INVESTIGATIO ACCURATIOR CIRCA BRACHYSTOCHRONAS

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 10. Julii 1780.

§. 1. Cum primum in Mechanicae meae tomo secundo hoc argumentum tractassem, incideram in hanc insignem proprietatem: quod, dum corpus super curva Brachystochrona descendit, pressio ex omnibus viribus sollicitantibus orta semper sit aequalis vi centrifugae atque in eandem plagam directa, ita ut ubique tota pressio, quam corpus descendens in curvam exserit, duplo major sit quam pressio a solis viribus sollicitantibus oriunda. Neque hanc proprietatem solum in hypothesi gravitatis naturalis, et quando corpus versus aliquod centrum virium fixum a viribus quibuscunque urgetur, locum habere deprehendi, sed etiam quando corpus ad duo pluravé puncta fixa a viribus quibuscunque sollicitatur. Quam ob rem non dubitavi istam proprietatem tanquam principium universale stabilire, cujus ope omnibus plane casibus Brachystochronae inveniri queant, neque opus sit ad methodum isoperimetricam recurrere.

§. 2. Ex hoc ipso igitur principio deinceps omnes quoque Brachystochronas in mediis resistentibus derivavi. Postquam autem theoriam isoperimetricam uberius essem perscrutatus, mox deprehendi, istud principium in medio resistente admitti non posse, neque tamen quisquam eorum, qui opus meum mechanicum omni studio sunt perscrutati, hunc defectum animadvertit, quem autem ipse in tractatu meo de isoperimetris feliciter emendavi, atque adeo veras Brachystochronas pro quovis medio resistente determinare docui.

§. 3. Interim tamen iste error, quem ingenue sum confessus, non est tam enormis, ut non quodammodo non solum excusari sed etiam cum veritate conciliari possit, si modo status quaestionis paulisper immutetur. Quod si enim non inter omnes plane curvas, quas a termino superiore ad inferiorem ducere licet sed inter eas tantum, super quibus corpus descendens eandem acquirit celeritatem (quarum numerus utique etiamnunc est infinitus), ea quaeratur, super qua corpus brevissimo tempore a puncto summo usque ad imum perveniat, tum omnes Brachystochronae a me assignatae et ex memorato principio derivatae veritati erunt consentaneae.

§. 4. Quo autem clarius appareat sub quibusnam conditionibus istud principium locum habeat, et quando deficiat, totam theoriam de Brachystochronis accuratius evolvere constitui. Observavi enim, etiamsi motus tantum in vacuo consideretur, tamen ejusmodi vires exhiberi posse, ad quas illud principium neutiquam accomodari possit; quamobrem hoc loco ab omni resistentia animum sum abstracturus, siquidem hoc argumentum in opusculo meo isoperimetrico jam satis prolixe est pertractatum. Quamobrem alias vires non sum contemplaturus, praeter tales quas vocavi *absolutas*, quarum actio a solo loco, in quo corpus versatur, pendet, neque ejus celeritas quicquam ad vires sollicitantes conferat.

§. 5. Haec autem tractatio ultro in duas partes dividitur, prouti totus corporis motus vel in eodem plano absolvitur, vel extra idem planum extravagatur. Pro hoc enim discrimine methodus Brachystochronas inveniendi prorsus diversa adhiberi debet, cum casu priore duae coordinatae, in calculum introducendae, sufficiant, posteriore vero casu necessario tres coordinatae requirantur, qui casus adeo prorsus est novus; neque cuiquam, quantum quidem memini, in mentem venit Brachystochronas, quae non in eodem plano contineantur, investigare; quamobrem secundum hanc differentiam sequentem tractationem bipartito sum propositurus.

I. *De Brachystochronis* in eodem plano sitis.

§. 6. Hic igitur etiam omnes vires sollicitantes in eodem plano sitas esse oportet, quas autem generalissime hic sum consideraturus. Ponamus igitur motum corporis in ipso plano tabulae absolvi, sitque Ay curva, super qua corpus moveatur, postquam ex puncto A est egressum, quam curvam referamus ad axem Ax et vocemus binas coordinatas A$x = x$ et $xy = y$, elementum vero curvae yy' vocemus ∂s, ita ut, posito $\partial y = p\partial x$, sit $\partial s = \partial x\sqrt{1+pp}$; unde si yO fuerit curvae radius osculi, constat fore $y\mathrm{O} = \frac{\partial x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p}$. Jam a quibuscunque viribus corpus in y sollicitetur, eas semper ad binas yX et yY revocare licet, quae cum coordinatis easdem teneant directiones. Vocemus igitur has vires $y\mathrm{X} = \mathrm{X}$ et $y\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$, et quia actio harum virium a loco corporis y unice pendere assumitur, istas litteras X et Y tanquam functiones quascunque binarum coordinatarum x et y spectare licet. Tum vero has vires jam tanquam acceleratrices specto, quae oriuntur si verae vires motrices per massam corporis dividantur ideoque per numeros absolutos exprimantur, denotante unitate vim acceleratricem gravitatis naturalis quacum omnes alias vires comparare licet.

Tab. I. Fig. 1.

§. 7. Cum igitur, dum corpus super curva Ay descendit, in hoc loco y actionem duarum virium $y\mathrm{X} = \mathrm{X}$ et $y\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$ sustineat, has vires secundum directionem motus, seu tangentem yT et directionem ad eam normalem yN resolvantur, atque reperietur vis tangentialis $y\mathrm{T} = \frac{\mathrm{X}\partial x + \mathrm{Y}\partial y}{\partial s}$, altera vero vis normalis $y\mathrm{N} = \frac{\mathrm{X}\partial y + \mathrm{Y}\partial x}{\partial s}$, a quarum illa motus corporis per elementum yy' procedens accelerabitur, altera autem vis normalis, si in massam corporis ducatur, dabit pressionem, quam corpus in curvam exserit, quae, si massa corporis per M indicetur, erit $\frac{M(X\partial y - Y\partial x)}{\partial s}$; cui ergo, secundum principium supra stabilitum, vis centrifuga corporis ex curvatura nata pro Brachystochronis aequalis esse deberet.

§. 8. Designemus nunc celeritatem, qua corpus elementum yx' percurrit, littera v, quae exprimat spatium, quod ista celeritate uno minuto secundo percurreretur; et quo omnia ad mensuras determinatas revocemus, denotet g altitudinem per quam gravia primo minuto secundo delabuntur, atque ex principiis motus constat fore $v\partial v = 2g\mathrm{T}\partial s$, siquidem T designet vim tangentialem, quae erat $\frac{X\partial x + Y\partial y}{\partial s}$, ex quo sequitur ista aequatio: $v\partial v = 2g(X\partial x + Y\partial y)$; unde determinatio celeritatis ab integratione hujus formulae pendet, cum sit $vv = 4g\int(X\partial x + Y\partial y)$.

§. 9. Quod si jam litterae X et Y fuerint tales functiones ipsarum x, y, ut ista formula integrationem admittat, quod evenit, uti constat, si fuerit $(\frac{\partial X}{\partial y}) = (\frac{\partial Y}{\partial x})$; tum celeritas corporis v erit functio prorsus determinata binarum variabilium x et y, ideoque a solo loco corporis y pendebit. Sin autem haec conditio non habeat locum, tum celeritas non amplius a solo loco y pendebit, sed insuper totum tractum curvae jam percursae Ay involvet, secundum valores, quos formula $X\partial x$ et $Y\partial y$ per totam curvam percursam Ay recipit; unde hic duo casus sollicite a se invicem distinguendi occurrunt, prouti scilicet formula $X\partial x + Y\partial y$ integrationis est capax nec ne. Mox enim patebit principium supra memoratum solo casu priore locum habere, altero vero casu neutiquam in usum vocari posse.

§. 10. Cum enim tempusculum, quo elementum curvae $yy' = \partial s = \partial x\sqrt{1 + pp}$ percurritur, sit $\frac{\partial s}{v}$, ut tempus per curvam Ay evadat minimum, sive ut ista curva sit vera Brachystochrona, necesse est ut formula integralis $\int \frac{ds}{v} = \int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{v}$ inter omnes curvas, quas a puncto A ad punctum y ducere licet, minimum obtineat valorem. In tractatu autem meo isoperimetrico ostendi, si formula integralis quaecunque $\int V \partial x$ debeat esse vel maximum vel minimum, ubi V quomodocunque pendeat non solum ab ipsis binis coordinatis x et y sed etiam a relatione inter earum differentialia cujusque ordinis, ita ut posito, ut jam fecimus, $\partial y = p \partial x$, porro $\partial p = q \partial x$, $\partial q = r \partial x$, $\partial r = s \partial x$, etc. fueritque

$$\partial v = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \text{etc.}$$

tum pro casu maximi vel minimi semper hanc aequationem locum habere:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q}{\partial x^2} - \frac{d^3 R}{\partial x^3} + \text{etc.} = 0,$$

quae ergo aequatio tum tantum locum habet, quando V fuerit functio quantitatum x, y, p, q, r, etc., hoc est, quando ejus valor a solo puncto y et elemento curvae in hoc loco pendet. Quando enim functio V insuper involvat quasdam formulas integrales, tum etiam termini hinc pendentes ad illam aequationem adjici debent, quo casu totus calculus longissimas ambages postulat, quas autem hoc loco non sum suscepturus, sed aequationi hic traditae unice inhaerebo.

§. 11. Hinc igitur manifestum est, istam aequationem maximi minimive locum habere non posse, nisi celeritas v sit functio determinata binarum x et y, sive si formula $\int (X\partial x + Y\partial y)$ revera integrationem admittat, quem igitur casum hic accuratius sum contemplaturus. Cum igitur pro nostris Brachystochronis fieri debeat $\int V\partial x = \int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{v}$, ideoque $V = \frac{\sqrt{1+pp}}{v}$, erit $\partial V = -\frac{\partial v}{vv}\sqrt{1+pp} + \frac{p\partial p}{v\sqrt{1+pp}}$, ubi ergo loco ∂v ejus valorem per ∂x et ∂y substituere oportet. Supra autem habuimus hanc aequationem: $v\partial v = 2g(X\partial x + Y\partial y)$, unde fit $\partial v = \frac{2g}{v}(X\partial x = Y\partial y)$, sicque ∂v partim per ∂x partim per ∂y exprimitur; quamobrem si hic valor substituatur et comparatio fiat cum forma generali supra memorata:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + \text{etc. fiet}$$
$$M = -\frac{2gX\sqrt{1+pp}}{v^3};\ N = -\frac{2gY\sqrt{1+pp}}{v^3};\ P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}};\ Q = 0;\ R = 0;\ \text{etc.}$$
sicque nunc pro Brachystochrona habebimus hanc simplicem aequaquationem: $N - \frac{\partial P}{\partial x} = 0$, sive $N\partial x = \partial P$, ita ut jam valor ipsius P denuo differentiari debeat. Erit autem $\partial P = -\frac{\partial v}{vv}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, ideoque $\partial P = -\frac{2g(X\partial x + Y\partial y)}{v^3}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, cui ergo expressioni aequari debet debet quantitas $N\partial x = -\frac{2gY\partial x\sqrt{1+pp}}{v^3}$, ex qua porro aequatione colligitur fore:
$$\frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2gX\partial x}{v^3}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} - \frac{2gY\partial x}{v^3\sqrt{1+pp}} \text{ sive}$$
$$\frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2g}{v^3\sqrt{1+pp}}(X\partial y - Y\partial x).$$

§. 12. Supra autem invenimus, vim normalem ex viribus sollicitantibus oriundam et secundum yN urgentem esse $\frac{X\partial y - Y\partial x}{\partial s}$, quae si vocetur Θ, ut sit $\Theta = \frac{X\partial y - Y\partial x}{\partial x\sqrt{1+pp}}$, nostra aequatio inventa erit $\frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2g\Theta\partial x}{v^3}$, ideoque erit $\Theta = \frac{vv}{2g\partial x}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$. Est vero $\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, sicque fiet $\Theta = \frac{vv}{2g\partial x}\cdot\frac{\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. Vidimus autem porro radium osculi in puncto y esse $\frac{\partial x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p}$, qui si vocetur r, fiet $\Theta = \frac{vv}{2gr}$. Constat autem hanc formulam $\frac{vv}{2gr}$ exprimere vim contrifugam, qua curva in puncto y a corpore descendente ob ipsam curvaturam premitur, quam ergo vim nunc videmus semper aequalem esse vi normali Θ, quoties formula $\int(X\partial x + Y\partial y)$ integrationem admittit, contra vero aequationem pro Brachystochrona longe aliter se esse habituram, ejusque determinationem calculos intricatissimos postulare. Commode autem usu venit, quoties corpus a viribus realibus, cujusmodi sunt gravitas, et vires centripetae quaecunque et quotcunque, secundum functiones distantiae quascunque sollicitantes, ut formula $\int(X\partial x + Y\partial y)$ integrationem admittat ideoque principium supra stabilitum revera locum habeat. Excluduntur tantum vires prorsus imaginariae, quae ne locum quidem in rerum natura invenire possunt.

II. *De Brachystochronis* non in eodem plano sitis.

§. 13. Hic casus evenit, quando vires, quibus corpus simul sollicitatur, non in eodem plano fuerint sitae. Sit igitur curva Az Brachystochrona quaesita, super qua corpus ex puncto A moveri coeperit. Ejus igitur punctum quodvis z per ternas coordinatas determinemus, quae sint $Ax = x$; $xy = y$; $yz = z$; elementum vero curvae vocetur $zz' = \partial s$; ita ut sit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$. Vires autem sollicitantes, utcunque fuerint comparatae, revocentur ad easdem ternas directiones fixas vocenturque $zX = X$; $zY = Y$; $zZ = Z$; quae ergo quantitates esse possunt functiones quaecunque ternarum variabilium x, y, z. Tab. I. Fig. 2.

§. 14. Ut jam motum curvae hinc definiamus, totam rem ex primis principiis motus definiamus, ac posito temporis elemento $= \partial t$, motus corporis determinatio his tribus formulis continetur: 1°) $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = 2gX$; 2°) $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = 2gY$; 3°) $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = 2gZ$; ubi g iterum designat altitudinem lapsus gravium primo minuto secundo, siquidem tempus t in minutis secundis exprimere velimus. Nunc harum aequationum prima per ∂x, secunda per ∂y et tertia per ∂z multiplicatae et integratae dabunt:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = 4g\int(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z),$$

quae aequatio, ob $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial s^2$, reducitur ad hanc:

$$\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = 4g\int(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

Quare cum $\frac{\partial s}{\partial t}$ exprimat celeritatem, qua corpus elementum zz' percurrit, si ea ponatur $= v$, habebimus hanc ejus determinationem:

$$vv = 4g\int(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z),$$

unde sequitur fore $v\partial v = 2g(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)$.

§. 15. Ex iisdem autem formulis differentio-differentialibus conveniet etiam hanc integrabilem derivare: $\frac{y\partial\partial x - x\partial\partial y}{\partial t^2} = 2g(y\mathrm{X} - x\mathrm{Y})$, cujus integrale erit $\frac{y\partial x - x\partial y}{\partial t^2} = 2g\int(y\mathrm{X} - x\mathrm{Y})$. Jam quia modo invenimus $\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = vv$, loco ∂t^2 scribamus $\frac{\partial s^2}{vv}$, eritque $\frac{y\partial x - x\partial y}{\partial s} = \frac{2g}{vv}\int(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)\partial s$. Eodem modo reperiemus $\frac{z\partial x - x\partial z}{\partial s} = \frac{2g}{vv}\int(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x)\partial s$; denique $\frac{z\partial y - y\partial z}{\partial s} = \frac{2g}{vv}\int(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y)\partial s$. Hasque formulas in sequentem unum notasse juvabit.

§. 16. Inventa jam celeritate corporis talis relatio inter ternas coordinatas x, y, z est investiganda, ut tempus, quo arcus curvae Az percurritur, omnium fiat minimum. In quo ergo negotio ad methodum isoperimetricam est recurrendum. At vero ista methodus, prouti equidem eam tractavi, ad duas tantum variabiles est accomodata; interim tamen et hanc quaestionem ad casum duarum variabilium reducere licet, siquidem in subsidium vocemus, quae de projectionibus curvarum non in eodem plano sitarum sunt tradita.

Tab. I. Fig. 3. §. 17. Consideremus igitur projectionem nostrae curvae Az in plano tabulae factam, quae sit Ay, cujus ergo natura exprimetur aequatione inter binas variabiles x et y, pro qua statuamus $\partial y = p\partial x$, eritque elementum hujus projectionis $= \partial x\sqrt{1 + pp}$. Simili modo in plano ad tabulam normali super axe Ax exstructa sit Av projectio nostrae curvae, cujus ergo natura exprimetur aequatione inter has duas variabiles A$x = x$ et $xv = yz = z$, pro qua ponamus $\partial z = q\partial x$, ut elementum hujus projectionis sit $\partial x\sqrt{1 + qq}$. Evidens autem est elementum verae curvae Az fore

$$= \partial s = \partial x\sqrt{1 + pp + qq}.$$

Priorem projectionem Ay vocemus jacentem, alteram vero Av erectam.

§. 18. Manifestum autem est, si ambae hae projectiones fuerint inventae, ex iis junctim ipsam curvam Az facillime determinari posse. Cum enim abscissa A$x = x$ utrique projectioni sit communis, si ex puncto y perpendiculum erigamus yz, ipsi xv aequale, punctum z erit in ipsa curva quaesita. At vero una harum projectionum negotium neutiquam conficit, cum tam projectio jacens quam erecta infinitis curvis convenire queat.

§. 19. His probe notatis tota quaestio de minimo quaesito ita biparpita constitui poterit. Primo scilicet spectemus projectionem erectam tanquam datam, atque inter omnes curvas, quibus eadem projectio erecta respondet, eam quaeramus, in qua formula integralis $\int \frac{\partial s}{v}$ minimum obtineat valorem, id quod per duas tantum coordinatas praestari poterit. Cum enim projectio erecta Axv tanquam data spectetur, ejus applicata z tanquam functio abscissae x spectari poterit, eodemque modo etiam quantitas $q = \frac{\partial x}{\partial z}$ erit functio ipsius x, atque si praecepta isoperimetrica ad hunc casum applicemus, reperiemus inter omnes curvas eandem projectionem erectam habentes eam, pro qua formula $\int \frac{\partial s}{v}$ minimum sortitur valorem.

§. 20. Eodem modo projectio jacens Axy tanquam cognita spectetur, atque inter omnes curvas hanc projectionem communem habentes, per eandem methodum maximorum et minimorum quaeratur ea, pro qua eadem formula $\int \frac{\partial s}{v}$ minimum obtineat valorem, et nunc in hac investigatione tam y quam $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ pro functionibus ipsius x haberi poterunt, ita ut tantum binae reliquae x et z jam variabiles reputari debeant, atque calculus per eadem praecepta atque ante expediri poterit, si modo loco y scribamus z et q loco p.

§. 21. Quod si jam hoc modo tam inter omnes curvas eandem projectionem erectam habentes, quam inter omnes eandem jacentem habentes, invenerimus curvam minimi, quoniam pro priore prodiit certa aequatio inter x et y, pro altera vero aequatio inter x et z, hae duae determinationes junctim sumtae praebebunt veram Brachystochronam, inter omnes plane curvas possibiles.

§. 22. Secundum haec praecepta jam facile erit Brachystochronas eruere, sive eas curvas, in quibus formula $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp+qq}}{v}$ minimum accipit valorem. Hic autem, ut ante, necesse est ut v sit functio determinata variabilium x, y, z, id quod evenire nequit, nisi formula $\int (X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = \frac{vv}{4g}$, integrationem admittat; quamobrem hos solos casus hic tractabimus. Hinc igitur erit $v\partial v = 2g(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)$, ideoque $\partial v = \frac{2g}{v}(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)$. Primo ergo projectionem erectam tanquam datam spectemus, ita ut tam z quam q sint functiones solius x; unde si ponamus

$$\partial \cdot \frac{\sqrt{1+pp+qq}}{v} = M\partial x + N\partial y + P\partial p,$$

aequatio pro curva quaesita erit $N\partial x - \partial P = 0$, ubi commode evenit, ut quantitas M non in hanc aequationem ingrediatur.

§. 23. Quoniam igitur quantitate M prorsus non indigemus, in hac differentiatione duae tantum in-computum veniunt variabiles scilicet y et p, quoniam z et q pro functionibus ipsius x habentur, earumque differentialia continerentur in membro $M\partial x$, quod rejicere licet. Quare valores litterarum N et P per differentiationem quaeri oportet, et quoniam quantitas p in celeritatem v non ingreditur, pro membro $P\partial p$ hinc statim oritur $P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}$.

§. 24. Restat igitur variabilis v, quae ut functio tantum ipsius y spectari poterit, sicque pro usu nostro praesente erit $\partial v = \frac{2gY\partial y}{v}$, ideoque $\partial \cdot \frac{1}{v} = -\frac{2gY\partial y}{v^3}$, sicque erit $N = -\frac{2gY}{v^3} \sqrt{1+pp+qq}$. Hinc ergo aequatio quaesita elicitur:

$$+\frac{2gY\partial x}{v^3}\sqrt{1+pp+qq} + \partial \cdot \frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}} = 0.$$

§. 25. Simili modo, si projectionem jacentem pro cognita assumamus, ut jam y et p sint functiones tantum ipsius x, aequatio ante inventa ad hunc casum transferetur, si tantum literae y et z, itemque p et q inter se permutentur. Hoc modo prodit ista aequatio:

$$\frac{2gZ\partial x}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+\partial\cdot\frac{q}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

quae aequatio, cum praecedente conjuncta, determinabit ipsam Brachystochronam quaesitam, quandoquidem ejus determinatio requirit duas aequationes, propterea quod pro qualibet abscissa x binae reliquae y et z definiri debent.

§. 26. Ecce ergo Problematis nostri resolutio his duabus aequationibus continetur:

$$\frac{2gY\partial x}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+\partial\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0$$

$$\frac{2gZ\partial x}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+\partial\cdot\frac{q}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

ubi jam omnes plane quantitates pro variabilibus sunt habendae. Hic autem posteriores formulas aliquanto magis evolvi conveniet ope hujus reductionis:

$$\partial\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=-\frac{\partial v}{vv}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}$$

Nunc autem ob $\partial v=\frac{2g(X\partial x+Y\partial y+Z\partial z)}{v}$ erit

$$\frac{\partial v}{vv}=+\frac{2g(X\partial x+Y\partial y+Z\partial z)}{v^3},$$

hincque nostrae duae aequationes sequentes formas induent:

$$\frac{2gY\partial x}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}-\frac{2g(X\partial x+Y\partial y+Z\partial z)}{v^3}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}$$
$$+\frac{1}{v}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

$$\frac{2gZ\partial x}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}-\frac{2g(X\partial x+Y\partial y+Z\partial z)}{v^3}\cdot\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}$$
$$+\frac{1}{v}\cdot\partial\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}=0.$$

Multiplicentur hae aequationes per $\frac{v^3}{2g}$ et partes priores ad denominatorem $\sqrt{1+pp+qq}$ reductae sequenti modo referentur:

$$\frac{(Y(1+qq)-pX)\partial x-pZ\partial z}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{vv}{2g}\partial\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}=0$$

$$\frac{(Z(1+pp)-qX)\partial x-qY\partial y}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{vv}{2g}\partial\cdot\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

quae aequationes porro, ob $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = q\partial x$, ita transformabuntur:

$$\frac{Y(1+qq) - pX - pqZ}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2g\partial x}\,\partial\,.\,\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0$$

$$\frac{Z(1+pp) - qX - pqY}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2g\partial x}\,\partial\,.\,\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0.$$

Quod si hic deleamus terminos z et q continentes, aequatio pro casu praecedente inventa ex priore aeqnatione manifesto oritur, ex ea quippe prodit:

$$\frac{Xp - Y}{\sqrt{1+pp}} = \frac{vv}{2g}\,\partial\,.\,\frac{p}{\sqrt{1+pp}},$$

quae aequatio cum supra inventa egregie convenit; posterior vero aequatio hoc casu plane evanescit.