinc valores litterarum a, b, c, d, erunt $a = 13$; $b = 2$; $c = 6$; $d = 4$; unde porro fit $x = 193$; $y = 104$; $z = 16$; $v = 48$, sicque ipsum exemplum 1 recurrit.

Hoc modo plurima talia exempla facili negotio expediri possunt.

Problema IV.

Invenire quinque numeros integros positivos x, y, z, v, w, *quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum.*

Solutio:

§. 20. Ut quadratorum summa fiat quadratum, sumatur $x = aa + bb + cc + dd - ee$; $y = 2ae$; $z = 2be$; $v = 2ce$; $w = 2de$. Ut vero prodeat biquadratum, statuatur porro $a = pp + qq + rr + ss - tt$; $b = 2pt$; $c = 2qt$; $d = 2rt$; $e = 2st$; at br. gr. ponatur $qq + rr + ss - tt = \mathrm{A}$, ut sit $a = pp + \mathrm{A}$, atque hinc sequitur fore
$x = p^4 + 2\mathrm{A}pp + \mathrm{A}^2 + 4pptt + 4qqtt + 4rrtt - 4sstt$;
$y = 4stpp + 4\mathrm{A}st$; $z = 8pstt$; $v = 8qstt$; $w = 8rstt$.

§. 21. Summa jam numerorum quaesitorum, secundum potestates ipsius p disposita, est:

$$p^4 + 2pp(\mathrm{A} + 2tt + 2st) + 8pstt + \mathrm{AA} + 4qqtt + 4rrtt - 4sstt + 4\mathrm{A}st + 8qstt + 8rstt,$$

cujus radix statuatur $pp + \mathrm{A} + 2st + 2tt$; unde sumto quadrato resultat sequens aequatio:

$$2ps + qq + 2qs + rr + 2rs - 2ss - tt - 2st - \mathrm{A} = 0,$$

unde, loco A restituto suo valore, prodit $p = t + \frac{3}{2}s - r - q$; ubi jam quatuor habentur numeri pro arbitrio sumendi.

Exemplum.

§. 22. Sumatur $s = 2$; $t = 1$; $r = 1$; $q = 1$; eritque $p = 2$. Hinc ergo erit $a = 9$; $b = 4$; $c = 2$; $d = 2$; $e = 4$; ideoque numeri quaesiti erunt $x = 89$; $y = 72$; $z = 32$; $v = 16$; $w = 16$, quorum summa $x + y + z + v + w = 225 = 15^2$, quadratorum autem summa $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + w^2 = 11^4$.

Similique modo plura exempla satis simplicia ex nostris formulis derivari possunt.

Corollarium.

§. 23. Quod si valores pro litera p inventos consideremus et inter se comparemus, facile inde lex patescet, cujus ope ad plures numeros progredi licebit, namque:

Pro casu 3. invenimus $p = r + \frac{3}{2}q$,

4. $p = s + \frac{3}{2}r - q$,

5. $p = t + \frac{3}{2}s - r - q$,

sicque pro casu sex numerorum reperietur $p = u + \frac{3}{2}t - s - r - q$, et ita porro, unde quaestio generalis, pro quotcunque numeris proposita, jam perfecte soluta est censenda.

Scholion.

§. 24. Cum in exemplo primo problematis 2. summa ipsorum numerorum inventa sit 25^2, ideoque jam biquadratum, hinc formari potest nova quaestio, circa quotcunque numeros inveniendos, quorum tam summa quam quadratorum summa sint biquadrata; verum hanc quaestionem attentius consideranti mox patebit, quamlibet solutionem ante inventam etiam ad hanc conditionem accommodari posse. Quod si enim fuerit summa numerorum quotcunque $x + y + z + \text{etc.} = A^2$ et summa quadratorum $x^2 + y^2 + z^2 + \text{etc.} = B^4$, statuantur ipsi numeri quaesiti $A^2 x$; $A^2 y$; $A^2 z$; etc.; tum enim eorum summa erit $A^2 . A^2 = A^4$, ideoque biquadratum; quadratorum vero summa erit $A^4 . B^4$. Quia autem hoc modo numeri quaesiti communem inter se habent factorem, si ista conditio insuper praescribatur, ut numeri inveniendi sint inter se primi, sive nullum communem divisorem habeant; tum quaestio certe non parum ardua erit censenda. Interim tamen sequenti modo etiam tales quaestiones facile resolvi poterunt.

Problema V.

Invenire tres numeros positivos inter se primos x, y, z, *quorum tam summa quam quadratorum summa sint biquadrata.*

Solutio.

§. 25. Posito, uti in problemate secundo, $x = aa + bb - cc$; $y = 2ac$; $z = 2bc$, fiat porro $a = pp + qq - rr$; $b = 2pr$; $c = 2qr$ factaque substitutione statuatur ipsorum numerorum summae radix quadrata $= pp + (q + r)^2$, et cum supra invenerimus $p = r + \frac{3}{2} q$, necesse est ut ista expressio $pp + (q + r)^2$ denuo reddatur quadratum. Ejus ergo radix statuatur $p + \frac{f(q+r)}{g}$, hincque orietur ista aequatio: $gg(q + r) = 2fgp + ff(q + r)$.

§. 26. Scribatur nunc loco p valor inventus $r + \frac{3}{2} q$ et aequatio hanc induet formam: $(ff - gg)(q + r) + fg(2r + 3q) = 0$, unde deducitur $\frac{q}{r} = \frac{ff + 2fg - gg}{gg + 3fg - ff}$. Ecce ergo ista problematis solutio ita se habebit: Sumantur $q = ff + 2fg - gg$ et $r = gg - 3fg - ff$, eritque $p = \frac{1}{2} ff - \frac{1}{2} gg$, ex quibus valoribus primo litterae a, b, c, hincque porro ipsi numeri quaesiti x, y, z, infinitis modis formari poterunt.

§. 27. Sumatur ex. gr. $f = 1$ et $g = 3$, eritque $q = 2$; $r = 1$ et $p = 4$. Hinc ergo concludimus fore $a = 19$; $b = 8$; $c = 4$, unde numeri quaesiti erunt, $x = 409$; $y = 152$; $z = 63$, quorum summa est $x + y + z = 625 = 5^4$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 21^4$.

§. 28. Imprimis autem limites sunt investigandi, intra quos litteras f et g accipere liceat. Hunc in finem mutentur signa atque habebimus $q = gg - 2fg - ff$ et $r = ff + 3fg - gg$, quorum valorum ut prior fiat positivus, debet esse $\frac{g}{f} > 1 + \sqrt{2} > 2,414$; at ut r fiat positivum, fieri debet $\frac{g}{f} < \frac{3+\sqrt{13}}{2} < 3,303$. Sumatur ergo $f = 2$ et $g = 5$, eritque $q = 1$; $r = 9$; $p = \frac{21}{2}$, sive in integris $p = 21$; $q = 2$; $r = 18$; unde fit $a = 121$; $b = 756$; $c = 72$, hincque porro $x = 580993$; $y = 17424$; $z = 108864$, quorum summa $x + y + z = 29^4$, quadratorum vero summa

$$x^2 + y^2 + z^2 = 769^4.$$

§. 29. Simili igitur modo hanc quaestionem pro pluribus numeris quaesitis haud difficulter resolvere licebit; quamobrem huic argumento non amplius immoror; sufficiet enim methodum exposuisse omnia hujus generis problemata commode et expedite resolvendi.