E751

ANALYSIS FACILIS AEQATIONEM RICCATIANAM PER FRACTIONEM CONTINUAM RESOLVENDI.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 20 Mart. 1780.

I. Jam pridem equidem aequationis Riccatianae resolutionem per fractionem continuam tradidi, sed usus sum methodo haud parum operosa, quae transformationes satis abstrusas requirebat. Nunc autem se mihi obtulit alia via longe facilior idem praestandi, quae cum ad fractionem continuam multo simpliciorem perducat, haud indigna mihi visa est, ut eam cum publico communicarem, praecipue cum insignes Geometrae hoc argumentum summo studio perscrutari coeperint.

II. Considero autem aequationem Riccatianam, sub hac forma expressam:

$$a\,dy + yy\,dx = x^{n-2}\,dx,$$

quam autem hoc modo repraesento:

$$a\,dy - \frac{by\,dx}{x} + yy\,dx = x^{n-2}\,dx,$$

quae quidem revera priore non est generalior; posito enim:

$$y = x^{\frac{b}{a}}v \quad \text{fit} \quad dy = x^{\frac{b}{a}}\,dv + \frac{b}{a}x^{\frac{b-a}{a}}v\,dx,$$

hoc modo novus terminus introductus iterum tolletur, oricturque sequens aequatio:

$$ax^{\frac{b}{a}}dv + x^{\frac{2b}{a}}vvdx = x^{n-2}dx.$$

Verum forma assumpta ad institutum nostrum imprimis est accommodata; statuo autem praeterea $y = \frac{z}{x}$, ponoque brevitatis gratia $a + b = c$, ut prodeat sequens aequatio:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx.$$

III. Fiat nunc ista substitutio $z = c + \frac{x^n}{p}$, ita ut sit $dz = \frac{npx^{n-1}dx - x^n dp}{pp}$, factaque substitutione, et sublatis fractionibus, pervenietur ad hanc aequationem:

$$axdp - (c + na)pdx + ppdx = x^n dx,$$

quae prorsus similis est praecedenti; tantum enim eo discrepat, quod in secundo termino loco c habeamus $c + na$.

IV. In hac aequatione jam statuamus porro $p = c + na + \frac{x^n}{q}$, et calculo evoluto perveniemus ad sequentem aequationem:

$$axdq - (c + 2na)\,qdx + qqdx = x^n dx,$$

quam quidem immediate ex praecedente deducere potuissemus, scilicet loco p scribendo q et coëfficientem secundi termini, qui erat $c + na$, denuo quantitate na augendo.

V. Simili modo intelligitur, si hic porro statuamus $q = c + 2na + \frac{x^n}{r}$, prodituram esse hanc aequationem:

$$axdr - (c + 3na)\,rdx + rrdx = x^n dx,$$

atque ulterius, si hic statuam $r = c + 3na + \frac{x^n}{s}$, prodibit ista aequatio:

$$axds - (c + 4na)\,sdx + ssdx = x^n dx.$$

Sicque porro in infinitum progredi licet.

VI. Quodsi iam loco litterarum p, q, r, s, etc. valores successive substituamus, pro variabili z reperiemus sequentem fractionem continuam satis concinnam:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \cfrac{x^n}{c + 4na + \cfrac{x^n}{c + 5na + \text{etc.}}}}}}$$

unde aequationis praecedentis, quae, ob $b = c - a$, erat:

$$ady + (a - c)\frac{ydx}{x} + yydx = x^{n-2}dx,$$

valor y hac fractione continua exprimetur:

$$y = \frac{c}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \text{etc.}}}}$$

VII. Hinc igitur pro ipsa aequatione primum proposita:

$$ady + yydx = x^{n-2}dx,$$

ubi scilicet est $c = a$, erit:

$$y = \frac{a}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{a(1+n) + \cfrac{x^n}{a(1+2n) + \cfrac{x^n}{a(1+3n) + \text{etc.}}}}$$

VIII. Quodsi ergo vicissim proponatur ista fractio continua:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \text{etc.}}}}$$

nunc certi sumus valorem ipsius z determinari per hanc aequationem differentialem:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx,$$

cuius ergo integrale, rite sumptum et ad hunc casum accommodatum, praebebit valorem illius fractionis continuae; scilicet integrale ita definiri debet, ut, posito $x = 0$, fiat $z = c$, si quidem n fuerit numerus positivus; at si fuerit negativus, prodire debet $z = c$, posito $x = \infty$.

IX. Hinc plurima egregia consectaria deduci possunt pro casibus, quibus aequatio differentialis proposita integrationem admittit. Ita pro aequatione primum assumpta, ubi est $c = a$, si ponamus $n = 2$, erit $ady + yydx = dx$, unde colligitur $dx = \frac{ady}{1 - yy}$; cuius integrale est:

$$x + a = \tfrac{1}{2} a l \frac{1+y}{1-y},$$

et ad numeros ascendendo $\Delta e^{\frac{2x}{a}} = \frac{1+y}{1-y}$, unde vicissim erit:

$$y = \frac{\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1}, \text{ hincque } z = xy = x \frac{(\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1)}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1},$$

qui valor complectetur summam huius fractionis continuae:

$$z = a + \cfrac{xx}{3a + \cfrac{xx}{5a + \cfrac{xx}{7a + \cfrac{xx}{9a + \text{etc.}}}}},$$

quae cum praebeat $z = a$, sumpto $x = 0$, inde valor constantis Δ rite determinari potest.

X. Cum igitur, ob $z = xy$, invenerimus:

$$z = \frac{(\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1)x}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1},$$

constans Δ ita determinari debet, ut, posito $x = 0$, fiat $z = a$. Hoc autem casu tota haec formula evanescit, nisi etiam eius denominator simul euanescat, quod fieri nequit, nisi sumatur $\Delta = -1$. Cum igitur sit:

$$z = -x \frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{1 - e^{\frac{2x}{a}}} = x \frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{e^{\frac{2x}{a}} - 1},$$

sumpto x quasi infinite paruo fiet $e^{\frac{2x}{a}} = 1 - \frac{2x}{a}$, quam obrem hoc casu habebimus:

$$z = x \frac{(2 + \frac{2x}{a})}{\frac{2x}{a}} = a + x,$$

ideoque facto $x = 0$, fiet $z = a$, prorsus uti requiritur. Quocirca nostrae fractionis continuae hic propositae valor erit:

$$z = x\,\frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{e^{\frac{2x}{a}} - 1},$$

qui etiam hoc modo repraesentari potest:

$$z = x\,\frac{(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})}{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}},$$

cuius fractionis numerator, facta evolutione, fit:

$$2\left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{xx}{aa} + \tfrac{1}{24}\tfrac{x^4}{a^4} + \tfrac{1}{720}\tfrac{x^6}{a^6} + \text{etc}\right).$$

Denominator vero erit:

$$\tfrac{2x}{a}\left(1 + \tfrac{1}{6}\tfrac{xx}{aa} + \tfrac{1}{120}\tfrac{x^4}{a^4} + \tfrac{1}{5040}\tfrac{x^6}{a^6} + \text{etc}\right),$$

unde nanciscimur:

$$z = \frac{1 + \frac{xx}{2aa} + \frac{x^4}{24a^4} + \frac{x^6}{720a^6} + \text{etc.}}{\frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{xx}{aa} + \frac{1}{120}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{5040}\frac{x^6}{a^6} + \text{etc.}\right)}.$$

XI. Quodsi ergo sumamus $a = 1$, ut habeamus hanc fractionem continuam:

$$z = \frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = 1 + \cfrac{xx}{3 + \cfrac{xx}{5 + \cfrac{xx}{7 + \text{etc.}}}}$$

eadem fractio continua quoque ita exprimitur:

$$\frac{1 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{6}xx + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 + \text{etc.}},$$

quae ambae series eo magis convergunt, quo minor valor ipsi x tribuatur. Scilicet si ponatur $x = 1$, huius fractionis continuae:

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}}$$

valor erit: $\frac{e^1 + e^{-1}}{e^1 - e^{-1}} = \frac{ee + 1}{ee - 1}$.

XII. Verum etiam ipsa haec fractio continua vehementer convergit. Si enim indices 1, 3. 5. 7. etc. ordine disponamus, et more solito fractiones subscribamus, eae continuo propius ad verum valorem huius formae procedunt; haec autem erit huius operationis species:

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 3. & 5. & 7. & 9. & 11. & \text{etc.} \\ \frac{1}{0}; & \frac{1}{1}; & \frac{4}{3}; & \frac{21}{16}; & \frac{151}{115}; & \frac{1380}{1051}; & \text{etc.} \end{array}$$

Quo autem pateat, quam vehementer hae aequalitates ad veritatem convergant, considerentur differentiae inter terminos contiguos, quae erunt alternatim positivae et negativae, atque ita ordine procedunt:

$$\infty; \; -\frac{1}{3}; \; +\frac{1}{3.16}; \; \frac{-1}{16.115}; \; +\frac{1}{115.1051}; \; \frac{-1}{1051.11676}.$$

Nunc igitur certo scimus errorem postremae nostrae fractionis $\frac{1380}{1051}$ certe minorem esse, quam $\frac{1}{1051.11676} = \frac{1}{12271476}$. Minus ergo discrepat a valore vero $\frac{ee+1}{ee-1}$.

XIII. Hic autem quaestio magni momenti se offert, quantus futurus sit valor fractionis continuae pro z inventae:

$$z = a + \cfrac{xx}{3a + \cfrac{xx}{5a + \text{etc.}}}$$

si loco xx scribamus $-tt$, ita ut sit $x = t\sqrt{-1}$. Tum autem habebimus:

$$z = t\sqrt{-1}\,\frac{(e^{\frac{t\sqrt{-1}}{a}} + e^{\frac{-t\sqrt{-1}}{a}})}{e^{\frac{t\sqrt{-1}}{a}} - e^{\frac{-t\sqrt{-1}}{a}}}.$$

unde ergo imaginaria extrudere oportet. Cum autem sit:

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = \cos.\,\phi + \sqrt{-1}\sin.\,\phi \text{ et}$$
$$e^{-\phi\sqrt{-1}} = \cos.\,\phi - \sqrt{-1}\sin.\,\phi,$$

erit valor quaesitus $z = \frac{t}{a\,\mathrm{tg.}\frac{t}{a}} = \frac{t}{a}\cot.\frac{t}{a}$, qui ergo est valor huius fractionis continuae:

$$z = a - \cfrac{tt}{3a - \cfrac{tt}{5a - \cfrac{tt}{7a - \text{etc.}}}}$$

Ex illa autem aequatione, posito $t = 0$, manifesto fit $z = a$.

XIV. Hoc casu, quo harum fractionum continuarum valores actu determinare licuit sive per formulas exponentiales, sive per arcus circulares, prima aequatio proposita integrationem admisit. Quia autem infiniti alii casus integrabiles dantur, examinemus adhuc casum, $n = -2$, et prima aequatio erit $a\,dy + yy\,dx = \frac{dx}{x^4}$, ubi scilicet est $c = a$, pro qua integranda statuamus $y = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{xx}$, qua substitutione facta prodibit haec aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\alpha a}{xx} - \frac{2\beta a}{x^3} + \frac{\beta\beta}{x^4} \\ +\frac{\alpha\alpha}{xx} + \frac{2\alpha\beta}{x^3} \end{array}\right\} = \frac{1}{x^4},$$

ubi igitur requiritur ut sit $\alpha = a$ et $\beta\beta = 1$, ideoque vel $\beta = +1$, vel $\beta = -1$. Sicque geminum habemus valorem pro y, quorum alter est $y = \frac{a}{x} + \frac{1}{xx}$, alter vero $y = \frac{a}{x} - \frac{1}{xx}$.

XV. Haec autem integralia tantum sunt particularia; pro nostro scopo autem integrale completum nosse oportet, ut scilicet constans arbitraria ad statum quaestionis accommodari possit. Quia hic vero binos habemus valores particulares, eos ponamus $\frac{a}{x} + \frac{1}{xx} = p$ et $\frac{a}{x} - \frac{1}{xx} = q$, ita ut reuera sit $a\,dp + pp\,dx = \frac{dx}{x^4}$ et $a\,dq + qq\,dx = \frac{dx}{x^4}$, harum utraque subtrahatur ab ipsa aequatione integranda, et orientur hae duae aequalitates:

$$a(dy - dp) + dx(yy - pp) = 0 \text{ et}$$
$$a(dy - dq) + dx(yy - qq) = 0,$$

quarum illa per $y - p$, haec vero per $y - q$ divisa, praebet has aequationes:

$$a\frac{(dy - dp)}{y - p} + dx(y + p) = 0 \text{ et}$$
$$a\frac{(dy - dq)}{y - q} + dx(y + q) = 0,$$

quarum haec, ab illa subtracta, relinquit:

$$a\frac{(dy - dp)}{y - p} - a\frac{(dy - dq)}{y - q} + dx(p - q) = 0;$$

cuius ergo integrale est:

$$al(y - p) - al(y - q) + \int dx(p - q) = \text{const.}$$

Quia igitur est $p - q = \frac{2}{xx}$, erit: $\int dx(p - q) = -\frac{2}{x}$, sicque habebimus: $al\frac{y - p}{y - q} = C + \frac{2}{x}$, unde porro colligitur:

$$\frac{y - p}{y - q} = \Delta e^{\frac{2}{ax}}.$$

XVI. Ponamus hic brevitatis gratia $e^{\frac{2}{ax}} = \omega$, unde colligitur: $y = \frac{p - \Delta\omega q}{1 - \Delta\omega}$, et pro p et q, restitutis valoribus, habebitur $y = \frac{1 + ax + (1 - ax)\Delta\omega}{xx(1 - \Delta\omega)}$. Hincque porro erit:

$$z = \frac{1 + ax(1 - ax)\Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} = \frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} + a.$$

Quia vero est $c = a$ et $n = -2$, fractio nostra continua pro z inventa erit:

$$z = a + \cfrac{x^{-2}}{-a + \cfrac{x^{-2}}{-3a + \cfrac{x^{-2}}{-5a + \cfrac{x^{-2}}{-7a + \text{etc.}}}}}$$

XVII. Quia nunc in hac expressione, sumpto $x = \infty$, fit $z = a$; constans illa arbitraria Δ convenienter debet determinari, quam ob rem, posito $x = \infty$, fieri debet $\frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} = 0$, hic autem est $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$, qui valor, sumpto $x = \infty$, euadit $= 1$, quo obseruato fieri debet $0 = \frac{1 + \Delta}{x(1 - \Delta)}$. Quia vero hinc Δ nondum determinatur, haec investigatio accuratius institui debet; sumpto scilicet x praemagno, ex fractione continua, per unum membrum continuata, fit $z = a - \frac{1}{axx}$, cui ergo aequari debet haec expressio $a + \frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)}$, ideoque esse debet $\frac{1 + \Delta\omega}{1 - \Delta\omega} = \frac{-1}{ax}$, unde colligitur $\Delta\omega = \frac{1 + ax}{1 - ax} = \Delta(1 + \frac{2}{ax})$, sicque erit $\Delta = \frac{ax(1 + ax)}{(1 - ax)(2 + ax)}$. Posito hic $x = \infty$ prodit $\Delta = -1$, ideoque erit $z = a + \frac{1 - \omega}{x(1 + \omega)}$, existente $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$; cuius expressionis valor etiam per series communes satis commode exprimi poterit. Cum enim sit $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$, fractio $\frac{1-\omega}{1+\omega}$ hac forma exprimi poterit: $\frac{e^{\frac{-1}{ax}} - e^{\frac{1}{ax}}}{e^{\frac{-1}{ax}} + e^{\frac{1}{ax}}}$, cujus numerator in hanc seriem evolvitur $-2\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a^3x^3} + \frac{1}{120a^5x^5} + \text{etc.}\right)$, denominator vero erit:

$$2\left(1 + \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{24a^4x^4} + \frac{1}{720a^6x^6} + \text{etc.}\right).$$

Tum manifestum est, fore:

$$z = a - \frac{\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a^3x^3} + \frac{1}{120a^5x^5} + \text{etc.}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{24a^4x^4} + \frac{1}{720a^6x^6} + \text{etc.}\right)}.$$

XVIII. Praeterea cum in fractionibus primam sequentibus partes absolutae sint negativae, eas facile in positivas transmutare licet. Ponatur enim $z = a + \frac{x^{-2}}{v} + n$, ut sit:

$$v = -a + \cfrac{x^{-2}}{-3a + \cfrac{x^{-2}}{-5a + \cfrac{x^{-2}}{-7a + \text{etc.}}}}$$

unde fit $-v = a + \cfrac{x^{-2}}{3a + \cfrac{x^{-2}}{5a + \cfrac{x^{-2}}{7a + \text{etc.}}}}$

Quare cum sit $z = a - \frac{x^{-2}}{-v}$, loco $-v$ substituto valore habebimus:

$$z = a - \cfrac{x^{-2}}{a + \cfrac{x^{-2}}{3a + \cfrac{x^{-2}}{5a + \cfrac{x^{-2}}{7a + \text{etc.}}}}}$$

XIX. Consideremus nunc iterum fractionem continuam generalem, pro z inventam, quae erat:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \cfrac{x^n}{c + 4na + \text{etc.}}}}}$$

ubi valores ipsius z ex hac aequatione differentiali:

$$a x dz - c z dx + z z dx = x^n dx,$$

determinantur. Jam in fractione continua omnes partes absolutae, quae sunt c, $c+na$, $c+2na$, $c+3na$ etc. progressionem arithmeticam constituunt secundum differentiam na crescentem, at vero numeratores omnes sunt inter se aequales, scilicet x^n. Hinc ergo vicissim: quoties talis fractio continua occurrit, eius valor per aequationem differentialem ad genus Riccatianum pertinentem determinari poterit, id quod in sequente problemate accuratius prosequamur.

Problema.

XX. Proposita in genere hac fractione continua:

$$z = m + \cfrac{\Delta}{m + n + \cfrac{\Delta}{m + 2n + \cfrac{\Delta}{m + 3n + \cfrac{\Delta}{m + 4n + \text{etc.}}}}}$$

cuius partes absolutae in progressione arithmetica progrediantur, numeratores vero omnes sint inter se aequales; ejus valorem z ad resolutionem aequationis Riccatianae reducere.

Solutio.

Si haec forma cum modo ante allata comparetur, evidens est, eam in hanc converti, si statuamus $a = 1$ et $c = m$ tum vero potestati x^n tribui debet valor Δ, quod quidem nonnisi integratione peracta fieri licet. Quam ob rem valor quaesitus pro z ex hac aequatione differentiali:

$$x\,dz - mz\,dx + zz\,dx = x^n\,dx,$$

derivari debet.

XXI. Ut nunc hanc aequationem ad consuetam formam Riccatianae reducamus, statuamus $z = x^m v$ ut scilicet hoc modo aequatio ad tres terminos reducatur:

$$x^{m+1}\,dv + vvx^{2m}\,dx = x^n\,dx,$$

quae, per x^{m+1} divisa, abit in hanc:

$$dv + vvx^{m-1}\,dx = x^{n-m-1}\,dx,$$

quam formam ut penitus ad Riccatianam reducamus, ponamus $x^m = t$, ut fiat $x^{m-1}dx = \frac{dt}{m}$ et $x = t^{\frac{1}{m}}$, ideoque $dx = \frac{1}{m}t^{\frac{1-m}{m}}dt$ et $x^{n-m-1} = t^{\frac{n-m-1}{m}}$, quibus substitutis aequatio nostra fiet $dv + \frac{vvdt}{m} = \frac{1}{m}t^{\frac{n-2m}{m}}dt$, sive $mdv + vvdt = t^{\frac{n-2m}{m}}dt$, quae est ipsa aequatio Riccato debita.

XXII. Perpendamus nunc ante omnia casus, quibus haec aequatio resolutionem admittit, qui sunt quando in termino ad dextram posito exponens $\frac{n-2m}{m}$, in hac forma continetur $\frac{-4i}{2i+1}$, denotente i numerum quemcunque integrum, sive positivum, sive negativum. Ponamus igitur $\frac{n-2m}{m} = -\frac{4i}{2i+1}$, et utrinque binarium addendo habebimus $\frac{n}{m} = \frac{2}{2i+1}$, unde sumi poterit $m = 2i+1$ et $n = 2$. Hinc patet sumto $n = 2$, quoties fuerit m numerus impar quicunque, sive positivus, sive negativus, valorem fractionis continuae actu assignari posse, quod ergo contingit si fuerit:

$$z = 2i + 1 + \cfrac{\Delta}{2i + 3 + \cfrac{\Delta}{2i + 5 + \cfrac{\Delta}{2i + 7 + \text{etc.}}}}$$

Ubi quidem notandum est absoluta integratione fieri debere $x^n = \Delta$, hoc est $xx = \Delta$, estistente $x^m = t = x^{2i+1}$.

XXIII. Quoties autem fractio continua proposita non his conditionibus continetur, tum etiam per methodos adhuc cognitas finito modo neutiquam exprimi poterit, sed contenti esse debemus ejus valorem ad aequationem Riccatianam perduxisse, quippe cujus resolutio per series infinitas satis commode exhiberi potest, id quod unico exemplo declarabimus.

Exemplum I.

XXIV. Proposita nobis sit haec fractio continua:

$$z = 1 + \cfrac{\Delta}{2 + \cfrac{\Delta}{3 + \cfrac{\Delta}{4 + \text{etc.}}}}$$

Hic ergo erit $m = 1$ et $n = 1$, atque valor ipsius z ex hac aequatione differentiali quaeri oportet:

$$x\,dz - z\,dx + zz\,dx = x\,dx,$$

hacque aequatione resoluta loco x scribi oportebit Δ, unde patet integrationem ita institui debere, ut posito $x = 0$ fiat $z = 1$.

Ponatur nunc $z = xv$, ut oriatur haec aequatio: $dv + vv\,dx = \frac{dx}{x}$, quae ut commode in seriem resolvatur, ponamus $v = \frac{du}{u\,dx}$, et sumto elemento dx constante fit $x\,ddu - u\,dx^2 = 0$, quae jam facile in seriem resolvi poterit per potestates naturales ipsius x ascendentem. Statuatur ergo $u = ax^{\lambda} + bx^{\lambda+1} + cx^{\lambda+2} + dx^{\lambda+3} +$ etc. eritque:

$$\frac{ddu}{dx^2} = a\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + b(\lambda+1)\lambda x^{\lambda-1} + c(\lambda+2)(\lambda+1)x^{\lambda} + d(\lambda+3)(\lambda+2)x^{\lambda+1} + \text{etc.}$$

quae series aequari debet ipsi $\frac{u}{x}$, hoc est:

$$ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda} + cx^{\lambda+1} + dx^{\lambda+2} + ex^{\lambda+3} + \text{etc.}$$

Unde patet prioris seriei terminum $a\lambda(\lambda-1)$ ad nihilum redigi debere, id quod duplici modo fieri debet, sumendo vel $\lambda = 0$ vel $\lambda = 1$.

XXV. Sumatur ergo primo $\lambda = 0$ et series nostrae coaequandae erunt:

I. $2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 +$ etc. et

II. $ax^{-1} + b + cx + dxx + ex^3 +$ etc.,

erit igitur:

$$a = 0;\ c = \frac{b}{1.2};\ d = \frac{c}{2.3} = \frac{b}{1.2.2.3};$$
$$e = \frac{d}{3.4} = \frac{b}{1.2.2.3.3.4};\ f = \frac{e}{4.5} = \frac{b}{1.2.2.3.3.4.4.5},$$

quamobrem nostra series pro n sumto $b = 1$ erit:

$$u = x + \frac{1}{1.2}xx + \frac{1}{1.2^2.3}x^3 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4}x^4 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4^2.5}x^5 + \text{etc.}$$

XXVI. Simili modo evolvamus casum $\lambda = 1$, ac series pro $\frac{ddu}{dx^2}$ inventa erit:

$$1.2b + 2.3cx + 3.4dx^2 + 4.5ex^3 + 5.6fx^4 + \text{etc.}$$

cui aequalis esse debet:

$$\frac{u}{x} = a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

unde fit:

$$a = 2b;\ b = \frac{1}{1.2}a;\ c = \frac{b}{2.3} = \frac{a}{1.2^2.3};$$
$$d = \frac{c}{3.4} = \frac{a}{1.2^2.3^2.4};\ e = \frac{d}{4.5} = \frac{a}{1.2^2.3^2.4^2.5}\ \text{etc.}$$

Hinc ergo sumto $a = 1$, pro u habebimus hanc seriem:

$$u = x + \frac{1}{1.2}xx + \frac{1}{1.2^2.3}x^3 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4}x^4 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4^2.5}x^5 + \text{etc.}$$

quae cum praecedente prorsus congruit.

XXVII. Invento jam valore litterae u, ob $v = \frac{du}{udx}$ erit nunc:

$$v = \frac{1 + x + \frac{x^2}{1.2^2} + \frac{x^3}{1.2^2.3^2} + \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4^2} + \text{etc.}}{x + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} + \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5} + \text{etc.}}$$

Quocirca ipse valor fractionis continuae propositae erit:

$$z = \frac{1 + x + \frac{xx}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{xx}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}},$$

ubi commode evenit, ut sumto $x = 0$ fiat $z = 1$. Quamobrem, si faciamus $x = \Delta$, verus valor fractionis continuae propositae erit:

$$z = \frac{1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2^2} + \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{\Delta^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{\Delta}{1 \cdot 2} + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{\Delta^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}}$$

Corollarium.

XXVIII. Sumamus $\Delta = 1$, ita ut proponatur haec fractio continua:

$$z = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \text{etc.}}}}}$$

atque valor ipsius z etiam sequenti modo exprimetur:

$$z = \frac{2 + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}},$$

cuius valor in fractionibus decimalibus satis commode exprimi poterit. Reperitur autem numerator $= 2,278584$ et denominator $= 1,590635$, unde porro colligitur valor ipsius $z = 1,432490$.

XXIX. Potest vero etiam iste valor ex ipsa fractione continua deduci. Cum enim omnes numeratores sint $= 1$, partes absolutae tanquam indices ordine scribantur, et more solito fractiones subscribantur, ut sequitur:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7	
$\frac{1}{0}$;	$\frac{1}{1}$;	$\frac{3}{2}$;	$\frac{10}{7}$;	$\frac{43}{30}$;	$\frac{225}{157}$;	$\frac{1393}{972}$	etc.

quae fractiones eo propius ad veritatem accedent, quo ulterius continuentur.